

Εργαστηριακή Άσκηση - QR Παραγοντοποίηση

Έστω ένας $m \times n$ πίνακας

$$A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

ο οποίος έχει βαθμό $\text{rank}(A)=n \leq m$, δηλαδή οι στήλες του $\mathbf{a}_j, j = 1, \dots, n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$. Το αποτέλεσμα της μεθόδου ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt στον χώρο στηλών του πίνακα A μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως

$$A = (\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n) = (\mathbf{q}_1 | \mathbf{q}_2 | \cdots | \mathbf{q}_n) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix} = QR,$$

όπου $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $Q^T Q = I_n$, δηλαδή οι στήλες του είναι ορθοκανονικά διανύσματα και $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι άνω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία $r_{jj} \neq 0$. Η παραπάνω ισότητα καλείται «**απλή**» παραγοντοποίηση **QR**.

Αν συμπληρώσουμε τις στήλες του πίνακα Q προσθέτοντας επιπλέον $m-n$ διανύσματα τα οποία αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^m$, τότε μπορεί να επιτευχθεί η «**πλήρης**» παραγοντοποίηση **QR**:

$$A = (\mathbf{a}_1 | \cdots | \mathbf{a}_n) = (\mathbf{q}_1 | \cdots | \mathbf{q}_n | \mathbf{q}_{n+1} | \cdots | \mathbf{q}_m) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = QR,$$

Σημειώνεται ότι $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $Q^T Q = I_m$ και $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Table of Contents

Ερώτημα 1(i)	2
Ερώτημα 1(ii)	2
Ερώτημα 1(iii)	3
Ερώτημα 2	4

Ερώτημα 1(i)

Θα ορίσουμε έναν 100x15 πίνακα Vandermonde με στήλες τις δυνάμεις του

διανύσματος $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_m)^T$, του οποίου οι συνιστώσες κατανέμονται ομοιόμορφα στο διάστημα [0,1].

```
m=100;n=15;
x=linspace(0,1,m)';
% Create Vandermonde
V = x.^[0:(n-1)];
% OR using a for-loop
% V = [];
% for i=0:n-1
%     V = [V x.^i];
% end
```

Ερώτημα 1(ii)

Το Matlab εκτελεί την απλή παραγοντοποίηση QR στον $m \times n$ πίνακα V με τη συνάρτηση $[Q,R]=qr(V,0)$ και την πλήρη παραγοντοποίηση QR με τη συνάρτηση $[Q,R]=qr(V)$. Σημειώνεται ότι το MATLAB δεν χρησιμοποιεί ορθογωνιοποίηση Gram-Schmidt, αλλά πιο αποτελεσματικές και σταθερές μεθόδους, όπως είναι ο μετασχηματισμός Householder.

```
[Q1,R1] = qr(V,0)    % Reduced QR factorization of V
```

```
Q1 = 100x15
-0.1000 -0.1715 -0.2170 -0.2492 -0.2714  0.2854  0.2922  0.2926 ...
-0.1000 -0.1680 -0.2038 -0.2190 -0.2166  0.1989  0.1682  0.1271
-0.1000 -0.1646 -0.1910 -0.1903 -0.1668  0.1248  0.0696  0.0072
-0.1000 -0.1611 -0.1783 -0.1632 -0.1218  0.0620 -0.0069 -0.0750
-0.1000 -0.1576 -0.1660 -0.1375 -0.0813  0.0096 -0.0641 -0.1263
-0.1000 -0.1542 -0.1539 -0.1132 -0.0452 -0.0334 -0.1047 -0.1529
-0.1000 -0.1507 -0.1421 -0.0904 -0.0132 -0.0679 -0.1311 -0.1601
-0.1000 -0.1472 -0.1306 -0.0690  0.0150 -0.0946 -0.1455 -0.1526
-0.1000 -0.1438 -0.1193 -0.0489  0.0395 -0.1143 -0.1499 -0.1343
-0.1000 -0.1403 -0.1083 -0.0302  0.0605 -0.1279 -0.1462 -0.1088
:
:

R1 = 15x15
-10.0000 -5.0000 -3.3502 -2.5253 -2.0303 -1.7004 -1.4648 -1.2881 ...
  0  2.9158  2.9158  2.6330  2.3502  2.1078  1.9058  1.7376
  0  0 -0.7603 -1.1404 -1.3066 -1.3658 -1.3712 -1.3494
  0  0  0  0.1946  0.3893  0.5417  0.6519  0.7286
  0  0  0  0 -0.0495 -0.1237 -0.2028 -0.2768
  0  0  0  0  0 -0.0125 -0.0376 -0.0710
  0  0  0  0  0  0  0.0032  0.0111
  0  0  0  0  0  0  0 -0.0008
  0  0  0  0  0  0  0  0
:
:
```

```
norm(V-Q1*R1)
```

```
ans = 2.2788e-15
```

```
[Q2,R2] = qr(V) % Full QR factorization of V
```

```
Q2 = 100x100
```

```
-0.1000 -0.1715 -0.2170 -0.2492 -0.2714 0.2854 0.2922 0.2926 ...  
-0.1000 -0.1680 -0.2038 -0.2190 -0.2166 0.1989 0.1682 0.1271  
-0.1000 -0.1646 -0.1910 -0.1903 -0.1668 0.1248 0.0696 0.0072  
-0.1000 -0.1611 -0.1783 -0.1632 -0.1218 0.0620 -0.0069 -0.0750  
-0.1000 -0.1576 -0.1660 -0.1375 -0.0813 0.0096 -0.0641 -0.1263  
-0.1000 -0.1542 -0.1539 -0.1132 -0.0452 -0.0334 -0.1047 -0.1529  
-0.1000 -0.1507 -0.1421 -0.0904 -0.0132 -0.0679 -0.1311 -0.1601  
-0.1000 -0.1472 -0.1306 -0.0690 0.0150 -0.0946 -0.1455 -0.1526  
-0.1000 -0.1438 -0.1193 -0.0489 0.0395 -0.1143 -0.1499 -0.1343  
-0.1000 -0.1403 -0.1083 -0.0302 0.0605 -0.1279 -0.1462 -0.1088
```

```
⋮
```

```
R2 = 100x15
```

```
-10.0000 -5.0000 -3.3502 -2.5253 -2.0303 -1.7004 -1.4648 -1.2881 ...  
0 2.9158 2.9158 2.6330 2.3502 2.1078 1.9058 1.7376  
0 0 -0.7603 -1.1404 -1.3066 -1.3658 -1.3712 -1.3494  
0 0 0 0.1946 0.3893 0.5417 0.6519 0.7286  
0 0 0 0 -0.0495 -0.1237 -0.2028 -0.2768  
0 0 0 0 0 -0.0125 -0.0376 -0.0710  
0 0 0 0 0 0 0.0032 0.0111  
0 0 0 0 0 0 0 -0.0008  
0 0 0 0 0 0 0 0  
⋮
```

```
norm(V-Q2*R2)
```

```
ans = 2.2773e-15
```

Ερώτημα 1(iii)

Η απώλεια της ορθογωνιότητας του πίνακα Q της απλής QR υπολογίζεται από τη νόρμα

$$\|I_n - Q^T Q\|$$

ενώ της πλήρους QR από τη νόρμα

$$\|I_m - Q^T Q\|$$

```
errorQ1 = norm(eye(n) - Q1'*Q1)
```

```
errorQ1 = 9.9804e-16
```

```
errorQ2 = norm(eye(m) - Q2'*Q2)
```

```
errorQ2 = 1.1659e-15
```

Ερώτημα 2

Για την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος μέσω της πλήρους QR παραγοντοποίησης εργαζόμαστε ως εξής:

$$Ax = b \Rightarrow QRx = b \Rightarrow Rx = Q^T b$$

και λύνουμε το τελευταίο άνω τριγωνικό σύστημα με προς τα πίσω αντικατάσταση.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -5 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
A=[3 -1 2;4 1 0;-3 2 1;1 1 5;-2 0 3]
```

```
A = 5x3
     3    -1     2
     4     1     0
    -3     2     1
     1     1     5
    -2     0     3
```

```
b=[10;10;-5;15;0]
```

```
b = 5x1
    10
    10
    -5
    15
     0
```

```
% solve via full QR
[Q1,R1] = qr(A)
```

```
Q1 = 5x5
    -0.4804    0.2697   -0.4057   -0.6430   -0.3442
    -0.6405   -0.5494    0.2236   -0.1427    0.4664
     0.4804   -0.6592    0.0310   -0.5023   -0.2853
    -0.1601   -0.4295   -0.6914    0.5042   -0.2400
     0.3203    0.0799   -0.5535   -0.2443    0.7246

R1 = 5x3
    -6.2450    0.6405   -0.3203
         0   -2.5670   -2.0277
         0         0   -5.8980
         0         0         0
         0         0         0
```

```
c1=Q1'*b
```

```
c1 = 5x1
   -16.0128
    -5.9432
   -12.3468
     2.2183
```

-0.9509

```
x=R1\c1
```

```
x = 3×1
    2.5246
    0.6616
    2.0934
```

```
% solve via reduced QR
[Q2,R2] = qr(A,0)
```

```
Q2 = 5×3
   -0.4804    0.2697   -0.4057
   -0.6405   -0.5494    0.2236
    0.4804   -0.6592    0.0310
   -0.1601   -0.4295   -0.6914
    0.3203    0.0799   -0.5535
R2 = 3×3
   -6.2450    0.6405   -0.3203
         0   -2.5670   -2.0277
         0         0   -5.8980
```

```
c2=Q2'*b
```

```
c2 = 3×1
   -16.0128
    -5.9432
   -12.3468
```

```
x=R2\c2
```

```
x = 3×1
    2.5246
    0.6616
    2.0934
```

(b)

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
A=[10 7 8 7;7 5 6 5;8 6 10 9;7 5 9 10;1 2 3 4]
```

```
A = 5×4
    10     7     8     7
     7     5     6     5
     8     6    10     9
     7     5     9    10
     1     2     3     4
```

```
b=[3;-2;2;-1;1]
```

```
b = 5×1
```

3
-2
2
-1
1

```
% solve via full QR
[Q1,R1] = qr(A)
```

```
Q1 = 5x5
    -0.6166    0.1702    0.5461   -0.1981    0.5033
    -0.4316    0.0433    0.3184    0.1525   -0.8290
    -0.4933   -0.1673   -0.4418    0.7004    0.2072
    -0.4316    0.0433   -0.6164   -0.6446   -0.1283
    -0.0617   -0.9692    0.1589   -0.1776    0.0099

R1 = 5x4
   -16.2173   -11.7159   -16.5256   -15.4773
         0    -1.3182    -2.5701    -3.5421
         0         0    -3.2093    -4.0896
         0         0         0    -1.4770
         0         0         0         0
```

```
c1=Q1'*b
```

```
c1 = 5x1
   -1.6032
   -0.9230
    0.8932
    0.9685
    3.7205
```

```
x=R1\c1
```

```
x = 4x1
   -0.8371
    1.3757
    0.5573
   -0.6557
```

```
% solve via reduced QR
[Q2,R2] = qr(A,0)
```

```
Q2 = 5x4
    -0.6166    0.1702    0.5461   -0.1981
    -0.4316    0.0433    0.3184    0.1525
    -0.4933   -0.1673   -0.4418    0.7004
    -0.4316    0.0433   -0.6164   -0.6446
    -0.0617   -0.9692    0.1589   -0.1776

R2 = 4x4
   -16.2173   -11.7159   -16.5256   -15.4773
         0    -1.3182    -2.5701    -3.5421
         0         0    -3.2093    -4.0896
         0         0         0    -1.4770
```

```
c2=Q2'*b
```

```
c2 = 4x1
   -1.6032
   -0.9230
    0.8932
```

0.9685

```
x=R2\c2
```

```
x = 4x1  
-0.8371  
1.3757  
0.5573  
-0.6557
```

(c)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

```
A=[4 2 3 0;-2 3 -1 1;1 3 -4 2;1 0 1 -1;3 1 3 -2]
```

```
A = 5x4  
4      2      3      0  
-2     3     -1     1  
1      3     -4     2  
1      0      1    -1  
3      1      3    -2
```

```
b=[10;0;2;0;5]
```

```
b = 5x1  
10  
0  
2  
0  
5
```

```
% solve via full QR  
[Q1,R1] = qr(A)
```

```
Q1 = 5x5  
-0.7184    -0.2115     0.2259     0.6086    -0.1332  
0.3592    -0.7685     0.5228    -0.0516    -0.0666  
-0.1796    -0.5993    -0.7688    -0.1320     0.0133  
-0.1796     0.0564     0.0525    -0.4071    -0.8922  
-0.5388    -0.0494     0.2862    -0.6662     0.4261  
R1 = 5x4  
-5.5678    -1.4368    -3.5921     1.2572  
0         -4.5755     2.4393    -1.9247  
0          0         4.1408    -1.6395  
0          0          0         1.4237  
0          0          0          0
```

```
c1=Q1'*b
```

```
c1 = 5x1  
-10.2375  
-3.5603  
2.1519
```

```
2.4911
0.8256
```

```
x=R1\c1
```

```
x = 4x1
    1.2739
    0.6885
    1.2124
    1.7497
```

```
% solve via reduced QR
[Q2,R2] = qr(A,0)
```

```
Q2 = 5x4
    -0.7184    -0.2115     0.2259     0.6086
     0.3592    -0.7685     0.5228    -0.0516
    -0.1796    -0.5993    -0.7688    -0.1320
    -0.1796     0.0564     0.0525    -0.4071
    -0.5388    -0.0494     0.2862    -0.6662

R2 = 4x4
    -5.5678    -1.4368    -3.5921     1.2572
         0     -4.5755     2.4393    -1.9247
         0         0      4.1408    -1.6395
         0         0         0      1.4237
```

```
c2=Q2'*b
```

```
c2 = 4x1
   -10.2375
    -3.5603
     2.1519
     2.4911
```

```
x=R2\c2
```

```
x = 4x1
    1.2739
    0.6885
    1.2124
    1.7497
```