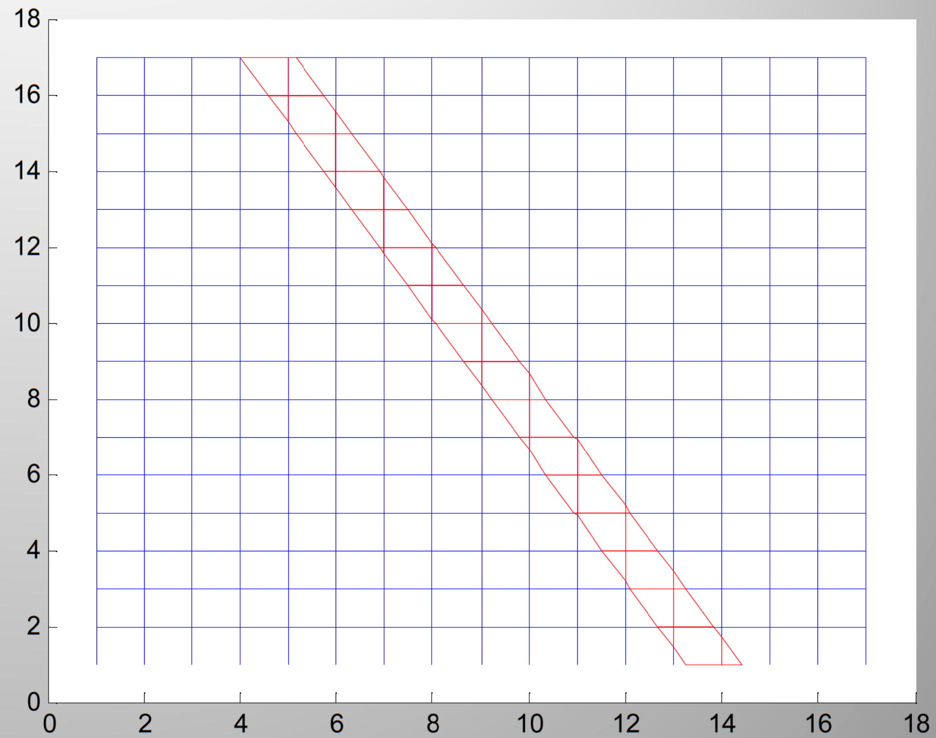
Επαναληπτικές μέθοδοι ανακατασκευής εικόνας – Η ανακατασκευή σαν αλγεβρικό πρόβλημα

- Εστω η συνάρτηση $f(x,y)$ η οποία πρέπει να ανακατασκευαστεί
- Χωρίζουμε την $f(x,y)$ σε ισομεγέθη pixels με συνολικό αριθμό N.
- Θεωρούμε πηγή και ανιχνευτή που καθορίζουν δέσμη (beam) με πλάτος όσο και ένα pixel της $f(x,y)$.
- Θεωρούμε D ανιχνευτές ανά προβολή και N_θ προβολές.
- Υπολογίζουμε την μέτρηση p_j κάθε ανιχνευτή για κάθε προβολή, $j=1,2,\ldots N_\theta D$.

$$p_j = \sum_{i=1}^{N} w_{ij} f_i$$

- όπου i=1,2,…N ο συνολικός αριθμός των pixel
  - j=1,2,….,$N_\theta D$, ο συνολικός αριθμός των ανιχνευτών για κάθε προβολή N_θ .
- Οι συντελεστές w_{ij} υπολογίζονται ως το κλάσμα του εμβαδού του pixel i το οποίο βρίσκεται εντός της δέσμης j.



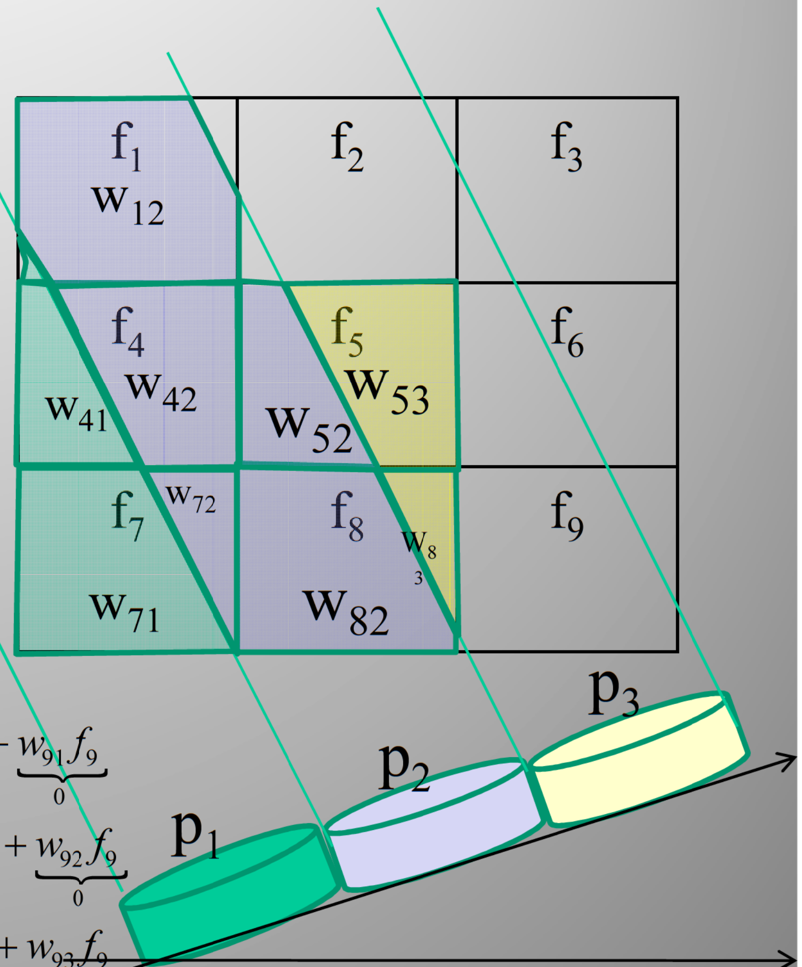
Με κόκκινο μία δέσμη πλατους τ που διέρχεται από 16x16 pixel με γωνία θ. Διακρίνονται διαφορετικές περιπτώσεις pixel που ανήκουν ολόκληρα ή εν μέρει στην δέσμη.

- Η προηγούμενη εξίσωση αποτελεί σύστημα γραμμικών εξισώσεων με άγνωστους τις ζητούμενες τιμές $f(i,j)$.
- Η επίλυση του συστήματος δεν είναι πρακτική, διότι, ο πίνακας **w** έχει πολύ μεγάλες διαστάσεις: για μία εικόνα 256x256 με 256 ανιχνευτές και 256 προβολές, ο **w** είναι 65535x65536 και δεν είναι δυνατή η αντιστροφή του.
- Συνήθως ο ο πίνακας **w** έχει περισσότερες γραμμές από στήλες ($N_\theta D>N$), άρα το σύστημα είναι υπερκαθορισμένο και απαιτεί επίλυση με μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
- Επιβεβαιώστε ότι για εικόνα 2x2, με 2 ανιχνευτές και 2 προβολές, ο πίνακας **w** είναι singular.

Εφαρμογή της προηγούμενης μεθόδου για μία συνάρτηση μεγέθους 3x3.

Κατασκευή των τριών εξισώσεων που αντιστοιχούν στους 3 ανιχνευτές.

Ο συμβολισμός όπως στις προηγούμενες διαφάνειες.



$$p_1 = w_{11} f_1 + \underbrace{w_{21} f_2}_{0} + \underbrace{w_{31} f_3}_{0} + w_{41} f_4 + \underbrace{w_{51} f_5}_{0} + \underbrace{w_{61} f_6}_{0} + w_{71} f_7 + \underbrace{w_{81} f_8}_{0} + \underbrace{w_{91} f_9}_{0}$$

$$p_2 = w_{12} f_1 + w_{22} f_2 + \underbrace{w_{32} f_3}_{0} + w_{42} f_4 + w_{52} f_5 + \underbrace{w_{62} f_6}_{0} + w_{72} f_7 + w_{82} f_8 + \underbrace{w_{92} f_9}_{0}$$

$$p_3 = w_{13} f_1 + w_{23} f_2 + w_{33} f_3 + \underbrace{w_{43} f_4}_{0} + w_{53} f_5 + w_{63} f_3 + \underbrace{w_{73} f_7}_{0} + w_{83} f_8 + w_{93} f_9$$

$$\ldots = \ldots$$

Παράδειγμα

0.8	**1.5**
0.2	1.8

Εστω χωρική κατανομή συντελεστών απορόφησης, διακριτή σε 2x2 pixels. Να γίνει ανακατασκευή της με την αλγεβρική μέθοδο.

Προβ. 1, γωνία 1, Εξισ. 1

0.8	**1.5**
0.2	1.8

$p_1 = 1.0$

$$p_1 = w_{11} f_1 + \underbrace{w_{21} f_2}_{0} + w_{31} f_3 + \underbrace{w_{41} f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

Προβ. 1, γωνία 1, Εξισ. 1

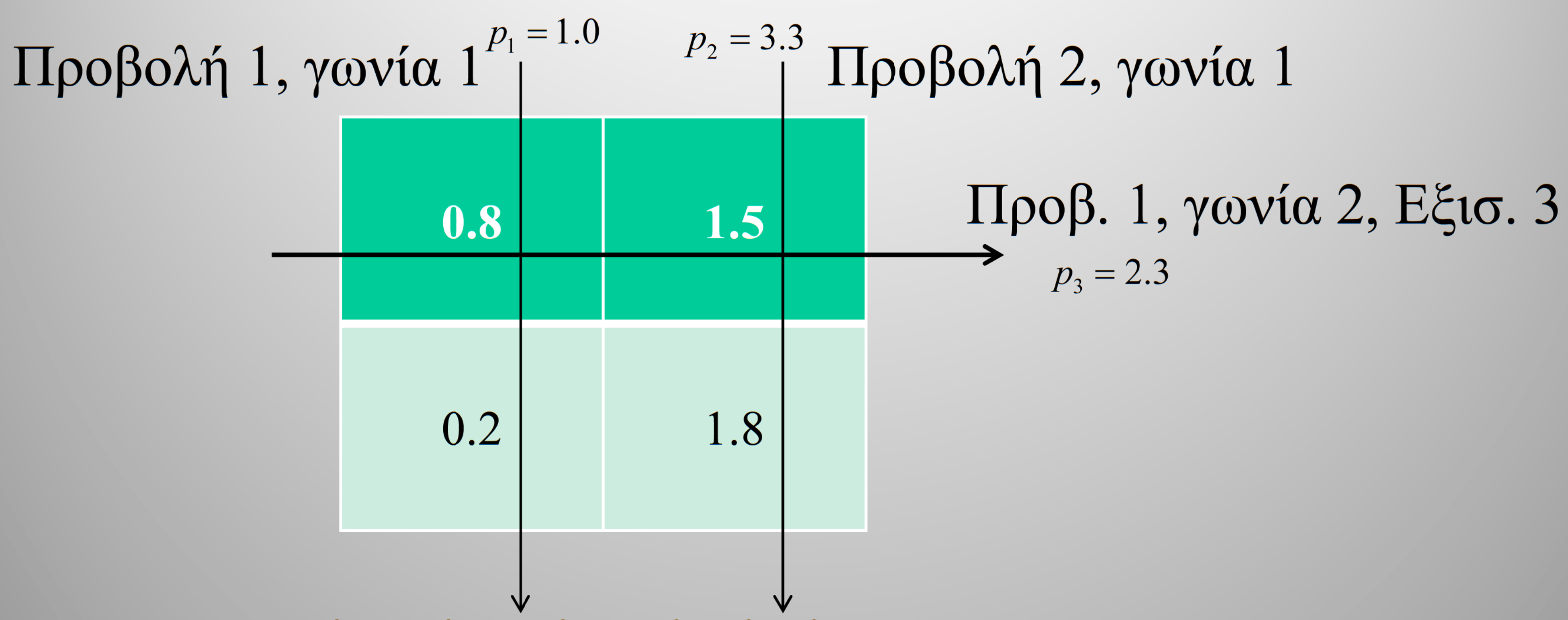
Προβ. 2, γωνία 1, Εξισ. 2

0.8	**1.5**
0.2	1.8

$p_1 = 1.0$ $\quad$ $p_2 = 3.3$

$$p_1 = w_{11} f_1 + \underbrace{w_{21} f_2}_{0} + w_{31} f_3 + \underbrace{w_{41} f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

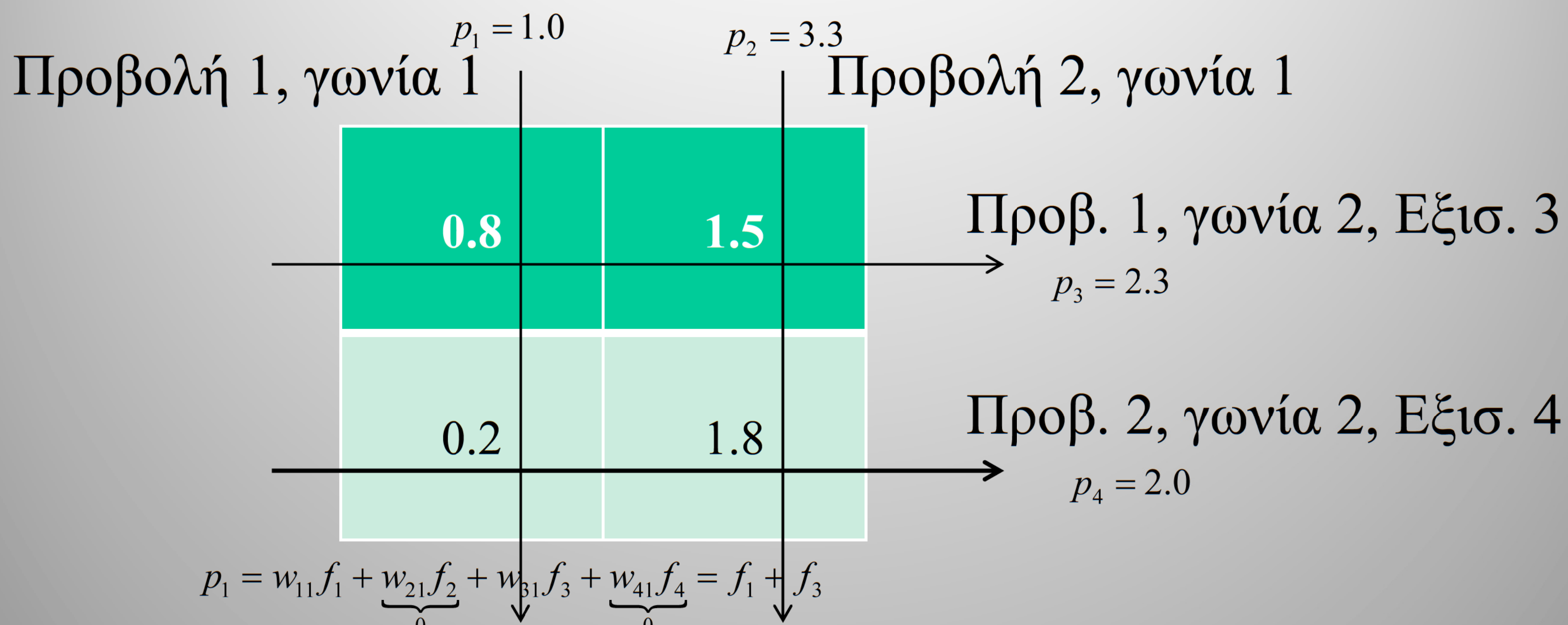
$$p_2 = \underbrace{w_{12} f_1}_{0} + w_{22} f_2 + \underbrace{w_{32} f_3}_{0} + w_{42} f_4 = f_2 + f_4$$



$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_{0} + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_{0} + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_{0} + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_{0} + \underbrace{w_{43}f_4}_{0} = f_1 + f_2$$

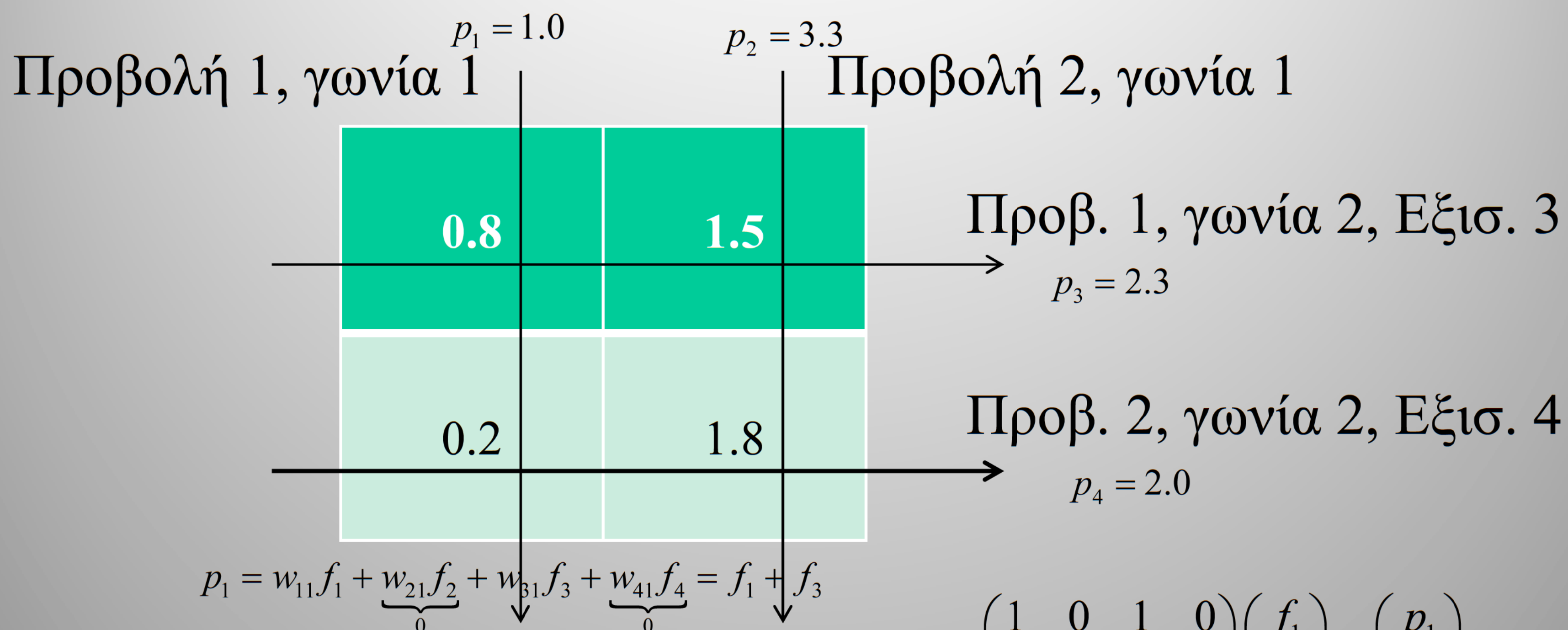


$$p_1 = w_{11} f_1 + \underbrace{w_{21} f_2}_{0} + w_{31} f_3 + \underbrace{w_{41} f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12} f_1}_{0} + w_{22} f_2 + \underbrace{w_{32} f_3}_{0} + w_{42} f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13} f_1 + w_{23} f_2 + \underbrace{w_{33} f_3}_{0} + \underbrace{w_{43} f_4}_{0} = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14} f_1}_{0} + \underbrace{w_{24} f_2}_{0} + w_{34} f_3 + w_{44} f_4 = f_3 + f_4$$



$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_{0} + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

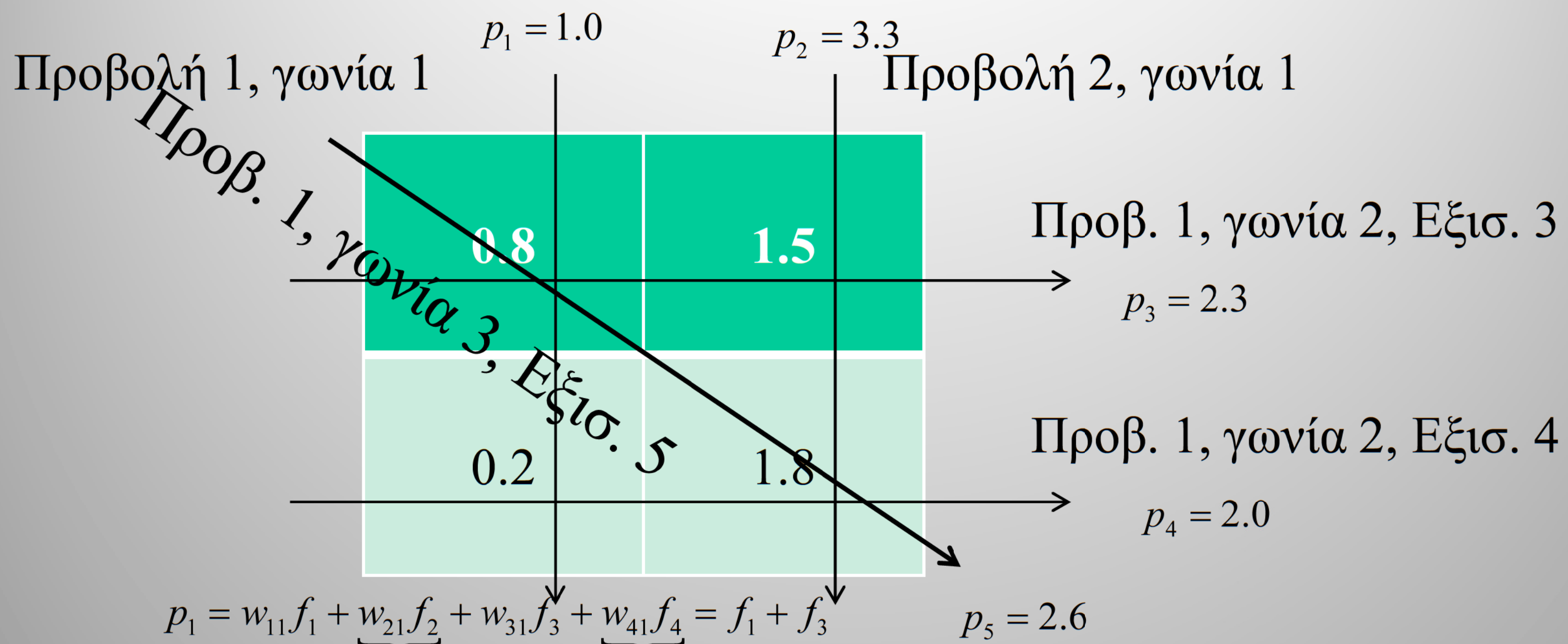
$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_{0} + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_{0} + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_{0} + \underbrace{w_{43}f_4}_{0} = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_{0} + \underbrace{w_{24}f_2}_{0} + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$$

Το γραμ. σύστημα εξισ. σε μορφή πινάκων



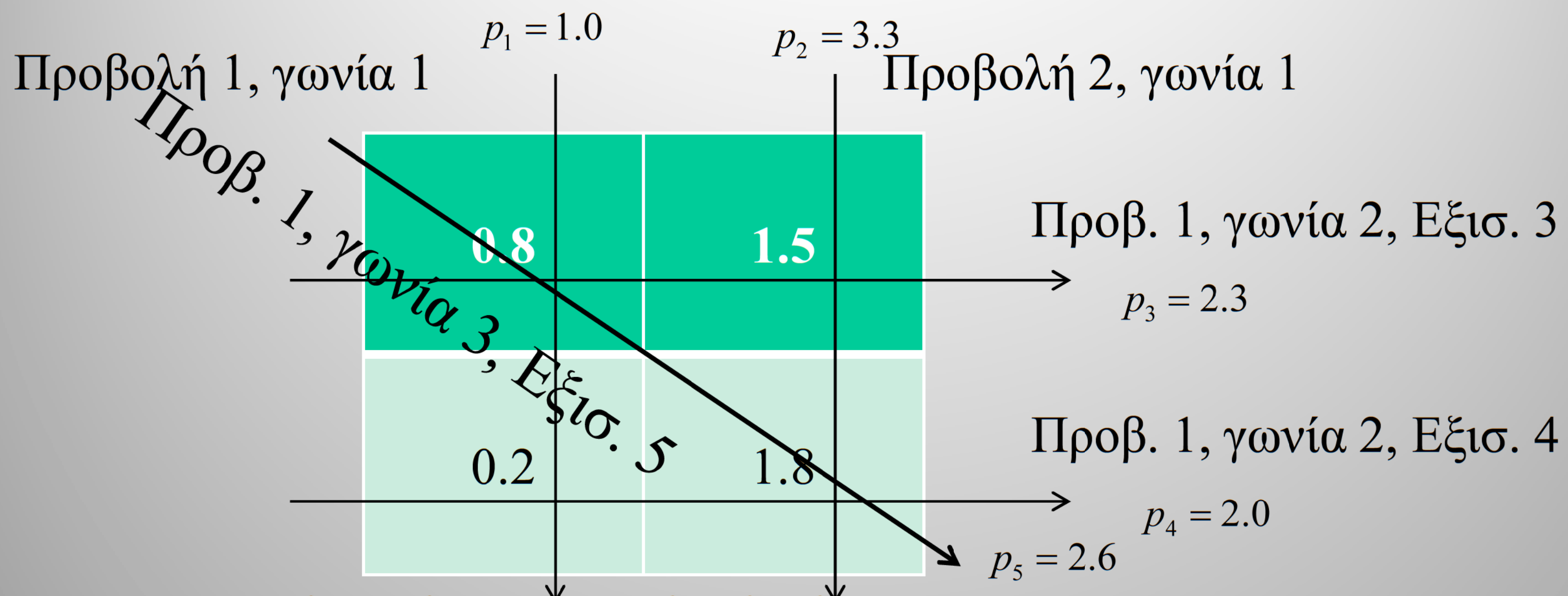
$$p_1 = w_{11} f_1 + \underbrace{w_{21} f_2}_{0} + w_{31} f_3 + \underbrace{w_{41} f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12} f_1}_{0} + w_{22} f_2 + \underbrace{w_{32} f_3}_{0} + w_{42} f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13} f_1 + w_{23} f_2 + \underbrace{w_{33} f_3}_{0} + \underbrace{w_{43} f_4}_{0} = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14} f_1}_{0} + \underbrace{w_{24} f_2}_{0} + w_{34} f_3 + w_{44} f_4 = f_3 + f_4$$

$$p_5 = w_{15} f_1 + \underbrace{w_{25} f_2}_{0} + \underbrace{w_{35} f_3}_{0} + w_{45} f_4 = f_1 + f_4$$



$$p_1 = w_{11}f_1 + \underbrace{w_{21}f_2}_{0} + w_{31}f_3 + \underbrace{w_{41}f_4}_{0} = f_1 + f_3$$

$$p_2 = \underbrace{w_{12}f_1}_{0} + w_{22}f_2 + \underbrace{w_{32}f_3}_{0} + w_{42}f_4 = f_2 + f_4$$

$$p_3 = w_{13}f_1 + w_{23}f_2 + \underbrace{w_{33}f_3}_{0} + \underbrace{w_{43}f_4}_{0} = f_1 + f_2$$

$$p_4 = \underbrace{w_{14}f_1}_{0} + \underbrace{w_{24}f_2}_{0} + w_{34}f_3 + w_{44}f_4 = f_3 + f_4$$

$$p_5 = w_{15}f_1 + \underbrace{w_{25}f_2}_{0} + \underbrace{w_{35}f_3}_{0} + w_{45}f_4 = f_1 + f_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 3.3 \\ 2.3 \\ 2.0 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$

Το γραμ. σύστημα εξισ. σε μορφή πινάκων