ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρία Perron-Frobenius

Μη-αρνητικοί και θετικοί πίνακες εμφανίζονται κατά την αναπαράσταση και μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Η επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη γενικότερη θεωρία Πινάκων, γεγονός που μας επιτρέπει να αντλήσουμε άμεσα ορισμένες ιδιότητες για τους πίνακες αυτούς από την εφαρμογή του Ορισμού 1.2 και τις ιδιότητές τους, που διατυπώθηκαν στις Προτάσεις 1.2 και 1.3. Ωστόσο η θεωρία της φασματικής ανάλυσης δίνει σημαντικότερες πληροφορίες για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων, συνήθως συμβάλει στην απλοποίησή τους και επιταχύνει τη λύση τους. Στην παρούσα ενότητα διατυπώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες που σχετίζονται με τη φασματική ακτίνα των πινάκων αυτών.

2.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας μη-αρνητικών πινάκων

Η επόμενη πρόταση δίνει την πληροφορία ότι όταν τα στοιχεία ενός πίνακα B είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις (ίδια γραμμή και στήλη) στον πίνακα $|A| = (|a_{ij}|)$, (υπενθυμίζουμε ότι $|A| \geq 0$, βλέπε στα σχόλια του Ορισμού 1.3), η φασματική ακτίνα του B, $\rho(B)$, είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη φασματική ακτίνα του A. Επίσης η $\rho(A)$ είναι μικρότερη από τη φασματική ακτίνα του $|A|$ (στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει αρνητικά στοιχεία) ή ίση (στην περίπτωση που όλα τα στοιχεία του A είναι μηδέν ή θετικά).

===

Πρόταση 2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ *και* $B \in M_n(\mathbb{R})$ με $B \geq 0$. *Αν ισχύει* $|A| \leq B$, *τότε*

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

Επειδή για $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$, άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1 είναι η ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει συμπέρασμα για τη διάταξη των φασματικών ακτίνων δύο μη-αρνητικών πινάκων A, B, που σχετίζονται με τη διάταξη των στοιχείων των αντίστοιχων πινάκων.

Πρόταση 2.2

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *με* $0 \leq A \leq B$. *Τότε* $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Παράδειγμα 2.1

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 1.1, ισχύει $0 \leq B < A$ οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.2 και αναμένεται να ισχύει $\rho(B) < \rho(A)$. Πράγματι, οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από την ισότητα

$$\det\left(A - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0,$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -0.2749$ και $\lambda_2 = 7.2749$ κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του A είναι:

$$\rho(A) = \max\left\{|\lambda_1|, \lambda_2\right\} = \max\left\{|-0.2749|,\ 7.2749\right\} = 7.2749.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από

$$\det\left(B - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0,$$

άρα οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 3$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα του B είναι:

$$\rho(B) = \max\left\{|\lambda_1|, \lambda_2\right\} = \max\left\{|-2|,\ 3\right\} = 3$$

Από $0 \leq B < A$ καταλήγουμε $\rho(B) \leq \rho(A)$, επαληθεύοντας το συμπέρασμα της Πρότασης 2.2. ◊

==

Η σχέση που συνδέει τη φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα με τον κύριο υποπίνακά του δίνεται στην επόμενη πρόταση και μάλιστα παρουσιάζεται το πρώτο κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα, το οποίο σχετίζεται με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

Πρόταση 2.3

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ *με* $A \geq 0$. *Αν* $\widetilde{A}$ *είναι ένας οποιοσδήποτε κύριος υποπίνακας του* A, *τότε* $\rho(\widetilde{A}) \leq \rho(A)$. *Ειδικότερα,* $\max\limits_{1\leq i\leq n}\{a_{ii}\} \leq \rho(A)$.

Παράδειγμα 2.2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε το 2×2 κύριο υποπίνακα $\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας $\widetilde{A}$ ως άνω τριγωνικός έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$, (ιδιότητα (1), Πρόταση 1.4), καθώς και $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τις λ_1, λ_2 και την $\lambda_3 = 0$.

Προφανώς οι φασματικές ακτίνες είναι $\rho(\widetilde{A}) = \rho(\hat{A}) = 4$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1.4853$ και $\lambda_3 = 15.4853$, οπότε $\rho(A) = 15.4853$. Είναι φανερό ότι επαληθεύεται $\rho(\widetilde{A}) \leq \rho(A)$ και επιπλέον ότι ισχύει

$$\max_{1\leq i\leq 3}\{a_{ii}\} = \max\{1,4,7\} = 7 \leq 15.4853 = \rho(A). \qquad \lozenge$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα ταυτίζεται με κάποια από τις γνωστές νόρμες των πινάκων, ιδιότητα που περιγράφεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ *με* $A \geq 0$.

i) *Αν τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε* $\rho(A) = \|A\|_\infty$.

==

ii) *Αν τα στοιχεία κάθε στήλης αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε* $\rho(A)=\|A\|_1$.

Παράδειγμα 2.3

Έστω οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$.

- Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&3&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός και ότι τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στον αριθμό 4. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det\left(A-\lambda I\right)=0$, που είναι:

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda&1&1\\0&3-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow\left(2-\lambda\right)\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\1&2-\lambda\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\3-\lambda&1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\lambda\right)\left[\left(3-\lambda\right)\left(2-\lambda\right)-1\right]+1-\left(3-\lambda\right)=0\Leftrightarrow\left(2-\lambda\right)\left(5-5\lambda+\lambda^2\right)-2+\lambda=0$$

$$\Leftrightarrow\left(2-\lambda\right)\left[\left(\lambda^2-5\lambda+5\right)-1\right]=0\Leftrightarrow\left(2-\lambda\right)\left(\lambda^2-5\lambda+4\right)=0$$

Άρα $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ και $\lambda_3=4$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(A)=\max\left\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\right\}=\max\left\{1,2,4\right\}=4\,.$$

Αν υπολογίσουμε $\|A\|_\infty$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.13) έχουμε:

$$\begin{aligned}\|A\|_\infty&=\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\}=\max_{1\le i\le 3}\{c_i\}=\max\{c_1,c_2,c_3\}=\\&=\max\left\{|a_{11}+a_{12}+a_{13}|,|a_{21}+a_{22}+a_{23}|,|a_{31}+a_{32}+a_{33}|\right\}=\\&=\max\left\{4,4,4\right\}=4\end{aligned}$$

Προφανώς $\rho(A)=\|A\|_\infty=4$ επαληθεύοντας έτσι το (i) της Πρότασης 2.4.

- Επίσης ο πίνακας $B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός και τα στοιχεία κάθε στήλης αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στο 3. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det\left(B-\lambda I\right)=0$, που είναι:

==

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 2 & 1 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1-\lambda & 2\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\left(\lambda^2-2\lambda-1\right)+4=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+3\lambda^2-\lambda+3=0$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι : $\lambda_1=-i$, $\lambda_2=i$ και $\lambda_3=3$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(B)=\max\left\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\lambda_3\right\}=\max\left\{|i|,|-i|,3\right\}=\max\left\{\sqrt{0^2+1^2},\ \sqrt{0^2+(-1)^2},\ 3\right\}=3$$

Αν υπολογίσουμε $\| B\|_1$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.14) έχουμε:

$$\| B\|_1=\max_{1\le j\le 3}\{\sum_{i=1}^{3}| b_{ij} |\}=\max_{1\le j\le 3}\{b_j\}=\max\{b_1,b_2,b_3\}=$$
$$=\max\left\{| b_{11}+b_{21}+b_{31} |,| b_{12}+b_{22}+b_{32} |,| b_{13}+b_{23}+b_{33} |\right\}=\max\left\{3,3,3\right\}=3$$

Προφανώς επαληθεύεται το (ii) της Πρότασης 2.4, επειδή ισχύει $\rho(B)=\| B\|_1=3$. ◊

Στην Πρόταση 2.3 δόθηκε ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα, φράγμα το οποίο εξαρτάται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η φασματική ακτίνα, τα άκρα του διαστήματος είναι τα δύο φράγματά της, άνω και κάτω, και εξαρτώνται από τα στοιχεία ενός μη-αρνητικού πίνακα.

Θεώρημα 2.1

Έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη-αρνητικός πίνακας ($A\ge 0$). Τότε ισχύουν:

$$\min_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\}\le \rho(A)\le \max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\} \tag{2.1}$$

και

$$\min_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\}\le \rho(A)\le \max_{1\le j\le n}\{\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\} \tag{2.2}$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

===

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\}$ και $\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\}$.

$$\min_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\} = \min\{a_{11}+a_{12}+a_{13}, a_{21}+a_{22}+a_{23}, a_{31}+a_{32}+a_{33}\} = \min\{3,4,2\} = 2$$

$$\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\} = \max\left\{a_{11}+a_{12}+a_{13}, a_{21}+a_{22}+a_{23}, a_{31}+a_{32}+a_{33}\right\} = \max\left\{3,4,2\right\} = 4$$

Επομένως σύμφωνα με την ανισότητα (2.1) του Θεωρήματος 2.1 για τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$ θα πρέπει να ισχύει

$$2 \le \rho(A) \le 4.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det\left(A-\lambda I\right)=0$, που είναι:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left(1-\lambda\right)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 7 = 0$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι : $\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i$, $\lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i$ [1] και $\lambda_3 = 2.8171$. Επομένως η φασματική ακτίνα υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \\ &= \max\{\sqrt{0.0914^2 + 1.5737^2}, \sqrt{0.0914^2 + \left(-1.5737\right)^2}, 2.8171\} = \\ &= \max\{1.5764, 1.5764, 2.8171\} = 2.8171, \end{aligned}$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει το Θεώρημα 2.1, καθώς $2 < 2.8171 < 4$.

Επίσης, για τον ίδιο πίνακα προκειμένου να επαληθεύσουμε τη (2.2) υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{1\le j\le 3}\{\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\}$ και $\max_{1\le j\le 3}\{\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\}$:

$$\min_{1\le j\le 3}\{\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\} = \min\left\{a_{11}+a_{21}+a_{31}, a_{12}+a_{22}+a_{32}, a_{13}+a_{23}+a_{33}\right\} = \min\left\{4,2,3\right\} = 2$$

$$\max_{1\le j\le 3}\{\sum_{i=1}^{3} a_{ij}\} = \max\left\{a_{11}+a_{21}+a_{31}, a_{12}+a_{22}+a_{32}, a_{13}+a_{23}+a_{33}\right\} = \max\left\{4,2,3\right\} = 4$$

Πράγματι ισχύει $2 \le \rho(A) \le 4$. ◊

---

[1] Όταν ο πίνακας έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ως ρίζα ένα μιγαδικό αριθμό z, σίγουρα θα υπάρχει ως ρίζα (ιδιοτιμή) και ο συζυγής του $\bar{z}$.

==

Επειδή τα φράγματα των ανισοτήτων στις (2.1)-(2.2) του Θεωρήματος 2.1 εξαρτώνται από τα στοιχεία του πίνακα, αναρωτιόμαστε αν οι μη-αρνητικοί πίνακες πρέπει να έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή (ως προς τα μηδέν) ώστε το κάτω φράγμα των ανισοτήτων στις (2.1)-(2.2) να είναι θετικός αριθμός, ή μήπως το κάτω φράγμα εξαρτάται μόνο από το φάσμα του πίνακα και δεν μπορεί να αντλείται η πληροφορία από τη μορφή του πίνακα; Γιατί είναι φανερό ότι, όπως παρουσιάζεται και στο επόμενο παράδειγμα, αν οι πίνακες δεν έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή η φασματική ακτίνα τους είναι διάφορη του μηδενός, στην περίπτωση όπου οι πίνακες έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή παρατηρούμε ότι άλλοι έχουν φασματική ακτίνα διάφορη του μηδενός και άλλοι όχι.

Παράδειγμα 2.5

Έστω $A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ και $D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Παρατηρούμε ότι $A>0$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα της κάθε στήλης του A ισούται με το σταθερό αριθμό 3, επομένως σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 2.4 η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A)=3$.

  Επιπλέον οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det\left(A-\lambda I\right)=0$, που είναι:

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+2\lambda^2+\frac{15}{4}\lambda-\frac{9}{4}=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-\frac{3}{2},\ \lambda_2=\frac{1}{2},\ \lambda_3=3$$

  Άρα, το φάσμα του πίνακα A αποτελείται από τρεις διακεκριμένες μη μηδενικές τιμές και είναι $\sigma(A)=\{\lambda_1=-1.5,\ \lambda_2=0.5,\ \lambda_3=3\}$, από όπου επιβεβαιώνεται ότι η φασματική ακτίνα είναι ο θετικός αριθμός $\rho(A)=3$.

==

➢Για το μη-αρνητικό πίνακα B ισχύει : $\min_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} b_{ij}\}=1$, $\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} b_{ij}\}=2$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε $1\le \rho(B)\le 2$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(B-\lambda I)=0$, που είναι:

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 1\\ 1 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2(-\lambda-1)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_{2,3}=1$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα B είναι $\sigma(B)=\{-1,1,1\}$, από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(B)=1$. Επιπλέον η μία ιδιοτιμή είναι διπλή, όλες δε οι ιδιοτιμές βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα $\rho(B)$.

➢Για τον πίνακα C ισχύει : $\min_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\}=1$, $\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} c_{ij}\}=3$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε $1\le \rho(C)\le 3$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα C υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(C-\lambda I)=0$, που είναι:

$$\det\begin{pmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 2 & -\lambda & 1\\ 0 & 2 & -\lambda\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -\lambda^3+4\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda(4-\lambda^2)=0 \Leftrightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=0,\ \lambda_3=2$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα C αποτελείται από τρεις διακεκριμένες τιμές και είναι $\sigma(C)=\{-2,0,2\}$, από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα ισούται με $\rho(C)=2$. Εδώ η μία ιδιοτιμή βρίσκεται στην αρχή των αξόνων (0,0), και οι άλλες δύο λ_1, λ_3 έχουν το ίδιο μέτρο με αυτό της φασματικής ακτίνας, άρα αυτές ανήκουν στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα $\rho(C)$.

➢Για τον πίνακα D ισχύει : $\min_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} d_{ij}\}=0$, $\max_{1\le i\le 3}\{\sum_{j=1}^{3} d_{ij}\}=1$. Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε $0\le \rho(D)\le 1$. Επιπλέον, ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, συνεπώς οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του (βλέπε,

==

ιδιότητα (1), Πρόταση 1.4), άρα $\sigma(D)=\{0,0,0\}$, δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι $\rho(D)=0$, και μάλιστα το μηδέν είναι τριπλή ιδιοτιμή του πίνακα D. ◊

Πρόταση 2.5

Έστω $A\in M_n(\mathbb{R})$.

i) *Αν* A *είναι μη-αρνητικός* ($A\geq 0$) *και* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$ *για κάθε* $i=1,2,\ldots,n$, *τότε* $\rho(A)>0$.

ii) *Αν* $A>0$, *τότε* $\rho(A)>0$.

iii) *Αν* A *είναι μη-αναγώγιμος* (*irreducible*) *και μη-αρνητικός* ($A\geq 0$), *τότε* $\rho(A)>0$.

Σχόλια: Στο ερώτημα «για ποιους πίνακες ισχύει $\rho(A)\neq 0$» απαντούν οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται στην Πρόταση 2.5, από όπου είναι φανερό ότι η απάντηση δε σχετίζεται με το αν το μηδέν υπάρχει στο φάσμα του πίνακα ή όχι, αλλά μόνο από τα στοιχεία του πίνακα. Οι πίνακες του Παραδείγματος 2.5 επαληθεύουν τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας A είναι θετικός, επομένως από το (ii) της Πρότασης 2.5 είναι αναμενόμενο να έχει $\rho(A)>0$.

Οι μη-αρνητικοί πίνακες B,C ικανοποιούν την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (i), μια και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής τους είναι θετικός αριθμός, επομένως είναι αναμενόμενο η φασματική τους ακτίνα να είναι θετική. Εδώ σημειώστε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και αναγώγιμος (ελέγξτε και διαπιστώστε ότι $(I+B)^2\geq 0$, οπότε από Πρόταση 1.1 είναι αναγώγιμος), ενώ ο πίνακας C είναι μη-αντιστρέψιμος και μη-αναγώγιμος (ελέγξτε και διαπιστώστε ότι $(I+C)^2>0$), άρα ο C επαληθεύει και την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (iii).

Ο πίνακας $D\geq 0$ δεν ικανοποιεί την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (i), διότι η τελευταία γραμμή έχει το άθροισμα των στοιχείων της ίσο με μηδέν, και επιπλέον ο πίνακας D είναι αναγώγιμος, γιατί έχει μηδενική γραμμή, (βλέπε σχόλια του Ορισμού 1.10), συνεπώς είναι αναμενόμενο ότι $\rho(D)=0$.

===

Χρειάζεται να τονίσουμε ότι ένας $A \geq 0$ και αναγώγιμος μπορεί να έχει $\rho(A) \neq 0$, αρκεί να ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.5 (i), όπως συνέβη με τον πίνακα B του Παραδείγματος 2.5.

==

2.2 Θετικοί πίνακες

Πίνακες που πολύ συχνά προκύπτουν στις εφαρμογές είναι πίνακες με θετικά στοιχεία μόνο, γι΄ αυτό αυτοί οι πίνακες εξετάζονται ξεχωριστά, όπως και οι μη-αρνητικοί πίνακες. Το βασικό θεώρημα των Perron-Frobenius τέτοιους πίνακες μελετά και όπως είναι φυσικό αρκετοί ερευνητές σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές έχουν παρουσιάσει ένα μεγάλο πλήθος θεωρημάτων, προτάσεων και πορισμάτων γι΄ αυτούς.

Σημειώνεται ότι το ακόλουθο θεώρημα έχει το όνομα δύο κορυφαίων γερμανών μαθηματικών των Perron-Frobenius, ωστόσο το ακόλουθο που αφορά θετικό πίνακα, αποδείχθηκε το 1907 από τον Oskar (Oscar) Perron και η γενίκευσή του, που αναφέρεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, αποδείχθηκε το 1912 από τον Ferdinand Georg Frobenius.

Θεώρημα 2.2 (Perron-Frobenius)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ *με* $A > 0$. *Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

i) $\rho(A) > 0$.

ii) $\rho(A)$ *είναι ιδιοτιμή του πίνακα* A *με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με* 1, *δηλαδή,* $\rho(A)$ *είναι απλή ιδιοτιμή του* A.

iii) $|\lambda| < \rho(A)$ *για κάθε ιδιοτιμή* $\lambda \neq \rho(A)$, *οπότε η* $\rho(A)$ *είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.*

iv) *Υπάρχει διάνυσμα με θετικά στοιχεία ως συντεταγμένες* ($\boldsymbol{x} > 0$) *τέτοιο ώστε να ισχύει* $A\boldsymbol{x} = \rho(A)\boldsymbol{x}$.

Σχόλια : i) Συνδυάζοντας το (ii) και (iii) του Θεωρήματος 2.2 (Perron-Frobenius) συμπεραίνουμε ότι σε ένα θετικό πίνακα η μοναδική ιδιοτιμή, η οποία βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$, είναι αυτή που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα, και όλες οι άλλες ιδιοτιμές βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

==

ii) Το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα $x > 0$ για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$ σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 (Perron-Frobenius) μπορεί να έχει μέτρο ίσο με 1, αρκεί να διαιρέσουμε το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του· στην περίπτωση αυτή θα ισχύει $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Ορισμός 2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Η θετική ιδιοτιμή του A που ισούται με τη $\rho(A)$ ονομάζεται **ρίζα Perron** (Perron root) και το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της ονομάζεται **διάνυσμα Perron** (Perron vector). Το διάνυσμα Perron του A^T ονομάζεται **αριστερό διάνυσμα Perron** (left Perron vector) του A.

Παράδειγμα 2.6

Έστω ο θετικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας είναι κατά γραμμή στοχαστικός[2], και από την ιδιότητα (11) τις υποενότητας 1.3.3 Ιδιότητες νορμών η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = 1$. Οι ιδιοτιμές του A που προκύπτουν ως ρίζες της εξίσωσης $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$ είναι :

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -0.1377,\ \lambda_2 = 0.121,\ \lambda_3 \equiv \rho(A) = 1\}.$$

Το φάσμα του πίνακα A επαληθεύει τα συμπεράσματα (i) - (iii) του Θεωρήματος 2.2, δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι η μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του πίνακα A και όλες οι άλλες ιδιοτιμές έχουν μέτρο μικρότερο από τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Το δε ιδιοδιάνυσμα που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης $\left(A - \lambda_3 I\right)\boldsymbol{x} = 0$ είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα επαληθεύοντας το συμπέρασμα (iv) του Θεωρήματος 2.2. Πράγματι:

---

[2] Βλέπε, στον Ορισμό 1.8.

==

$$\left(A-\lambda_3 I\right)\boldsymbol{x}=0\left(A-I\right)\boldsymbol{x}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1+x_2+2x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1-2x_2+x_3=0 \\ -3x_1+x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+x_2-3x_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1=x_3 \\ x_2=x_3 \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ x_3\in\mathbb{R}-\{0\}$$

οποιαδήποτε $x_3>0$ και να επιλέξουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας είναι ένα διάνυσμα με συντεταγμένες θετικούς αριθμούς. ◊

==

2.3 Μη-αρνητικοί πίνακες και θεωρία Perron-Frobenius

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε ποιες από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των θετικών πινάκων που διατυπώθηκαν στο Θεώρημα 2.2 εκλείπουν και ποιες διατηρούνται στην περίπτωση μη-αρνητικών πινάκων. Παίρνοντας αφορμή από τους μη-αρνητικούς πίνακες που παρουσιάστηκαν στο Παράδειγμα 2.5 και οι οποίοι έχουν φασματική ακτίνα διαφορετική από το μηδέν και από την ιδιότητα που παρουσιάζει η ρίζα Perron των θετικών πινάκων, για τους μη-αρνητικούς πίνακες αναρωτιώμαστε:

α) αν η φασματική ακτίνα μη-αρνητικών πινάκων ταυτίζεται με θετική πραγματική ιδιοτιμή ή όχι.

β) ποια είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα; Η πολλαπλότητα σχετίζεται με τη θέση και την ποσότητα των μηδενικών στοιχείων του πίνακα ή με κάποια χαρακτηριστική ιδιότητά τους (π.χ. ανάγωγους, συμμετρικούς);

γ) υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα με μέτρο ίσο με αυτό της φασματικής ακτίνας; Πόσες είναι οι ιδιοτιμές που έχουν την προαναφερθείσα ιδιότητα;

Το ακόλουθο θεώρημα, δίνει απάντηση στο πρώτο από τα προαναφερθέντα ερωτήματα, μια και αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι μία πραγματική θετική ιδιοτιμή του μη-αρνητικού πίνακα και επιπλέον το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι μη-αρνητικό διάνυσμα.

Θεώρημα 2.3

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A \geq 0$, τότε $\rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή του A και υπάρχει ένα μη-αρνητικό διάνυσμα $x \geq 0$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Σχόλια : i) Το Θεώρημα 2.3, που εφαρμόζεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, μια ευρύτερη κατηγορία πινάκων από τους θετικούς, αποτελεί γενίκευση των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 2.2 και μας πληροφορεί ότι η $\rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και όχι απλά η απόλυτη τιμή μιας από τις ιδιοτιμές του.

===

Συνεπώς, οι τιμές $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ **δεν μπορεί** να αποτελούν ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα A, καθώς στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max\{4,1,3\} = 4 .$$

Η τιμή της φασματικής ακτίνας είναι η απόλυτη τιμή της λ_1 και όχι η ίδια η λ_1. Επιπρόσθετα οι τιμές $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ είναι πιθανές ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα όπως και οι $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, επειδή και στις δύο περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ισούται με την ιδιοτιμή λ_3.

ii) Παίρνοντας αφορμή από τους πίνακες των Παραδειγμάτων 2.3 και 2.4, χρειάζεται να επισημάνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός $A \geq 0$ μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί, ωστόσο η φασματική ακτίνα αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή, που είναι πραγματικός θετικός αριθμός, (βλέπε, τον πίνακα B στο Παράδειγμα 2.3 και τον A στο Παράδειγμα 2.4) .

iii) Στο Θεώρημα 2.3 για μη-αρνητικούς πίνακες αποδείχθηκε ότι η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί η φασματική ακτίνα του πίνακα είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός χωρίς να γνωρίζουμε πληροφορίες για την πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής, πληροφορίες τις οποίες έδινε το Θεώρημα 2.2 (κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες).

Υπενθυμίζουμε ότι στο Παράδειγμα 2.5 ο μη-αρνητικός και αναγώγιμος πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει φάσμα $\sigma(B) = \{-1,1,1\}$, άρα $\rho(B) = \lambda = 1$, και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$ είναι ίση με 2, ενώ ο μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

έχει φάσμα $\sigma(C) = \{-2, 0, 2\}$, και όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1 και $\rho(C) = 2$.

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως γενικευμένο θεώρημα Perron-Frobenius, η απόδειξη μπορεί να αναζητηθεί[3].

---

[3] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005, [βλέπε, Theorem 8.4.4].

==

Θεώρημα 2.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ *ένας μη-αναγώγιμος (irreducible) πίνακας με* $A \geq 0$. *Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

i) $\rho(A) > 0$.

ii) $\rho(A)$ *είναι ιδιοτιμή του πίνακα* A *με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με* 1, *δηλαδή,* $\rho(A)$ *είναι απλή ιδιοτιμή του* A.

iii) *Υπάρχει διάνυσμα με θετικά στοιχεία ως συντεταγμένες* ($\boldsymbol{x} > 0$) *τέτοιο ώστε να ισχύει* $A\boldsymbol{x} = \rho(A)\boldsymbol{x}$.

Σχόλια: i) Όπως στο Θεώρημα 2.2 (κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες) έτσι και στη γενικότερη περίπτωση των μη-αρνητικών πινάκων A η θετική ιδιοτιμή ταυτίζεται με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$, η οποία ονομάζεται **ρίζα Perron** και το αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμά της **διάνυσμα Perron**.

ii) Θεωρητικά, δεν υπάρχει δυσκολία για τον καθορισμό των ιδιοτιμών ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, στην πράξη συμβαίνει το αντίθετο, επειδή μόνο ο υπολογισμός της ορίζουσας $\det(A - \lambda I)$ απαιτεί $n!$ πολλαπλασιασμούς, είναι άμεσα αντιληπτό ότι για μεγάλη τιμή του n το πλήθος των πράξεων του προβλήματος εύρεσης ιδιοτιμών είναι αριθμός απαγορευτικός. Επιπρόσθετα, ο υπολογισμός των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι άλλο ένα δύσκολο αλγεβρικά και υπολογιστικά πρόβλημα, γι' αυτό στην πράξη χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους. Ο απλούστερος, αλλά κάποιες φορές, χρονοβόρος τρόπος εύρεσης της φασματικής ακτίνας παρακάμπτει τον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών λ_i και στη συνέχεια την επιλογή της ιδιοτιμής εκείνης που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή $|\lambda|$ από όλες τις υπόλοιπες με την ανάπτυξη αλγορίθμων, οι οποίοι υπολογίζουν τη φασματική ακτίνα, χωρίς τον υπολογισμό των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι

- ο γνωστός ως αλγόριθμος της Δυναμικής Μεθόδου (Power Method), καθώς και
- ένας ο αλγόριθμος των Chengming Wen και Ting-Zhu Huang[4].

---

[4] Chengming Wen και Ting-Zhu Huang, (2011). A modified algorithm for the Perron root of a nonnegative matrix, Applied Mathematics and Computation, 217(9), pp. 4453–4458.

==

iii) Στο γενικευμένο Perron-Frobenius (βλέπε, Θεώρημα 2.4) δεν δόθηκαν πληροφορίες για το μέτρο όλων των άλλων ιδιοτιμών του μη-αρνητικού πίνακα σε σχέση με τη ρίζα Perron και είναι το μόνο σημείο στο οποίο διαφέρει το κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius, που αναφέρεται σε θετικούς πίνακες από το γενικευμένο.

Παράδειγμα 2.7

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

➢Ο πίνακας A είναι ο μη-αρνητικός πίνακας του Παραδείγματος 2.4, όπου υπολογίστηκε ότι

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \max\{1.5764, 1.5764, 2.8171\} = 2.8171,$$

επειδή το φάσμα του είναι

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i,\ \lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i,\ \lambda_3 = 2.8171\}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι A είναι μη-αναγώγιμος, επειδή

$$(I + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} > 0,$$

(βλέπε, Πρόταση 1.1). Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.4, από όπου είναι αναμενόμενο ότι $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$ είναι μία απλή ιδιοτιμή του A.

Επιπλέον σημείωσε ότι ισχύει $|\lambda_{1,2}| < \rho(A)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_{1,2} \neq \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.

➢ Ο πίνακας B του Παραδείγματος 2.5 έχει φάσμα $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$, η ρίζα Perron $\rho(B) = 1$ είναι αναμενόμενο να έχει πολλαπλότητα διαφορετική του 1, επειδή ο πίνακας B είναι αναγώγιμος, συνεπώς, δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του γενικευμένου θεωρήματος Perron-Frobenius Θεώρημα 2.4.

➢Ο πίνακας C αναφέρεται στο Παράδειγμα 2.5 έχει φάσμα

$$\sigma(C) = \{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}.$$

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι είναι μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος, επειδή

==

$$(I+C)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0 .$$

Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.4, από όπου είναι αναμενόμενο να υπολογίζεται ότι $\rho(C) = \lambda_3 = 2$ είναι μία απλή ιδιοτιμή του πίνακα. Όμως **δεν** ισχύει $|\lambda| < \rho(C)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(C)$, δηλαδή η $\rho(C)$ **δεν** είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο. ◊

Από το παραπάνω Παράδειγμα 2.7 παρατηρούμε ότι οι μη-αρνητικοί και ανάγωγοι πίνακες A και C επαληθεύουν τα συμπεράσματα του γενικευμένου Θεωρήματος 2.4 των Perron-Frobenius, αφού η φασματική τους ακτίνα είναι μια απλή θετική ιδιοτιμή τους, ωστόσο η φασματική ακτίνα δεν είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο. Άρα χρησιμοποιώντας γνωστές έως εδώ κατηγορίες μη-αρνητικών πινάκων δεν μπορούμε να παράγουμε ένα κριτήριο το οποίο να εντοπίζει, αν υπάρχουν ή όχι, άλλες ιδιοτιμές του πίνακα (εκτός της φασματικής ακτίνας) πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα. Έτσι αναγκαζόμαστε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για να απαντήσουμε με αυτόν τον τρόπο στο τρίτο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας.

Ορισμός 2.2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος. Αν ο πίνακας A έχει μία μόνο ιδιοτιμή πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας $\rho(A)$ ονομάζεται **πρωταρχικός πίνακας** (primitive). Σε αντίθετη περίπτωση, όπου υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου μηδέν και ακτίνας $\rho(A)$ ο πίνακας A ονομάζεται **μη-πρωταρχικός** (imprimitive).

Η επόμενη πρόταση[5] δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας μη-αρνητικός πίνακας A είναι πρωταρχικός.

---

[5] R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005, [βλέπε, Theorem 8.5.2 και Corollary 8.5.9].

==
Η μία συνθήκη εξαρτάται από έναν k άγνωστο φυσικό αριθμό και σχετίζεται με τη $k-$δύναμη του πίνακα A και η άλλη συνθήκη σχετίζεται με δύναμη του πίνακα A γνωστή εκ των προτέρων, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος του πίνακα.

Θεώρημα 2.5

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A \geq 0$ και μη-αναγώγιμος (irreducible). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

i) *A είναι πρωταρχικός.*

ii) $A^k > 0$, *για κάποιο* $k \geq 1$.

iii) $A^{n^2-2n+2} > 0$.

Παράδειγμα 2.8

➢ Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία (iii)-(i) του Θεωρήματος 2.5 διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας A του προηγουμένου Παραδείγματος 2.7 είναι πρωταρχικός, μια και ισχύει

$$A^5 = \begin{pmatrix} 61 & 32 & 70 \\ 105 & 61 & 96 \\ 48 & 35 & 61 \end{pmatrix} > 0 .$$

Επομένως επαληθεύεται ο Ορισμός 2.2, οπότε όλες οι άλλες ιδιοτιμές, εκτός της φασματικής ακτίνας, ανήκουν εντός του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$.

➢ Εξετάζοντας αν ισχύει η σχέση (iii) του Θεωρήματος 2.5 διαπιστώνουμε ότι για τον πίνακα C του προηγουμένου Παραδείγματος 2.7 έχουμε

$$C^5 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 ,$$

συνεπώς ο πίνακας C είναι μη-πρωταρχικός. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2, υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα, εκτός της φασματικής ακτίνας, που έχουν μέτρο ίσο με τη φασματική ακτίνα $\rho(C) = \lambda_3 = 2$.

➢ Τέλος, για να μη θεωρηθεί ότι ο προηγούμενος πίνακας C είναι ειδικής μορφής πίνακας (τριδιαγώνιος), ας θεωρήσουμε το μη-αρνητικό πίνακα

==

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D έχει το ίδιο πλήθος μηδενικών που έχει και ο C σε διαφορετικές θέσεις. Το φάσμα του D είναι το σύνολο

$$\sigma(D) = \{\ \lambda_1 = 1.3247\ ,\ \lambda_2 = -0.6624 + 0.5623i,\ \lambda_3 = -0.6624 - 0.5623i\},$$

τα μέτρα των ιδιοτιμών είναι $|\lambda_1| = 1.3247,\ |\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.8688$, από όπου είναι φανερό ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$, εδώ παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.

Ο πίνακας D είναι μη-αναγώγιμος, επειδή

$$(I + D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

και είναι πρωταρχικός (βλέπε, Θεώρημα 2.5-(iii)-(i)), επειδή ισχύει

$$D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές λ_2, λ_3 έχουν μέτρο μικρότερο από $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$, επειδή ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου κέντρου (0,0) και ακτίνας $\rho(D)$, (όχι πάνω στην περιφέρεια). ◊