

Παραγοντοποίηση LU

ΔΠΜΣ Πληροφορικής και Υπολογιστικής Βιοϊατρικής

Δρ. Αρετάκη Αικατερίνη

Απρίλιος 2025

1 Παραγοντοποίηση LU

- Χωρίς οδήγηση
- Με μερική οδήγηση

Πρόταση

Αν σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ η διαδικασία απαλοιφής του Gauss βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών στοιχείων χωρίς να γίνουν εναλλαγές γραμμών (χωρίς οδήγηση), τότε ο πίνακας A μπορεί να γραφεί

$$A = LU,$$

όπου

- L είναι κάτω τριγωνικός, με 1 στην κύρια διαγώνιο και τους πολλαπλασιαστές Gauss κάτω από τη διαγώνιο,
- U είναι άνω τριγωνικός με τους οδηγούς στη διαγώνιο, ο οποίος προκύπτει από την απαλοιφή.

Άσκηση 1

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση LU του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 10 & -8 & -9 \\ 15 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow[r_3 \rightarrow r_3 + 3r_1]{r_2 \rightarrow r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 14 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 + 5r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} = LU \end{aligned}$$

Εφαρμογές της LU

Η LU παραγοντοποίηση μπορεί να εφαρμοστεί:

- Στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$:

$$Ax = b \Leftrightarrow L \underbrace{Ux}_y = b$$

1. Επίλυση του $Ly = b$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση
 2. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση
- Στην παραγοντοποίηση Cholesky θετικά ορισμένου πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$A = LL^T,$$

όπου $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία.

Άσκηση 2

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης LU να λυθεί το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

1. Παραγοντοποίηση LU :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \rightarrow r_3 - 2r_1]{r_2 \rightarrow r_2 + 1r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = LU$$

2. Επίλυση του $Ly = b$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1 & = 2 \\ -y_1 + y_2 & = -4 \\ 2y_1 & + y_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2 \\ y_2 = -2 \\ y_3 = 2 \end{cases}$$

3. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ -2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

4. Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Πίνακας μετάθεσης

- Πίνακας μετάθεσης P_{ij} : Προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα με εναλλαγή της i -γραμμής και j -γραμμής.
 - ▶ $P_{ij}A$: εναλλάσσει την i και τη j γραμμή του πίνακα A
 - ▶ AP_{ij} : εναλλάσσει την i και τη j στήλη του πίνακα A
 - ▶ Το γινόμενο πινάκων μετάθεσης είναι επίσης πίνακας μετάθεσης.
- Π.χ.: Ο πίνακας μετάθεσης $P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ εναλλάσσει την 1η και 3η γραμμή ενός πίνακα A :

$$P_{13} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} P_{13} = \begin{bmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix}$$

LU με μερική οδήγηση

Πρόταση

Αν σε έναν πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ η διαδικασία απαλοιφής του Gauss βρίσκει ένα πλήρες σύνολο οδηγών στοιχείων με εναλλαγές γραμμών, τότε υπάρχει πίνακας μετάθεσης P ώστε

$$PA = LU.$$

Άσκηση 1

Να βρεθεί η παραγοντοποίηση $PA = LU$ του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ με χρήση της απαλοιφής Gauss με μερική οδήγηση.

1. Εναλλαγή γραμμών 1 και 3:

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Απαλοιφή Gauss:

$$P_{13}A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \rightarrow r_3 - \frac{1}{7}r_1]{r_2 \rightarrow r_2 - \frac{4}{7}r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \frac{1}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix} \quad (1)$$

3. Εναλλαγή γραμμών 2 και 3 στο αριστερό και δεξί σκέλος της (1):

$$\begin{aligned} P_{23}P_{13}A &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_P \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Άρα

$$PA = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

4. Απαλοιφή Gauss:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{38}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - \frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & 1 & 0 \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & \frac{6}{7} & \frac{20}{7} \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Τελική μορφή LU:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$PA = LU$$

Επίλυση συστήματος με $PA = LU$

Η LU παραγοντοποίηση με μερική οδήγηση μπορεί να εφαρμοστεί στην επίλυση ενός γραμμικού συστήματος $Ax = b$:

$$Ax = b \Leftrightarrow PA = Pb \Leftrightarrow L \underbrace{Ux}_y = Pb$$

1. Επίλυση του $Ly = Pb$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση
2. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση

Άσκηση 2

Με τη βοήθεια της παραγοντοποίησης LU να λυθεί το σύστημα $Ax = b$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix}$

1. Από την Άσκηση 1 προκύπτει η παραγοντοποίηση LU του πίνακα A :

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = LU$$

2. Επίλυση του $Ly = Pb$ με προς τα εμπρός αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/7 & 1 & 0 \\ 4/7 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 6 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 16$$

$$y_2 = 6 - \frac{1}{7}16 = \frac{26}{7}$$

$$y_3 = 15 - \frac{4}{7}16 - \frac{1}{2}\frac{26}{7} = 4$$

3. Επίλυση του $Ux = y$ με προς τα πίσω αντικατάσταση:

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 0 & 6/7 & 20/7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 26/7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \left(\frac{26}{7} - \frac{20}{7} \right) \frac{7}{6} = 1$$

$$x_1 = (16 - 8 - 1) \frac{1}{7} = 1$$

4. Άρα η λύση είναι

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$