



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΔΠΜΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗ ΚΑΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΒΙΟΪΑΤΡΙΚΗ

Παραγοντοποιήσεις πίνακα

Θεωρία Perron-Frobenius

Μαρία Αδάμ

ΛΑΜΙΑ, 2020

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παραγοντοποίηση πίνακα

1.1 Άλγεβρα πινάκων

1.1.1 Βασικοί ορισμοί

Ορισμός 1.1

Πίνακα A με στοιχεία από το \mathbb{F} (σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών ή σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών) ονομάζουμε μια διάταξη των mn στοιχείων (αριθμών) a_{ij} του συνόλου \mathbb{F} σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου ως εξής:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Οι αριθμοί a_{ij} ονομάζονται στοιχεία του πίνακα. Με βάση τις γραμμές και τις στήλες του πίνακα ($m \times n$) βρίσκουμε το **μέγεθος** ή **τύπο** του πίνακα. Συγκεκριμένα λέμε ότι ο πίνακας A είναι ένας $m \times n$ πίνακας.

Στη συνέχεια, ο πίνακας A συμβολίζεται (a_{ij}) , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$. Ακόμη, με $M_{m \times n}(\mathbb{F})$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} . Δύο ή περισσότεροι πίνακες που έχουν ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών χαρακτηρίζονται ως πίνακες **ιδίου τύπου**.

Αν διαγραφούν κάποιες γραμμές ή στήλες από τον πίνακα A , ο πίνακας που προκύπτει ονομάζεται **υποπίνακας** του A .

Ένας **υποπίνακας** του $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, που προκύπτει από τη διαγραφή των k τελευταίων γραμμών και στηλών του A ονομάζεται **κύριος υποπίνακας** του A για κάθε $1 \leq k < n$.

Ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ονομάζεται **σύνθετος** πίνακας ή πίνακας block, αν τα στοιχεία του είναι πίνακες μικρότερου μεγέθους από αυτό του A . Οι υποπίνακες αυτοί είναι τέτοιοι ώστε τα στοιχεία-**υποπίνακες**, που βρίσκονται στην ίδια γραμμή, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό γραμμών και τα στοιχεία-**υποπίνακες** που βρίσκονται στην ίδια στήλη, έχουν όλα τον ίδιο αριθμό στηλών. Ο σύνθετος πίνακας θα συμβολίζεται $A = (A_{ij})$, όπου A_{ij} είναι το στοιχείο-υποπίνακας, που προκύπτει από τη διαμέριση του αρχικού πίνακα A και βρίσκεται στην i - γραμμή και j - στήλη του πίνακα A . Η διαμέριση του αρχικού πίνακα γίνεται με την χάραξη κατακόρυφων και οριζόντιων γραμμών, που διαχωρίζουν τις γραμμές και τις στήλες του αρχικού πίνακα. Για παράδειγμα, έστω ο σύνθετος πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c|ccc} 2 & 1 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 4i & 1 & 1 & 1 & 7 & 0 \\ \hline -2 & 5 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 3 \end{array} \right),$$

όπου $A_{11} = (2 \ 1)$, $A_{12} = (6)$, $A_{13} = (1 \ 0 \ 3)$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 4i & 1 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και

$$A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Στη συνέχεια παρουσιάζονται ορισμένες *κατηγορίες* πινάκων, που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα συναντήσουμε στην παρούσα εργασία.

- Ένας $1 \times n$ πίνακας λέγεται και **πίνακας-γραμμή**, ενώ ένας $m \times 1$ πίνακας λέγεται και **πίνακας-στήλη** ή **διάνυσμα**.

Όταν πρόκειται Στη συνέχεια, για πίνακες-διανύσματα των πραγματικών χώρων \mathbb{R}^n χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\mathbb{R}^{1 \times n}$ όταν πρόκειται για πίνακα-γραμμή και το συμβολισμό $\mathbb{R}^{n \times 1}$ όταν πρόκειται για πίνακα-στήλη, προκειμένου να μην υπάρχει σύγχυση με τα διανύσματα του \mathbb{R}^n για τα οποία βάζουμε κόμμα μεταξύ των στοιχείων-συντεταγμένων του διανύσματος¹. (που είναι ισόμορφος με $\mathbb{R}^{1 \times n}$ ή $\mathbb{R}^{n \times 1}$),

¹ Σημειώνεται ότι οι χώροι \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}^{1 \times n}$ και $\mathbb{R}^{n \times 1}$ είναι ισόμορφοι.

Για παράδειγμα, γράφουμε $A = (1 \ 3 \ -1 \ 4) \in \mathbb{R}^{1 \times 4}$ για το διάνυσμα-γραμμή και $(1, 3, -1, 4)$ για το διάνυσμα του \mathbb{R}^4 .

- Εάν όλα τα στοιχεία ενός $m \times n$ πίνακα είναι ίσα με μηδέν, ο πίνακας αυτός ονομάζεται **μηδενικός** και συμβολίζεται με $0_{m \times n}$ ή απλά με 0 .
- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $n \times m$ πίνακας (a_{ji}) ονομάζεται **ανάστροφος** του A και συμβολίζεται με A^T .

Για παράδειγμα, αν $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -8 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ τότε $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -8 & 4 \end{pmatrix}$.

- Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $m \times n$ πίνακας. Ο $m \times n$ πίνακας, ο οποίος έχει ως στοιχεία του τα συζυγή στοιχεία του πίνακα A , δηλαδή \bar{a}_{ij} , ονομάζεται **συζυγής** του A και συμβολίζεται με \bar{A} .

Για παράδειγμα, αν, ο συζυγής του είναι $\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2i \\ 2+i & 3 & 5+i \end{pmatrix}$.

Ο $n \times m$ πίνακας (\bar{a}_{ji}) ονομάζεται **αναστροφοσυζυγής** του πίνακα A και συμβολίζεται $A^* = \bar{A}^T$.

Για παράδειγμα, ο αναστροφοσυζυγής του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2i \\ 2-i & 3 & 5-i \end{pmatrix} \text{ είναι } A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ 6 & 3 \\ -2i & 5+i \end{pmatrix}.$$

Πίνακα A με στοιχεία από το \mathbb{F} (σύνολο \mathbb{R} των πραγματικών ή σύνολο \mathbb{C} των μιγαδικών αριθμών) ονομάζουμε μια διάταξη των mn στοιχείων (αριθμών) a_{ij} του συνόλου \mathbb{F} σε σχή

Ορισμός 1.2

Ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, που όλα τα στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί ονομάζεται **θετικός** (positive) πίνακας και συμβολίζεται $A > 0$.

Αν ο πίνακας A έχει όλα τα στοιχεία του μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός ονομάζεται **μη-αρνητικός** (nonnegative) πίνακας και συμβολίζεται $A \geq 0$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι θετικός, ενώ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός.

Ορισμός 1.3

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Η **απόλυτη τιμή** του πίνακα A συμβολίζεται $|A|$ και ορίζεται ως ο $m \times n$ μη-αρνητικός πίνακας με $|A| = (|a_{ij}|)$.

Για παράδειγμα, ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1+3i & 1 & 4i \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \text{ έχει απόλυτη τιμή } |A| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sqrt{10} & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Σχόλια: Συνδυάζοντας τον Ορισμό 1.2 με τον Ορισμό 1.3 συμπεραίνουμε ότι η απόλυτη τιμή οποιουδήποτε πίνακα είναι ένας μη-αρνητικός πίνακας, δηλαδή για κάθε πίνακα A ισχύει $|A| \geq 0$.

Ορισμός 1.4

- Εάν ένας $m \times n$ πίνακας έχει ίδιο αριθμό γραμμών και στηλών ($m = n$), ο πίνακας αυτός ονομάζεται **τετραγωνικός**. Το σύνολο όλων των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το \mathbb{F} συμβολίζεται με $M_n(\mathbb{F})$.

Για παράδειγμα, οι πίνακες $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι τετραγωνικοί.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος**, αν για κάθε $i \neq j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή αν κάθε στοιχείο, που δε βρίσκεται στη διαγώνιο, είναι ίσο με μηδέν. Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται και ως $A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

Ειδικότερα, ο διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία ίσα με 1 ονομάζεται **μοναδιαίος** και συμβολίζεται $I_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$.

- Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός**, αν για κάθε $i > j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Αντίθετα ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός**, αν για κάθε $i < j$ ισχύει $a_{ij} = 0$, δηλαδή αν τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν.

Ορισμός 1.5

- Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **συμμετρικός**, αν για κάθε i, j ισχύει

$$a_{ij} = a_{ji}. \text{ Ισοδύναμα,}$$

ένας πίνακας A είναι συμμετρικός αν και μόνο αν ισχύει $A = A^T$.

Για παράδειγμα, $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.

- Ένας πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$ λέγεται **Ερμιτιανός**, αν για κάθε i, j , ισχύει

$$a_{ij} = \bar{a}_{ji}. \text{ Ισοδύναμα ένας πίνακας λέγεται Ερμιτιανός αν και μόνο αν } A = A^*.$$

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 4 & 2-i & -4i \\ 2+i & -1 & 2 \\ 4i & 2 & 7 \end{pmatrix}$ είναι Ερμιτιανός.

Ορισμός 1.6

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ Ερμιτιανός πίνακας. Αν για κάθε μη μηδενικό $x \in \mathbb{C}^n$ ισχύει

$$x^* Ax > 0,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **θετικά ορισμένος πίνακας** (positive definite matrix), ενώ όταν ισχύει $x^* Ax \geq 0$ ονομάζεται **θετικά ημιορισμένος πίνακας** (positive semidefinite matrix) ή **μη-αρνητικά ορισμένος πίνακας** (nonnegative definite matrix).

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος, ενώ ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 3 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ είναι θετικά ημιορισμένος ή μη-αρνητικά ορισμένος.}$$

Ορισμός 1.7

Αν για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ ισχύει

$$A^* A = AA^* = I_n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**, ενώ αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και ισχύει

$$A^T A = AA^T = I_n,$$

ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος**.

Ορισμός 1.8

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ με $0 \leq a_{ij} \leq 1$. Αν το άθροισμα κάθε γραμμής είναι ίσο με 1, ο πίνακας ονομάζεται **στοχαστικός κατά γραμμή** (row stochastic) ή **δεξιά στοχαστικός** (right stochastic). Αν το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσο με 1, ο πίνακας ονομάζεται **στοχαστικός κατά στήλη** (column stochastic) ή **αριστερά στοχαστικός** (left stochastic). Τέλος, αν το άθροισμα κάθε γραμμής, αλλά και το άθροισμα κάθε στήλης είναι ίσα με 1, ο πίνακας ονομάζεται **διπλά στοχαστικός** (double stochastic).

Για παράδειγμα, ο $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.5 & 0.25 & 0.25 \end{pmatrix}$ είναι κατά γραμμή στοχαστικός, ο πίνακας

A^T είναι στοχαστικός κατά στήλη, ενώ $B = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ είναι διπλά στοχαστικός.

Ορισμός 1.9

Ένας τετραγωνικός πίνακας $P \in M_n(\mathbb{R})$ λέγεται **πίνακας μετάθεσης** (permutation matrix), αν τα στοιχεία του είναι 0 ή 1, έτσι ώστε σε κάθε γραμμή και στήλη να υπάρχει ένα μόνο 1.

Για παράδειγμα, ο πίνακας $P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ορισμός 1.10

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$. Αν υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in M_n(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$$

όπου $A_1 \in M_r(\mathbb{F})$, $1 \leq r \leq n-1$, $A_4 \in M_{n-r}(\mathbb{F})$, τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αναγώγιμος** (reducible).

Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας A ονομάζεται **μη-αναγώγιμος** (irreducible), δηλαδή, υπάρχει πίνακας μετάθεσης $P \in M_n(\mathbb{R})$ έτσι ώστε

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, \text{ με } A_i \neq 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, 3, 4.$$

Σχόλια: Σύμφωνα με τον Ορισμό 1.10, ένας μη-αναγώγιμος πίνακας δε συμπεριλαμβάνει μηδενικές γραμμές ή στήλες, γιατί αν περιείχε τουλάχιστον μία τέτοια γραμμή (στήλη), τότε θα ήταν αναγώγιμος, μια και θα υπήρχε κατάλληλος πίνακας μετάθεσης P , ώστε να εναλλάξει τη μηδενική γραμμή και να τη «μεταφέρει» στο «κάτω» μέρος του πίνακα, άρα ο σύνθετος πίνακας $P^T A P$ θα είχε ως block πίνακα-γραμμή το μηδενικό, δηλαδή $A_3 = 0$.

Επίσης ο έλεγχος της αναγωγιμότητας ή μη ενός τετραγωνικού πίνακα δεν είναι επίπονος, καθώς δεν απαιτεί τον εντοπισμό κάποιου πίνακα μετάθεσης P , που να επαληθεύει τον παραπάνω ορισμό. Στο βιβλίο των R.Horn και C. Johnson² [βλέπε, Theorem 6.2.23] αποδεικνύεται μία χρήσιμη πρόταση, στην οποία παρουσιάζεται ικανή και αναγκαία συνθήκη για τον παραπάνω χαρακτηρισμό. Συγκεκριμένα, αποδεικνύεται.

Πρόταση 1.1

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μη-αναγώγιμος (irreducible), αν και μόνο αν ισχύει

$$(I + |A|)^{n-1} > 0.$$

² R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005.

1.1.2 Διάταξη πινάκων

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ πίνακες ίδιου τύπου. Οι πίνακες λέμε ότι είναι **ίσοι** και σημειώνουμε $A = B$ αν ισχύει

$$a_{ij} = b_{ij},$$

για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Ορισμός 1.11

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Οι πίνακες λέμε ότι έχουν **διάταξη** και σημειώνουμε

i) $A > B$, αν $A - B$ είναι θετικός πίνακας, δηλαδή αν ισχύει

$$a_{ij} - b_{ij} > 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

ii) $A \geq B$, αν $A - B$ είναι μη-αρνητικός πίνακας, δηλαδή αν ισχύει

$$a_{ij} - b_{ij} \geq 0, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

Σχόλια: i) Ανάλογα ισχύουν για τη διάταξη $A < B$ και $A \leq B$.

ii) Στις παραπάνω σχέσεις του Ορισμού 1.11, αν B είναι ο μηδενικός πίνακας, τότε από την (i) προκύπτει $A > 0$, άρα A είναι θετικός πίνακας και από τη (ii) έχουμε $A \geq 0$, δηλαδή A είναι μη-αρνητικός, (βλέπε, Ορισμός 1.2).

Παράδειγμα 1.1

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Είναι φανερό από τον Ορισμό 1.2 ότι,

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow A > 0 \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow B \geq 0.$$

Επίσης ισχύουν:

$$A - B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} > 0, \text{ άρα } A - B > 0 \Rightarrow A > B, \text{ (Ορισμός 1.11-(i)).}$$

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \geq 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha } A - C \geq 0 \Rightarrow A \geq C, \text{ (Ορισμός 1.11-(ii)).}$$

Προφανώς αν πάρουμε τον αντίθετο πίνακα του $A - C$ θα προκύψει η αντίστροφη διάταξη, δηλαδή:

$$C - A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} < 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha } C - A < 0 \Rightarrow C < A, \text{ (Σχόλια (i) -}$$

Ορισμού 1.11).

$$D - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \leq 0, \text{ \acute{a}\rho\alpha } D - B \leq 0 \Rightarrow D \leq B, \text{ (Σχόλια (i) -}$$

Ορισμού 1.11).

◇

1.1.3 Πράξεις πινάκων

Όπως και στους αριθμούς, έτσι και στους πίνακες υπάρχουν κάποιες βασικές πράξεις που μπορούν να εφαρμοστούν. Αυτές οι πράξεις είναι το άθροισμα πινάκων, ο πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό και ο πολλαπλασιασμός πινάκων.

Ορισμός 1.12

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Ως **άθροισμα** $A + B$ των πινάκων A και B ορίζεται ο πίνακας

$$A + B = (\gamma_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F}),$$

ο οποίος είναι επίσης του ίδιου τύπου με τους αρχικούς πίνακες και έχει ως στοιχεία τα αθροίσματα των ομολόγων στοιχείων των A και B , δηλαδή

$$A + B = (\gamma_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Ορισμός 1.13

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Το γινόμενο kA του k επί τον A είναι πίνακας ίδιου τύπου με τον αρχικό πίνακα A , του οποίου τα στοιχεία προκύπτουν από τα αντίστοιχα του A με πολλαπλασιασμό τους επί k . Δηλαδή, προκύπτει ο πίνακας $kA = (ka_{ij})$. Ο πολλαπλασιασμός αυτός ονομάζεται **βαθμωτός πολλαπλασιασμός** ή **πολλαπλασιασμός πίνακα επί αριθμό**.

Σχόλια: Ειδικά όταν $k = -1$, ο πίνακας $(-1)A$ συμβολίζεται $-A$ και ονομάζεται **αντίθετος** του A . Ως διαφορά δύο πινάκων θεωρείται ο πίνακας $A - B$ και είναι αποτέλεσμα των πράξεων $A + (-1)B$.

Ορισμός 1.14

Έστω $A = (a_{ij}) \in M_{f \times m}(\mathbb{F})$ και $B = (b_{st}) \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε το **γινόμενο**, AB , των πινάκων A και B , είναι ο πίνακας

$$AB = (\gamma_{it}) \in M_{f \times n}(\mathbb{F}),$$

όπου στη θέση (i,t) υπάρχει το στοιχείο

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kt} = a_{i1} b_{1t} + a_{i2} b_{2t} + \dots + a_{im} b_{mt}.$$

=====

Σχόλια : i) Να σημειωθεί ότι το γινόμενο ορίζεται μόνο όταν ο αριθμός των στηλών του πίνακα A είναι ίσος με τον αριθμό των γραμμών του B και ότι το μέγεθος του AB είναι $f \times n$. Έτσι για παράδειγμα, αν A είναι 2×3 και B είναι 3×3 , το γινόμενο AB ορίζεται και ο πίνακας AB είναι τύπου 2×3 , ενώ το γινόμενο BA **δεν** ορίζεται.

ii) Επίσης, για δύο τετραγωνικούς πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, για τους οποίους ορίζονται τα γινόμενα AB και BA , **δεν** ισχύει πάντα $AB = BA$.

Για παράδειγμα, έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Επειδή, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$,

είναι προφανές ότι $AB \neq BA$.

Στην περίπτωση που ισχύει $AB = BA$ οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζονται **αντιμεταθετικοί**.

iii) Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ορίζεται η k - **δύναμη** του A ως

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k\text{-φορές}}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{και} \quad A^0 = I_n.$$

Ορισμός 1.15

Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, αν υπάρχει ένας άλλος πίνακας $B \in M_n(\mathbb{F})$, για τους οποίους ισχύουν οι ισότητες

$$AB = BA = I_n,$$

τότε ο πίνακας A ονομάζεται **αντιστρέψιμος**, ο δε B **αντίστροφος** του A και συμβολίζεται με A^{-1} .

1.1.4 Ιδιότητες άλγεβρας πινάκων

Από τις πράξεις των πινάκων προέκυψαν κάποιες πολύ σημαντικές ιδιότητες που είναι αρκετά χρήσιμες στη μελέτη προβλημάτων που σχετίζονται με πίνακες.

Από τους ορισμούς της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού πινάκων (Ορισμός 1.13 και 1.14), προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες, όταν $A, B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k_1, k_2 \in \mathbb{F}$.

- 1) $A + B = B + A$
- 2) $(A + B) + \Gamma = A + (B + \Gamma)$
- 3) $A + 0_{m \times n} = A$
- 4) $A - A = 0_{m \times n}$
- 5) $k_1(A + B) = k_1A + k_1B$
- 6) $(k_1 + k_2)A = k_1A + k_2A$
- 7) $(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
- 8) $1A = A$ και $0A = 0_{m \times n}$

Αν συνυπολογίσουμε και τον ορισμό του **ανάστροφου** και του **αναστροφοσυζυγούς** πίνακα (Ορισμός 1.1) καταλήγουμε στις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Για κάθε πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, έχουμε $A = (A^T)^T$ και $A = (A^*)^*$.
- 2) Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A + B)^T = A^T + B^T$ και $(A + B)^* = A^* + B^*$.
- 3) Έστω $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ και $k \in \mathbb{F}$. Τότε $(kA)^T = kA^T$ και $(kA)^* = \bar{k}A^*$.
- 4) Έστω $A \in M_{f \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)^T = B^T A^T$ και $(AB)^* = B^* A^*$.
- 5) Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός.

Από την πρόσθεση πινάκων, το βαθμωτό πολλαπλασιασμό (πολλαπλασιασμό πίνακα επί αριθμό) και το γινόμενο πινάκων (Ορισμοί 1.12, 1.13, 1.14, αντίστοιχα) προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

1) Έστω $A \in M_{k \times l}(\mathbb{F})$, $B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(AB)\Gamma = A(B\Gamma)$.

(προσεταιριστική ιδιότητα)

2) Έστω $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B, \Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $A(B + \Gamma) = AB + A\Gamma$.

(αριστερά επιμεριστική ιδιότητα)

3) Έστω $A, B \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $\Gamma \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $(A + B)\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$.

(δεξιά επιμεριστική ιδιότητα)

4) Έστω $k \in \mathbb{F}$, $A \in M_{l \times m}(\mathbb{F})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

5) Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι άνω (κάτω) τριγωνικοί πίνακες.

Το γινόμενο $AB \in M_n(\mathbb{F})$ είναι άνω (κάτω) τριγωνικός πίνακας.

Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγώνιοι, τότε $AB \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγώνιος πίνακας.

Χρησιμοποιώντας τους [Ορισμούς 1.2](#) και 1.3, όπου ορίστηκαν ο μη-αρνητικός και η απόλυτη τιμή πίνακα καθώς και τους Ορισμούς 1.13 και 1.14, τις ιδιότητες των πραγματικών, μιγαδικών αριθμών και τον Ορισμό 1.12 της διάταξης πινάκων, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ιδιότητες που αναφέρονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.2

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες $A, B, C, D \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

i) $|A| \geq 0$ για κάθε A . Ισχύει $|A| = 0$ αν και μόνο αν $A = 0$.

ii) $|aA| = |a||A|$, για κάθε $a \in \mathbb{C}$.

iii) $|A + B| \leq |A| + |B|$, (τριγωνική ανισότητα).

iv) Αν $A \geq 0$, $B \geq 0$ και $a, b \geq 0$, τότε $aA + bB \geq 0$.

v) Αν $A \geq B$ και $C \geq D$, τότε $A + C \geq B + D$.

vi) Αν $A \geq B$ και $B \geq C$, τότε $A \geq C$.

Χρησιμοποιώντας τους Ορισμούς 1.3, 1.12 και 1.15, όπου ορίστηκαν η απόλυτη τιμή πίνακα, η διάταξη και το γινόμενο πινάκων, μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ιδιότητες που αναφέρονται στην επόμενη πρόταση και σχετίζονται με ιδιότητες μη-αρνητικών πινάκων.

Πρόταση 1.3

Έστω οι πίνακες $A, B, C, D \in M_n(\mathbb{F})$ και τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{C}^n$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) $|Ax| \leq |A||x|$.
- ii) $|AB| \leq |A||B|$.
- iii) $|A^k| \leq |A|^k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- iv) Αν $0 \leq A \leq B$ και $0 \leq C \leq D$, τότε $0 \leq AC \leq BD$.
- v) Αν $0 \leq A \leq B$, τότε $0 \leq A^k \leq B^k$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- vi) Αν $A \geq 0$, τότε $A^k \geq 0$. Ιδιαίτερα, αν $A > 0$, τότε $A^k > 0$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.
- vii) Αν $A > 0$, $x \geq 0$ με $x \neq 0$, τότε $Ax > 0$.
- viii) Αν $A \geq 0$, $x > 0$ και $Ax = 0$, τότε $A = 0$.

1.2 Χαρακτηριστικά μεγέθη ενός τετραγωνικού πίνακα

1.2.1 Ορίζουσες

Ορισμός 1.16

Ορίζουσα (determine)³ ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια απεικόνιση

$$\det : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F} : A \rightarrow \det A$$

για την οποία ισχύει

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

για κάθε $j=1,2,\dots,n$, όπου A_{ij} είναι ο $(n-1) \times (n-1)$ πίνακας, ο οποίος προκύπτει από τον πίνακα A , αν διαγράψουμε τα στοιχεία της i -γραμμής και της j -στήλης.

Η ορίζουσα του $A \in M_n(\mathbb{F})$ συμβολίζεται με $|A|$, ειδικά όταν ξέρουμε τα

στοιχεία του πίνακα A , γράφουμε $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, $\det(A)$ ή $\det A$.

Το κριτήριο που μας υποδεικνύει ποια είναι η κατάλληλη στήλη για την ανάπτυξη, είναι η επιλογή της στήλης για την οποία έχουμε λιγότερες ελάχισσες ορίζουσες για υπολογισμό. Έτσι, η στήλη που θα επιλέξουμε θα είναι αυτή που έχει τα περισσότερα μηδενικά στοιχεία, εφόσον υπάρχουν.

Παράδειγμα 1.2

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Ο υπολογισμός της ορίζουσάς του, $\det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, θα είναι συντομότερος, αν γίνει

ανάπτυξη ως προς την τρίτη στήλη. Πράγματι,

³ Εντολή στη Matlab: `dA=det(A)` παρουσιάζει την ορίζουσα του πίνακα A .

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} &= (-1)^{1+3}(-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(-2) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -(2 \cdot 4 - 1 \cdot 1) + 0 + (-2)[(-1) \cdot 1 - 2 \cdot 2] = 3 \quad \diamond \end{aligned}$$

Οι σημαντικότερες **ιδιότητες** των οριζουσών είναι οι ακόλουθες:

- 1) Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι ιδιότητες που αναφέρονται στις γραμμές της ορίζουσάς του, ισχύουν και για της στήλες του πίνακα.
- 2) Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $\det A \neq 0$ αν και μόνο αν $\text{rank}(A) = n$, όπου $\text{rank}(A)$ σημειώνει το βαθμό του πίνακα A .
- 3) Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει μηδενική γραμμή, τότε $\det A = 0$.
- 4) Αν ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ έχει δύο γραμμές ανάλογες, τότε $\det A = 0$.
- 5) Για κάθε άνω (κάτω) τριγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$, όπου a_{ii} , $i = 1, 2, \dots, n$ είναι τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.
- 6) Η ορίζουσα διαγώνιου πίνακα ισούται με το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων του. Η ορίζουσα του μοναδιαίου πίνακα ισούται με 1.
- 7) Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^T) = \det A$, $\det(\bar{A}) = \overline{\det A}$ και $\det(A^*) = \overline{\det A}$.
- 8) Αν $A, B \in M_n(\mathbb{F})$, τότε $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
- 9) Για κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $\det(A^k) = (\det A)^k$.
- 10) Για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda \in \mathbb{F}$ ισχύει $\det(\lambda A) = \lambda^n (\det A)$.

1.2.2 Χαρακτηριστικά ποσά

Ορισμός 1.17

Έστω ο τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ και ένα διάνυσμα $x \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$Ax = \lambda x, \text{ με } x \neq 0 \quad (1.1)$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F}$. Η τιμή του λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** (eigenvalue)⁴ του πίνακα A και το x ονομάζεται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του A , αντίστοιχο της ιδιοτιμής λ .

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα A συμβολίζεται $\sigma(A)$ και ονομάζεται **φάσμα** (spectrum) του πίνακα.

Από όλες τις ιδιοτιμές του πίνακα, αυτή που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή ονομάζεται **φασματική ακτίνα** (spectral radius) και συμβολίζεται με $\rho(A)$, δηλαδή

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}. \quad (1.2)$$

Οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ονομάζονται **χαρακτηριστικά ποσά** ή **ιδιοποσά** του πίνακα A .

Η ισότητα (1.1) γράφεται ισοδύναμα

$$Ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (A - \lambda I)x = 0.$$

Αν γνωρίζουμε την ιδιοτιμή λ είναι εύκολο να υπολογίσουμε το αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα λύνοντας το γραμμικό σύστημα, που προκύπτει από την εξίσωση

$$(A - \lambda I)x = 0, \text{ για } x \neq 0.$$

Παράδειγμα 1.3

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ και έστω ότι θέλουμε να βρούμε τις ιδιοτιμές λ καθώς

και τα ιδιοδιανύσματα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ για κάθε ιδιοτιμή λ . Από την (1.1) έχουμε

⁴Εντολή στη Matlab: $eA = \text{eig}(A)$ παρουσιάζει σε έναν πίνακα στήλη τις ιδιοτιμές του πίνακα A .

$[xA, eA] = \text{eig}(A)$ παρουσιάζει στον πίνακα xA τα ιδιοδιανύσματα του A και στο διαγώνιο πίνακα eA τις ιδιοτιμές του A ως τα διαγώνια στοιχεία του.

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - \lambda x_2 = 0 \end{cases}$$

Επειδή η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$$

ο πίνακας $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, (ιδιότητα οριζουσών (2),

παράγραφο 1.2.1), οπότε το σύστημα έχει μόνο τη μηδενική λύση, άρα

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα όμως με το (1.1) ως ιδιοδιανύσματα θεωρούνται τα μη μηδενικά διανύσματα. Άρα ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμές ή ιδιοδιανύσματα στο \mathbb{R} . Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών (\mathbb{C}) το παραπάνω σύστημα έχει λύση αν και μόνο αν

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm i.$$

Συνεπώς ο πίνακας A έχει δύο ιδιοτιμές: $\lambda_1 = i$ και $\lambda_2 = -i$.

➤ Για $\lambda_1 = i$, το παραπάνω σύστημα είναι

$$\begin{cases} -ix_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 - ix_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = ix_1 \\ x_1 \in \mathbb{C} \end{cases},$$

από όπου συμπεράνουμε ότι υπάρχουν αντίστοιχα μιγαδικά ιδιοδιανύσματα τα οποία

είναι $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ix_1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$.

➤ Αντίστοιχα στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -i$ αντιστοιχούν τα ιδιοδιανύσματα $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ -ix_1 \end{pmatrix}$,

$x_1 \in \mathbb{C} - \{0\}$. ◇

Από το παραπάνω παραδείγματα γίνεται φανερό ότι, για να υπολογίσουμε όλες τις ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ ενός τετραγωνικού πίνακα A , πρέπει να ισχύει η διανυσματική εξίσωση στην (1.1) η οποία οδηγεί σε ένα γραμμικό σύστημα, το οποίο έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

και αναλυτικότερα

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \quad (1.3)$$

Δηλαδή, όλες οι ιδιοτιμές $\lambda \in \mathbb{F}$ του πίνακα A πρέπει να ικανοποιούν την εξίσωση (1.3), η οποία ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση** του τετραγωνικού πίνακα A .

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα στο αριστερό μέρος της χαρακτηριστικής εξίσωσης (1.3) καταλήγουμε σε ένα πολυώνυμο n -οστού βαθμού, το οποίο γράφεται

$$\chi_A(\lambda) = (-1)^n \det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0, \quad (1.4)$$

και ονομάζεται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**⁵ του A με συντελεστές $b_j \in \mathbb{F}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο μπορεί να αναλυθεί πάντοτε σε πρωτοβάθμιους παράγοντες στο \mathbb{C} και να γραφεί στη μορφή

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{v_k},$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, είναι οι διακεκριμένες ρίζες του $\chi_A(\lambda)$ στο \mathbb{C} και v_1, v_2, \dots, v_k , η πολλαπλότητα κάθε ρίζας, η οποία ονομάζεται **αλγεβρική πολλαπλότητα**.

Είναι φανερό ότι, για έναν πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύει $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$.

Αν για κάποιο k ισχύει $v_k = 1$, η ιδιοτιμή χαρακτηρίζεται **απλή**, διαφορετικά ονομάζεται πολλαπλή.

Αντικαθιστώντας κάθε μια διακεκριμένη ιδιοτιμή, $\lambda = \lambda_i$, στο σύστημα (1.1) παίρνουμε ως γενική λύση του ομογενούς συστήματος ένα σύνολο διανυσμάτων που το συμβολίζουμε με $V(\lambda_i)$.

Το σύνολο

$$V(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F}) : (A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

ονομάζεται **ιδιόχωρος**⁶, που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i και είναι ένας μη κενό υποσύνολο του $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$.

⁵ Εντολή στη Matlab: `poly(A)` παρουσιάζει τους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του πίνακα A .

Τα μη μηδενικά στοιχεία του $V(\lambda_i)$ είναι τα ιδιοδιανύσματα, τα οποία αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i , και η διάσταση του υποχώρου $V(\lambda_i)$ είναι

$$\dim V(\lambda_i) = n - \text{rank}(A - \lambda_i I).$$

Ο αριθμός $\dim V(\lambda_i)$ ονομάζεται **γεωμετρική πολλαπλότητα** της ιδιοτιμής λ_i και φανερώνει το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i . Επίσης μια σημαντική ιδιότητα που αφορά την αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ότι η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι πάντα μεγαλύτερη ή ίση της μονάδας και ταυτόχρονα είναι μικρότερη ή ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα. Δηλαδή,

$$1 \leq \text{γεωμετρική πολλαπλότητα} \leq \text{αλγεβρική πολλαπλότητα}.$$

Για τα **χαρακτηριστικά ποσά** ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ οι βασικότερες **ιδιότητες** διατυπώνονται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές⁷ του.

- 1) Οι ιδιοτιμές ενός άνω (κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- 2) Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου πίνακα είναι τα διαγώνια στοιχεία του.
- 3) i) $\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = (-1)^n b_0$, όπου b_0 είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στην (1.4).

Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν δεν έχει το μηδέν ως ιδιοτιμή, αν και μόνο αν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού πολυωνύμου του A είναι διάφορος του μηδενός.

ii) $\text{tr}A = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$, δηλαδή το άθροισμα όλων των ιδιοτιμών του A ισούται με το ίχνος του, σημειώνεται $\text{tr}A$ το άθροισμα όλων των διαγώνιων στοιχείων του A .

⁶ Ο ιδιόχωρος είναι ο χώρος λύσεων του γραμμικού συστήματος $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ για μία γνωστή τιμή λ_i .

⁷ Οι ιδιοτιμές δεν είναι απαραίτητα διακεκριμένες, δηλαδή δεν είναι όλες διαφορετικές.

- =====
- 4) Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{F})$, ισχύει $\sigma(A) = \sigma(A^T)$.
 - 5) Ο πίνακας $I + A$ έχει ιδιοτιμές $1 + \lambda_1, 1 + \lambda_2, \dots, 1 + \lambda_n$.
 - 6) Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ με $A \geq 0$, τότε $\rho(I + A) = 1 + \rho(A)$, [βλέπε, Lemma 8.4.2]⁸.
 - 7) Αν λ, \mathbf{x} είναι χαρακτηριστικά ποσά του $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε για τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^k ισχύει $A^k \mathbf{x} = \lambda^k \mathbf{x}$, όπου $k \in \mathbb{N}$.
 - 8) Αν λ, \mathbf{x} είναι τα χαρακτηριστικά ποσά ενός αντιστρέψιμου πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, τότε τα χαρακτηριστικά ποσά του πίνακα A^{-k} είναι λ^{-k} και \mathbf{x} , όπου $k \in \mathbb{N}$.
 - 9) Οι ιδιοτιμές ενός $A \in M_n(\mathbb{F})$ συμμετρικού (Ερμιτιανού) πίνακα είναι πραγματικοί αριθμοί. Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους κάθετα.
 - 10) Αν A είναι θετικά ορισμένος⁹, όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί θετικοί αριθμοί, ενώ αν είναι θετικά ημιορισμένος (μη-αρνητικά ορισμένος), τουλάχιστον μία ιδιοτιμή του είναι ίση με μηδέν και οι υπόλοιπες είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.
 - 11) (Θεώρημα Cayley-Hamilton): Ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ επαληθεύει το χαρακτηριστικό πολυώνυμο όπως στην (1.4), δηλαδή,

$$\chi_A(A) = A^n + b_{n-1}A^{n-1} + \dots + b_1A + b_0I = \mathbb{O}.$$

- 12) Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1} = -\frac{1}{b_0} (A^{n-1} + b_{n-1}A^{n-2} + \dots + b_1I),$$

όπου $\chi_A(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A .

⁸ R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005.

⁹ Βλέπε, στον Ορισμό 1.6

1.3 Νόρμες

1.3.1 Μέτρα (νόρμες) διανυσμάτων

Ορισμός 1.18

Έστω V ένας διανυσματικός χώρος με στοιχεία στον \mathbb{R} . Μία απεικόνιση $\circ: V \times V \rightarrow \mathbb{R}: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \mathbf{u} \circ \mathbf{v}$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** στο V , όταν, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ και $a, b \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\text{i) } (a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) \circ \mathbf{w} = a(\mathbf{u} \circ \mathbf{w}) + b(\mathbf{v} \circ \mathbf{w})$$

$$\text{ii) } \mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \mathbf{u}$$

$$\text{iii) } \mathbf{u} \circ \mathbf{u} \geq 0$$

$$\text{iv) } \mathbf{u} \circ \mathbf{u} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$$

Αν ο διανυσματικός χώρος V , είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο, τότε ονομάζεται **Ευκλείδειος** διανυσματικός χώρος.

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (iii) και (iv) του Ορισμού 1.18 μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο για τα στοιχεία-διανύσματα ενός διανυσματικού χώρου V . Θεωρώντας στη συνέχεια ότι ο διανυσματικός χώρος είναι \mathbb{R}^n (που είναι ισόμορφος με $\mathbb{R}^{1 \times n}$ και $\mathbb{R}^{n \times 1}$), ορίζουμε τη νόρμα του διανύσματος και δίνουμε τα σημαντικότερα μέτρα στον \mathbb{R}^n .

Ορισμός 1.19

Μέτρο (norm) ενός **διανύσματος** $x \in \mathbb{R}^n$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

$$\text{i) } \|\mathbf{x}\| \geq 0$$

$$\text{ii) } \|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\text{iii) } \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|, \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\text{iv) } \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|, \text{ για κάθε } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \text{ (τριγωνική ανισότητα).}$$

Για το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ αποδεικνύεται εύκολα ότι η έκφραση

$$\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$$

ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες του Ορισμού 1.19, οπότε ορίζει ένα μέτρο στον χώρο \mathbb{R}^n .

Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός πιθανών μέτρων για το \mathbf{x} . Τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα των διανυσμάτων είναι¹⁰ :

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\} \quad (\text{norm άπειρο}) \quad (1.10)$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{norm ένα}) \quad (1.11)$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} \quad (\text{norm 2 ή Ευκλείδειο μέτρο}) \quad (1.12)$$

Παράδειγμα 1.4

Έστω το διάνυσμα-γραμμή $x = (1 \ 2 \ -1 \ 3)$.

Σύμφωνα με (1.10)-(1.12) τα αντίστοιχα μέτρα $\|\mathbf{x}\|_\infty$, $\|\mathbf{x}\|_1$, και $\|\mathbf{x}\|_2$ είναι:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|1|, |2|, |-1|, |3|\} = \max\{1, 2, 1, 3\} = 3$$

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |1| + |2| + |-1| + |3| = 7$$

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |2|^2 + |-1|^2 + |3|^2} = \sqrt{1+4+1+9} = \sqrt{15} = 3.8730 \quad \diamond$$

¹⁰ Εντολές στη Matlab για τις αντίστοιχες norm είναι:

Για τη $\|\mathbf{x}\|_\infty$, norm(x,inf)

Για τη $\|\mathbf{x}\|_1$, norm(x,1)

Για τη $\|\mathbf{x}\|_2$, norm(x,2) ή norm(x)

Ορισμός 1.20

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο \circ ονομάζεται **ορθοκανονικό**, αν ισχύουν :

- i) $\|v_i\| = 1$ για κάθε $v_i \in S$, με $i = 1, 2, \dots, n$,
 ii) $v_i \circ v_j = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Στη συνέχεια παρουσιάζεται η μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικοποίησης των γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου, και είναι γνωστή ως «*μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt*».

Αλγόριθμος 1: Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram - Schmidt

Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων ενός διανυσματικού χώρου V , ο οποίος είναι εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο \circ και με μία αντίστοιχη norm $\|\cdot\|$.

Βήμα 1 Θέτουμε

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{v_2 \circ u_1}{\|u_1\|^2} u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{v_3 \circ u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{v_3 \circ u_2}{\|u_2\|^2} u_2 \\ &\vdots \\ u_k &= v_k - \frac{v_k \circ u_1}{\|u_1\|^2} u_1 - \dots - \frac{v_k \circ u_{k-1}}{\|u_{k-1}\|^2} u_{k-1} \end{aligned}$$

Βήμα 2 Ορίζουμε $w_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1, w_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2, \dots, w_k = \frac{1}{\|u_k\|} u_k$

Τα διανύσματα w_1, w_2, \dots, w_k είναι μεταξύ τους κάθετα και έχουν μέτρο ίσο με 1, άρα είναι ορθοκανονικά.

Παράδειγμα 1.5

Θεωρούμε τα διανύσματα $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (0, 3, 4)$ του \mathbb{R}^3 και το Ευκλείδειο (σύννηθες) εσωτερικό γινόμενο. Αν τοποθετήσουμε τα διανύσματα ως

=====

γραμμές (ή ως στήλες) σε έναν πίνακα $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ θα διαπιστώσουμε ότι

$\det A = 6 \neq 0$, συνεπώς τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 1 και χρησιμοποιώντας το Ευκλείδειο μέτρο από την (1.12) έχουμε:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \circ \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2^2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \circ \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|_2^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \circ \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|_2^2} \mathbf{u}_2 = (0, 3, 4) - \frac{4}{2}(1, 0, 1) - \frac{-4}{2}(1, 0, -1) = (0, 3, 0).$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ είναι, αντίστοιχα, $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$.

Διαιρώντας τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ με τα αντίστοιχα μέτρα, βρίσκουμε ένα σύνολο ορθοκανονικών διανυσμάτων

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), (0, 1, 0) \right\}. \quad \diamond$$

Περισσότερα παραδείγματα με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 8, (βλέπε, αρχείο Chapter8), όπου απαιτείται η εύρεση ενός ορθογωνίου (ή ορθομοναδιαίου) πίνακα κατά την τριγωνοποίηση του πίνακα A ή τη διαγωνοποίηση συμμετρικών (Ερμιτιανών) πινάκων.

1.3.2 Νόρμες πινάκων

Ορισμός 1.21

Νόρμα ενός τετραγωνικού **πίνακα** $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι μια πραγματική απεικόνιση

$$\|\cdot\| : M_n(\mathbb{F}) \rightarrow [0, +\infty)$$

με τις εξής ιδιότητες:

i) $\|A\| \geq 0$

ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

iii) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{F}$

iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

v) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{F})$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Κάθε μία από τις νόρμες διανυσμάτων (1.10), (1.11) και (1.12) παράγει μια αντίστοιχη νόρμα για τον πίνακα A , που είναι¹¹:

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{ή} \quad \|A\|_{\Gamma} \quad (\text{νόρμα γραμμής}) \quad (1.13)$$

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right\} \quad \text{ή} \quad \|A\|_{\Sigma} \quad (\text{νόρμα στήλης}) \quad (1.14)$$

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^* A)} \quad (\text{Frobenius νόρμα}) \quad (1.15)$$

όπου $\text{tr}(A^* A)$ σημειώνει το ίχνος του συμμετρικού πίνακα $A^* A$.

Επίσης ορίζεται η φασματική νόρμα ή νόρμα-2 του πίνακα A , η οποία είναι

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}, \quad (1.16)$$

¹¹ Εντολές στη Matlab για τις αντίστοιχες norm πίνακα είναι:

Για τη $\|A\|_{\infty}$, `norm(A,inf)`

Για τη $\|A\|_1$, `norm(A,1)`

Για τη $\|A\|_F$, `norm(A,'fro')`

Για τη $\|A\|_2$, `norm(A,2)` ή `norm(A)`

όπου $\rho(A^T A)$ είναι η φασματική ακτίνα του συμμετρικού πίνακα $A^T A$ (βλέπε τον ορισμό της φασματικής ακτίνας στην (1.3)). Η φασματική νόρμα δεν προκύπτει από κάποια νόρμα διανύσματος.

Παράδειγμα 1.6

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, για τον οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τις

παραγόμενες νόρμες $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ και $\|A\|_F$.

➤ Σύμφωνα με τον τύπο (1.13), ο υπολογισμός της $\|A\|_\infty$ γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{c_i\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} \\ &= \max\{|a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}|\} \\ &= \max\{|1+1+2|, |0+2+0|, |1+2+1|\} = \max\{4, 2, 4\} = 4 \end{aligned}$$

όπου $c_i = \sum_{j=1}^3 |a_{ij}|$, με $i=1, 2, 3$.

➤ Σύμφωνα με τον τύπο (1.14), ο υπολογισμός της $\|A\|_1$ γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{b_j\} = \max\{b_1, b_2, b_3\} = \\ &= \max\{|a_{11} + a_{21} + a_{31}|, |a_{12} + a_{22} + a_{32}|, |a_{13} + a_{23} + a_{33}|\} = \\ &= \max\{|1+0+1|, |1+2+2|, |2+0+1|\} = \max\{2, 5, 3\} = 5 \end{aligned}$$

όπου $b_j = \sum_{i=1}^3 |a_{ij}|$, με $j=1, 2, 3$.

➤ Για τον υπολογισμό του $\|A\|_F$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.15) έχουμε:

$$\|A\|_F = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2 + 0^2 + 2^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{16} = 4$$

➤ Τέλος για τον υπολογισμό της $\|A\|_2$, σύμφωνα με τον (1.16) θα χρησιμοποιήσουμε τη μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $A^T A$.

Από τον ανάστροφο πίνακα $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ προκύπτει

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Το σύνολο των ιδιοτιμών του πίνακα $A^T A$ είναι

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 0.1073, \lambda_2 = 2.8621, \lambda_3 = 13.0306\}.$$

Επομένως ισχύει

$$\rho(A^T A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{0.1073, 2.8621, 13.0306\} = 13.0306.$$

Άρα σύμφωνα με τον τύπο (1.16) έχουμε:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)} = \sqrt{13.0306} = 3.6098. \quad \diamond$$

1.3.3 Ιδιότητες νορμών

Κλείνουμε την ενότητα δίνοντας στη συνέχεια τις σημαντικότερες ιδιότητες για τη νόρμα πίνακα.

Για κάθε πίνακα $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- 1) $\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1} \{y^* Ax\}.$
- 2) $\|A\|_2 = \|A^*\|_2 = \|A^T\|_2.$
- 3) $\|A\|_2^2 = \|A^* A\|_2.$
- 4) Αν U, V δύο ορθομοναδιαίοι πίνακες, τότε $\|A\|_2 = \|U^* AV\|_2.$
- 5) $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty.$
- 6) $\rho(A) = \sqrt[k]{\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|}$
- 7) $\rho(A) \leq \|A\|$, για κάθε νόρμα πίνακα.
- 8) $\rho(A) = \|A\|_2$, αν ο A είναι συμμετρικός.
- 9) Αν $|A| \leq |B|$, τότε $\|A\|_2 \leq \|B\|_2.$
- 10) $\|A\|_2 = \||A|\|_2.$
- 11) Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ στοχαστικός¹² πίνακας με $a_{ij} \geq 0$. Τότε $\rho(A) = 1$.

¹² Βλέπε, στον Ορισμό 1.8.

1.4 Παραγοντοποίηση τετραγωνικού πίνακα

1.4.1 Τα σημαντικότερα θεωρήματα παραγοντοποίησης

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα x_1, x_2, \dots, x_n . Τα σημαντικότερα θεωρήματα, που αναδεικνύουν τη χρησιμότητα των χαρακτηριστικών μεγεθών στη μελέτη των προβλημάτων διατυπώνονται στη συνέχεια. Τα θεωρήματα αφορούν την **παραγοντοποίηση** οποιουδήποτε τετραγωνικού πίνακα με παράγοντα έναν πίνακα :

- σε «τριγωνική μορφή» (θεώρημα Schur),
- σε «διαγώνια μορφή» (θεώρημα διαγωνοποίησης) ή «σχεδόν διαγώνια μορφή» (θεώρημα κανονικής μορφής Jordan), και
- την παραγοντοποίηση των συμμετρικών (Ερμιτιανών) πινάκων σε «διαγώνια μορφή» (φασματικό θεώρημα).

Θεώρημα 1.1 (Schur)

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει ορθομοναδιαίος¹³ πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$ και άνω τριγωνικός πίνακας $T \in M_n(\mathbb{F})$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = UTU^* = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & * \\ & \lambda_2 & * & * \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \quad (1.17)$$

Ορισμός 1.22

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **διαγωνοποιήσιμος** στο \mathbb{F} αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος, δηλαδή,

$$\Delta = P^{-1}AP,$$

¹³ Βλέπε, Ορισμό 1.7.

όπου $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ ένας διαγώνιος πίνακας. Ο πίνακας $P \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **πίνακας ομοιότητας**.

Αν ισχύει ο Ορισμός 1.22, τότε λέμε ότι εφαρμόζεται μια διαγωνοποίηση στον A και γράφουμε

$$A = P\Delta P^{-1}.$$

Θεώρημα 1.2 (θεώρημα διαγωνοποίησης πίνακα)

Ένας πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ με n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα είναι διαγωνοποιήσιμος¹⁴,

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad (1.18)$$

όπου Δ ένας διαγώνιος πίνακας με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του A , δηλαδή,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

και P ο τετραγωνικός πίνακας με στήλες τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του A , δηλαδή,

$$P = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n).$$

Η απόδειξη¹⁵ του θεωρήματος 1.2 στηρίζεται στην κατασκευή ενός πίνακα P με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A και ενός διαγώνιου πίνακα $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ με στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές (εδώ λαμβάνεται υπόψη η αλγεβρική πολλαπλότητα). Αυτή είναι και η βασική ιδέα του επόμενου αλγορίθμου τον οποίο εφαρμόζουμε όταν χρειάζεται να υπολογίσουμε μια διαγωνοποίηση του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$.

¹⁴ Βλέπε, στον Ορισμό 1.22.

¹⁵ Γ. Δονάτος και Μ. Αδάμ, *Γραμμική Άλγεβρα. Θεωρία και εφαρμογές*. Εκδόσεις Gutenberg, Αθήνα, 2008.

Αλγόριθμος 2: Διαγωνοποίησης του $A \in M_n(\mathbb{F})$

1. Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A , οπότε οι ρίζες του είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A .
2. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , υπολογίζουμε μία βάση του αντίστοιχου ιδιοχώρου, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
3. Θεωρούμε το σύνολο $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r\}$, το οποίο συγκεντρώνει όλα τα στοιχεία των βάσεων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2.
 - Αν $r \neq n$, τότε ο A δε διαγωνοποιείται.
 - Αν $r = n$, τότε ο A διαγωνοποιείται. Ορίζοντας P να είναι ο πίνακας με στήλες τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, έχουμε

$$\Delta = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

όπου λ_i είναι η ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το \mathbf{x}_i , $1 \leq i \leq n$.

Παράδειγμα 1.7

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ είναι διαγωνοποιήσιμος.

Υπολογίζουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 3 & \lambda - 5 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6,$$

από όπου προκύπτουν οι ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$. Για κάθε μία από τις ιδιοτιμές προσδιορίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο, λύνοντας το σύστημα $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $i = 1, 2$.

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2$, έχουμε το σύστημα

$$(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από το οποίο προκύπτει

$$\left. \begin{matrix} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 3x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_2 = x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Οι μη μηδενικές λύσεις του ιδιοχώρου $V(2)$ είναι ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = 2$, για $x_1 = 1$ επιλέγουμε ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_1 = (1 \ 1)^T$.

• Για $\lambda_2 = 3$, έχουμε

$$(A - 3I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

από όπου προκύπτει

$$\left. \begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} x_2 = \frac{3}{2}x_1 \\ x_1 \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \frac{3}{2}x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ και για $x_1 = 2$, επιλέγουμε αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_2 = (2 \ 3)^T$.

Ο P κατασκευάζεται με στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα, οπότε θέτοντας

$$P = (\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ υπολογίζουμε } \det P = 1 \neq 0^{16} \text{ και } P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Άρα, επαληθεύονται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.2, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, με τη διαγώνια μορφή $A = P\Delta P^{-1}$, όπως στην (1.18).

Κάνοντας πράξεις εύκολα επαληθεύουμε την ισότητα

$$P^{-1}AP = \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Για περισσότερα παραδείγματα εφαρμογής του Αλγορίθμου 2 παραπέμπουμε στα παραδείγματα του **Κεφαλαίου 8, (βλέπε, αρχείο Chapter8).**

¹⁶ Η ορίζουσα του πίνακα P ότι είναι **διάφορη του μηδενός** σημαίνει ότι τα διανύσματα-στήλες του πίνακα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

=====

Σχόλια: i) Στο προηγούμενο παράδειγμα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A ήταν διακεκριμένες, όσες και το μέγεθός του και αποδείξαμε ότι ο πίνακας διαγωνοποιήθηκε. Αυτό δεν είναι τυχαίο, συμβαίνει πάντα στην περίπτωση των διακεκριμένων ιδιοτιμών, διότι ο πίνακας P , που κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα, είναι πάντοτε αντιστρέψιμος μια και έχει στήλες γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Επομένως στην ειδική περίπτωση όπου όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι διακεκριμένες μπορούμε να αποφανθούμε άμεσα για τη διαγωνοποίηση του πίνακα **χωρίς να αναζητήσουμε** τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα, (βλέπε, Πρόταση 1.5 (i)).

ii) Σε περίπτωση όπου οι ιδιοτιμές έχουν **αλγεβρική πολλαπλότητα** μεγαλύτερη από 1, **δεν** υπάρχει αντίστοιχη πρόταση ανεξαρτησίας των ιδιοδιανυσμάτων, που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ιδιοτιμή, γεγονός που δεν εγγυάται την ύπαρξη τετραγωνικού και αντιστρέψιμου πίνακα P που να διαγωνοποιεί τον A . Στην περίπτωση της πολλαπλότητας κάποιας ιδιοτιμής¹⁷, **αφού υπολογίσουμε όλα τα ιδιοδιανύσματα** του πίνακα A εξετάζουμε την αντιστρεψιμότητα του τετραγωνικού πίνακα P . Αν ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας A διαγωνοποιείται. Σε διαφορετική περίπτωση ο πίνακας A μπορεί να «διαγωνοποιηθεί» από έναν πίνακα P , που έχει ως στήλες τα «**γενικευμένα ιδιοδιανύσματα**» του A , τα οποία αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές που έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1, και ο διαγώνιος πίνακας Δ έχει ως διαγώνια στοιχεία σύνθετους τριγωνικούς πίνακες με στοιχεία τις ιδιοτιμές του A . Αυτή η διαγωνοποίηση του A ονομάζεται **κανονική μορφή Jordan**, περισσότερα δείτε **στην επόμενη παράγραφο 1.4.2 (βλέπε, και στην Ενότητα 8.4 στο αρχείο Chapter8).**

Στην επόμενη πρόταση διατυπώνονται ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε ένας πίνακας να διαγωνοποιείται. Επίσης διατυπώνεται μία σημαντική εφαρμογή της διαγωνοποίησης που σχετίζεται με τον υπολογισμό των δυνάμεων ενός διαγωνοποιήσιμου πίνακα.

¹⁷Επιπλέον, μπορούμε να ελέγξουμε τη διαγωνοποίηση του πίνακα χρησιμοποιώντας το **ελάχιστο πολυώνυμο**, το οποίο πρέπει να αποτελείται μόνο από πρωτοβάθμιους παράγοντες για να διαγωνοποιείται ο πίνακας A . (βλέπε, **αρχείο Chapter8**, Πρόταση 8.4 και στις ενότητες «Χαρακτηριστικά ποσά» και «Κανονικές μορφές» στο eclass του μαθήματος Γραμμικής Αλγεβρας <http://eclass.uth.gr/eclass/modules/document/index.php?course=DIB102&openDir=/55df11fbuOFS>), και στην Πρόταση 1.5 (ii) στη συνέχεια.

Πρόταση 1.5

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του.

- i) Ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν όλες οι n ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.
- ii) Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ ($k < n$) είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ ο A είναι διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_k I) = \mathbb{O}$, αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμο $m_A(\lambda)$ είναι γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων, δηλαδή είναι της μορφής $m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_k)$.
- iii) Αν ο πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε

$$A^k = P \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k) P^{-1},$$

για κάθε φυσικό αριθμό k .

- iv) Αν όλες οι ιδιοτιμές είναι μη μηδενικές, $\lambda_i \neq 0$, τότε $A^{-k} = P \operatorname{diag}(\lambda_1^{-k}, \lambda_2^{-k}, \dots, \lambda_n^{-k}) P^{-1}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.8

Να εξετάσετε τη διαγωνοποίηση του μη-αρνητικού πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 0 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) + 2(2\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 1) - 4(1-\lambda) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-5) = 0 \end{aligned}$$

Άρα, οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι :

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ και } \lambda_3 = 5.$$

Η φασματική ακτίνα είναι :

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max \{1, 1, 5\} = 5.$$

Επειδή ο πίνακας A έχει όλες τις ιδιοτιμές του διακεκριμένες (διαφορετικές) σύμφωνα με την ιδιότητα (i) της Πρότασης 1.5, ο πίνακας διαγωνοποιείται, για την ακριβή μορφή της διαγωνοποίησης χρειάζεται να υπολογίσουμε τον πίνακα ομοιότητας P , τον πίνακα που έχει ως στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A .

Για κάθε ιδιοτιμή λ_i του πίνακα A υπάρχει και ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x} , που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Έτσι έχουμε:

- Για $\lambda_1 = -1$

$$\begin{aligned} (A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 & 2 \\ 0 & 3 - (-1) & 2 \\ 2 & 2 & 1 - (-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{matrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $x_2 = 1$, οπότε για $\lambda_1 = -1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- Για $\lambda_2 = 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 - 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_3 = -x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{matrix} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $x_2 = 1$, οπότε για $\lambda_2 = 1$, το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- Για $\lambda_3 = 5$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (A - \lambda_3 I) \mathbf{x} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-5 & 2 & 2 \\ 0 & 3-5 & 2 \\ 2 & 2 & 1-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_1 = x_3 \end{cases} \\ &\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R} - \{0\} \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $x_3 = 1$, οπότε για $\lambda_3 = 5$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ο P κατασκευάζεται με στήλες τα παραπάνω ιδιοδιανύσματα, οπότε θέτοντας

$$P = (\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{υπολογίζουμε} \quad \det P = 6 \neq 0^{18} \quad \text{συνεπώς τα}$$

ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα, άρα, επαληθεύονται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 1.2, συνεπώς ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, με διαγώνια μορφή

$$A = P\Delta P^{-1}, \quad \text{όπου} \quad \Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Παράδειγμα 1.9

Έστω $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Να αποδείξετε ότι $A^{2016} - 2A^{-4} = -I$.

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του A . Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i),$$

¹⁸ Η ορίζουσα του πίνακα P ότι είναι **διάφορη του μηδενός** σημαίνει ότι τα διανύσματα-στήλες του πίνακα είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

οπότε οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -i$ και $\lambda_3 = i$, άρα ο πίνακας A διαγωνοποιείται στο \mathbb{C} (βλέπε, ιδιότητα (i) της Πρότασης 1.5) και είναι αντιστρέψιμος.

Από την ιδιότητα (iii) της Πρότασης 1.5 έχουμε

$$A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^k & 0 \\ 0 & 0 & i^k \end{pmatrix} P^{-1},$$

οπότε κάνοντας αντικατάσταση

- για $k = 2016$ έχουμε $A^{2016} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{2016} & 0 \\ 0 & 0 & i^{2016} \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I,$

- για $k = -4$, $A^{-4} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-i)^{-4} & 0 \\ 0 & 0 & i^{-4} \end{pmatrix} P^{-1} = PIP^{-1} = I,$

άρα $A^{2016} - 2A^{-4} = -I.$

◇

Στην ειδική περίπτωση όπου ο πίνακας A είναι συμμετρικός (Ερμιτιανός) το **φασματικό θεώρημα** εξασφαλίζει την ύπαρξη καθώς και την αντιστρεψιμότητα του P , ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα των πραγματικών¹⁹ ιδιοτιμών του A .

Θεώρημα 1.3 (φασματικό θεώρημα)

Για κάθε συμμετρικό (Ερμιτιανό) πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ υπάρχει ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος) πίνακας $U \in M_n(\mathbb{F})$ ²⁰ και πραγματικός διαγώνιος πίνακας $\Delta \in M_n(\mathbb{F})$ με διαγώνια στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίνακα A έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα:

$$A = U\Delta U^T = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \mathbb{O} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbb{O} & & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$$

¹⁹ Βλέπε, ιδιότητα 9, Πρότασης 1.4.

²⁰ Βλέπε, στον Ορισμό 1.7.

Ο ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος) πίνακας U , που αναφέρεται στο παραπάνω θεώρημα, κατασκευάζεται από τον πίνακα P , με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A . Στα διανύσματα-στήλες του πίνακα P εφαρμόζεται η **μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt**²¹, και ο ορθογώνιος (ορθομοναδιαίος) πίνακας U είναι ο πίνακας που έχει ως στήλες τα ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν από την μέθοδο.

Παράδειγμα 1.10

Να βρεθεί η διαγωνοποίηση των πινάκων:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

i) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας A είναι συμμετρικός.

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα A από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, που είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda+1)(\lambda-4)(\lambda-9)$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$ και $\lambda_3 = 9$, οι οποίες είναι όλες πραγματικοί αριθμοί, επαληθεύοντας την ιδιότητα (9) της Πρότασης 1.4.

- Για $\lambda_1 = -1$ το ομογενές σύστημα $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει λύση τα διανύσματα του ιδιοχώρου $V(-1) = \{x_3(4 \ -3 \ 5)^T : x_3 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1 το $\mathbf{x}_1 = (4 \ -3 \ 5)^T$.
- Για $\lambda_2 = 4$ από το σύστημα $(A-4I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ υπολογίζουμε τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $V(4) = \{x_2(3 \ 4 \ 0)^T : x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_2 το $\mathbf{x}_2 = (3 \ 4 \ 0)^T$.
- Τέλος, για $\lambda_3 = 9$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος είναι $V(9) = \{x_3(-4 \ 3 \ 5)^T : x_3 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$, και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_3 το $\mathbf{x}_3 = (-4 \ 3 \ 5)^T$.

Επειδή οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A είναι διακεκριμένες, όλα τα ιδιοδιανύσματα είναι ανά δύο μεταξύ τους κάθετα, (βλέπε, Πρόταση 1.4 ιδιότητα (9)).

²¹ Βλέπε, στον Αλγόριθμο 1.

Άρα, ο ορθογώνιος πίνακας $U \in M_3(\mathbb{R})$ κατασκευάζεται με στήλες τα ιδιοδιανύσματα του A , αφού πρώτα διαιρέσουμε το καθένα με το μέτρο του, δηλαδή,

$$U = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{50}} & \frac{3}{5} & \frac{-4}{\sqrt{50}} \\ \frac{-3}{\sqrt{50}} & \frac{4}{5} & \frac{3}{\sqrt{50}} \\ \frac{5}{\sqrt{50}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{50}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5\sqrt{2}} & \frac{3}{5} & \frac{-4}{5\sqrt{2}} \\ \frac{-3}{5\sqrt{2}} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Προφανώς κάνοντας τις πράξεις επαληθεύεται η σχέση $A = U \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} U^T$ του

Θεωρήματος 1.3.

ii) Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός.

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα B από τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, που είναι $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 12)(\lambda - 6)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 12$ και $\lambda_2 = 6$ (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2).

- Στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = 12$ το ομογενές σύστημα $(B - 12I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ δίνει τον ιδιόχωρο $V(12) = \{x_2(-1 \ 1 \ 2)^T : x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ_1 το $\mathbf{x}_1 = (-1 \ 1 \ 2)^T$.

Στην $\lambda_2 = 6$ η λύση του συστήματος $(B - 6I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ δίνει τον αντίστοιχο ιδιόχωρο $V(6) = \{x_2(1 \ 1 \ 0)^T + x_3(2 \ 0 \ 1)^T : x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιανύσματα αντίστοιχα της ιδιοτιμής λ_2 τα $\mathbf{x}_2 = (1 \ 1 \ 0)^T$ και $\mathbf{x}_3 = (2 \ 0 \ 1)^T$.

Τα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ και $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3$ αντιστοιχούν σε διακεκριμένες ιδιοτιμές, άρα είναι κάθετα (βλέπε, Πρόταση 1.4, ιδιότητα(9)).

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.3, ο πίνακας $U \in M_3(\mathbb{R})$ πρέπει να έχει στήλες τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα. Επομένως χρειάζεται να εφαρμόσουμε τη [μέθοδο ορθοκανονικοποίησης](#) Gram-Schmidt στα $\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, βρίσκουμε

=====

$\hat{\mathbf{x}}_3 = \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_2 \circ \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_2\|^2} \mathbf{x}_2 = (1 \ -1 \ 1)^T$. Διαιρώντας τα διανύσματα $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \hat{\mathbf{x}}_3\}$ με το

μέτρο του το καθένα, ώστε να γίνει μοναδιαίο, έχουμε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_1\|} \mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{x}_2\|} \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\hat{\mathbf{x}}_3\|} \hat{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο ορθογώνιος πίνακας U είναι $U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Προφανώς κάνοντας τις πράξεις επαληθεύεται η σχέση $A = U \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} U^T$ του

Θεωρήματος 1.3.

◇

1.4.2. Γενικευμένα ιδιοδιανύσματα

Σε αρκετά παραδείγματα της προηγούμενης ενότητας συμπεράναμε ότι υπάρχουν πίνακες $A \in M_n(\mathbb{F})$ που δε διαγωνοποιούνται, και όπως διαπιστώνουμε, από την εφαρμογή του Αλγορίθμου 2, ένας πίνακας είναι μη διαγωνοποιήσιμος όταν τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματά του δεν είναι «αρκετά», ώστε να κατασκευαστεί ένας αντιστρέψιμος πίνακας P , μέσω του οποίου επιτυγχάνεται η διαγώνια μορφή. Βέβαια αυτό μπορεί να συμβεί μόνο σε περιπτώσεις όπου κάποια ιδιοτιμή έχει αλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη της μονάδας και η γεωμετρική πολλαπλότητα²² είναι μικρότερη της αλγεβρικής πολλαπλότητάς της. Σε αυτές τις περιπτώσεις χρειάζεται να επεκτείνουμε το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων του αντίστοιχου ιδιοχώρου σε μία βάση, η οποία πρέπει να έχει διάσταση ίση με την αλγεβρική πολλαπλότητα της αντίστοιχης ιδιοτιμής. Η επέκταση κατορθώνεται με τα λεγόμενα «γενικευμένα ιδιοδιανύσματα». Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η θεωρία που αφορά την ύπαρξη και την κατασκευή ενός πίνακα, που είναι αντίστοιχος του πίνακα ομοιότητας P της διαγωνοποίησης του A . Η νέα μορφή παραγοντοποίησης του πίνακα A δεν είναι διαγώνια, αλλά «πολύ κοντά» στη διαγώνια μορφή, είναι μία μορφή απλή και εξίσου χρήσιμη και ονομάζεται **κανονική μορφή Jordan**.

Ορισμός 1.23

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$. Ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ λέγεται **γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα** του A αν για την ιδιοτιμή $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ισχύει

$$(A - \lambda_i I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad (1.19)$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}^*$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i .

Το σύνολο

$$K(\lambda_i) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1} : (A - \lambda_i I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0}, k \in \mathbb{N}^*\} \quad (1.20)$$

ονομάζεται **γενικευμένος ιδιόχωρος** της ιδιοτιμής λ_i .

²² Η γεωμετρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής λ_i είναι ο αριθμός που δείχνει τη διάσταση του αντίστοιχου ιδιοχώρου $V(\lambda_i)$.

=====

Αν k είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα (1.19), τότε για το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{F}^{n \times 1}$ το σύνολο

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_k\} \quad (1.21)$$

ονομάζεται **αλυσίδα** από γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, όπου

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\equiv (A - \lambda_i I)^{k-1} \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_2 &\equiv (A - \lambda_i I)^{k-2} \mathbf{x} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_{k-2} &\equiv (A - \lambda_i I)^2 \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_{k-1} &\equiv (A - \lambda_i I) \mathbf{x} \\ \mathbf{x}_k &\equiv \mathbf{x} \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ο αριθμός k ονομάζεται **μήκος** της αλυσίδας.

Σχόλια: i) Θεωρώντας $k=1$ στην (1.19) γίνεται φανερό ότι, κάθε ιδιοδιάνυσμα του A είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμά του. Το αντίστροφο **δεν** ισχύει, δηλαδή τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα δεν είναι αναγκαστικά ιδιοδιανύσματα.

Για παράδειγμα, ο άνω τριγωνικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει μοναδική ιδιοτιμή την

$\lambda_1 = 1$ (διπλή ρίζα), κάνοντας πράξεις βρίσκουμε ότι $(A - I)^2 = \mathbf{0}$. Συνεπώς κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2)^T$ είναι ένα γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα του A , επειδή επαληθεύεται τετριμμένα η ισότητα στην (1.19). Από όλα τα \mathbf{x} μόνο τα $(x_1 \ 0)^T$ είναι ιδιοδιανύσματα του A .

ii) Σε κάθε ιδιοτιμή λ_i **δεν** αντιστοιχεί μία μόνο αλυσίδα, επειδή είναι δυνατόν στη λ_i να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα (εξαρτάται από τη γεωμετρική πολλαπλότητα της συγκεκριμένης ιδιοτιμής), το καθένα από τα οποία μπορεί να παράγει μία αλυσίδα διαφορετικού μήκους. Το **πλήθος των αλυσίδων**, που αντιστοιχούν σε μία ιδιοτιμή, ισούται **ακριβώς** με τον αριθμό της γεωμετρικής πολλαπλότητάς της.

iii) Παρατηρούμε ότι αν πολλαπλασιάσουμε αριστερά επί $A - \lambda_i I$ την πρώτη ισότητα της (1.22) και αντικαταστήσουμε με την (1.19) προκύπτει

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{x}_1 = (A - \lambda_i I)^k \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (1.23)$$

ενώ αν πολλαπλασιάσουμε επί $A - \lambda_i I$ τις υπόλοιπες ισότητες της (1.22) και αντικαταστήσουμε κατάλληλα με τα αντίστοιχα διανύσματα από την (1.22) καταλήγουμε :

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_i I)\mathbf{x}_2 &= (A - \lambda_i I)^{k-1} \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \\
 (A - \lambda_i I)\mathbf{x}_3 &= (A - \lambda_i I)^{k-2} \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 \\
 &\vdots \\
 (A - \lambda_i I)\mathbf{x}_{k-2} &= (A - \lambda_i I)^3 \mathbf{x} = \mathbf{x}_{k-3} \\
 (A - \lambda_i I)\mathbf{x}_{k-1} &= (A - \lambda_i I)^2 \mathbf{x} = \mathbf{x}_{k-2} \\
 (A - \lambda_i I)\mathbf{x}_k &= (A - \lambda_i I) \mathbf{x} = \mathbf{x}_{k-1}
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

Από την (1.23) καταλαβαίνουμε ότι το \mathbf{x}_1 είναι κάποιο από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i , επειδή επαληθεύεται ο Ορισμός 1.17, το οποίο είναι το μοναδικό που συμμετέχει στη συγκεκριμένη αλυσίδα. Συνεπώς, ξεκινώντας την αναζήτηση των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μπορούμε να ξεκινούμε με το \mathbf{x}_1 , ως ένα ιδιοδιάνυσμα αντίστοιχο της λ_i , τα δε υπόλοιπα $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ είναι διατεταγμένα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, που συμπληρώνουν την αλυσίδα και υπολογίζονται αναδρομικά από το \mathbf{x}_1 , σύμφωνα με τις ισότητες στην (1.24).

Παράδειγμα 1.11

Να βρεθούν τα ιδιοδιανύσματα και τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = m_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3 (\lambda + 1)$, και οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 1$ (τριπλή ρίζα), $\lambda_2 = -1$. Επειδή το ελάχιστο πολυώνυμο δεν είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων σύμφωνα με την [Πρόταση 1.5 \(ii\)](#) ο πίνακας A δεν διαγωνοποιείται, επομένως υπάρχει αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, που υπολογίζεται από τις (1.23)-(1.24), ως ακολούθως.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 1$, υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(1) = \{x_4(-1 \ 1 \ 1 \ 1)^T : x_4 \in \mathbb{R}\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_1 = (-1 \ 1 \ 1 \ 1)^T$. Στην ιδιοτιμή αυτή αντιστοιχεί μία αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους 3 με πρώτο διάνυσμα το $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_{11}$, τα υπόλοιπα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα $\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ υπολογίζονται από την (1.24).

▪ Θεωρώντας γνωστό το \mathbf{x}_1 από παραπάνω η πρώτη εξίσωση στην (1.24) διαμορφώνεται $(A - I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ και έχει άγνωστο \mathbf{x}_2 , οπότε εφαρμόζοντας τις γραμμοπράξεις, $r_2 \rightarrow r_2 + r_1$, $r_3 \rightarrow r_3 + r_1$, $r_4 \rightarrow r_4 + r_1$, στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος καταλήγουμε :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Η λύση του συστήματος που προκύπτει είναι $\mathbf{x}_2 = (-x_4 \ 1 + x_4 \ x_4 \ x_4)^T$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Από όλα αυτά τα διανύσματα επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (π.χ. βάζοντας $x_4 = 0$), οπότε το δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας είναι $\mathbf{x}_{12} \equiv (0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$.

▪ Συνεχίζοντας με την εξίσωση $(A - I)\mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_2$, βάζοντας $x_4 = 0$ και κάνοντας τις γραμμοπράξεις $r_2 \rightarrow r_2 + r_1$, $r_3 \rightarrow r_3 + r_1$, $r_4 \rightarrow r_4 + r_1$, στον επαυξημένο πίνακα του συστήματος, που δημιουργείται, βρίσκουμε

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & 0 \end{array} \right)$$

Η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{x}_3 = (1 - x_4 \ x_4 - 2 \ x_4 \ x_4)^T$, $x_4 \in \mathbb{R}$. Από τα διανύσματα αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (για $x_4 = 0$), οπότε το τρίτο διάνυσμα της αλυσίδας είναι $\mathbf{x}_{13} \equiv (1 \ -2 \ 0 \ 0)^T$.

Επομένως, ο γενικευμένος ιδιόχωρος $K(1)$ παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}$.

• Για την άλλη ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(-1) = \{x_2(-3 \ 1 \ -1 \ -9)^T : x_2 \in \mathbb{R}\}$ και επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $x_4 = (-3 \ 1 \ -1 \ -9)^T$.

Σχόλιο-Παρατήρηση: Επειδή $\det(x_{11} \ x_{13} \ x_{12} \ x_4) = 8 \neq 0$, τα διανύσματα $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_4 \in \mathbb{R}^4$ του Παραδείγματος 1.11 είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έστω ο πίνακας $M = (x_{11} \ x_{12} \ x_{13} \ x_4)$ με στήλες τα παραπάνω διανύσματα $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_4$. Επειδή τα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα ο πίνακας M είναι αντιστρέψιμος. Αν υπολογίσουμε τον πίνακα M^{-1} παρατηρούμε ότι

$$M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1,3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_{2,1} \end{pmatrix} = J.$$

Στην παραπάνω μορφή παρατηρούμε ότι ο πίνακας J είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας, οι δε πίνακες $J_{1,3}, J_{2,1}$, που είναι τοποθετημένοι ως «διαγώνια στοιχεία» στον J , είναι και αυτοί άνω τριγωνικοί πίνακες με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -1$. ◇

Από το σχόλιο-παρατήρηση του Παραδείγματος 1.11 καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.24

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $\lambda_i \in \mathbb{F}$ ιδιοτιμή του A . Ένας $k \times k$ πίνακας της μορφής

$$J_{i,k} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_i & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & \lambda_i & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

ονομάζεται **στοιχειώδης πίνακας Jordan** αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ_i . Ο πρώτος δείκτης στο συμβολισμό του $J_{i,k}$ ταυτίζεται με το δείκτη της αντίστοιχης ιδιοτιμής

και ο δεύτερος προσδιορίζει τον τύπο (μέγεθος) του στοιχειώδη πίνακα Jordan.

Χρησιμοποιώντας διάφορους τύπους στοιχειωδών πινάκων Jordan, J_{i,k_j} , $j=1,2,\dots,\tau$, όπως αυτοί ορίστηκαν στην (1.25), κατασκευάζεται ένας $v_i \times v_i$ με $v_i = k_1 + k_2 + \dots + k_\tau$ σύνθετος διαγώνιος πίνακας της μορφής

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,k_1} & & & \\ & J_{i,k_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{i,k_\tau} \end{pmatrix} \in M_{v_i}(\mathbb{F}), \quad (1.26)$$

που ονομάζεται **σύνθετος (block) Jordan** ή **σύνθετα (block) Jordan**, αντίστοιχος της ιδιοτιμής λ_i . Οι στοιχειώδεις πίνακες Jordan, που εμπεριέχονται στην (1.26) έχουν σε όλα τα στοιχεία της διαγωνίου την αντίστοιχη ιδιοτιμή λ_i του block. Διαφοροποιούνται μόνο στο στοιχείο που είναι πάνω από την κύρια διαγώνιο, το οποίο στον J_i είναι ο μηδενικός πίνακας \mathbb{O} , ενώ στο στοιχειώδη πίνακα J_{i,k_j} υπάρχει άλλοτε το 0 και άλλοτε το 1. Αυτό εξαρτάται από τον αριθμό k_j , δηλαδή αν $k_j > 1$, τότε υπάρχει το 1, αν $k_j = 1$, τότε υπάρχει το 0.

Στο επόμενο θεώρημα διατυπώνεται ο τρόπος κατασκευής μίας βάσης από ιδιοδιανύσματα και γενικευμένα ιδιοδιανύσματα, ώστε μέσω της βάσης αυτής να προκύπτει η αντίστοιχη παραγοντοποίηση του πίνακα A γνωστή στη βιβλιογραφία ως **κανονική μορφή Jordan** του πίνακα A .

Θεώρημα 1.4 (κανονική μορφή Jordan)

Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ με χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{v_1} (\lambda - \lambda_2)^{v_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{v_s}, \quad m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{k_s}$$

αντίστοιχα. Τότε, υπάρχει ένας σύνθετος διαγώνιος πίνακας, **ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan**²³,

²³ Ο J ονομάζεται **πίνακας της κανονικής μορφής Jordan**, είναι σύνθετος διαγώνιος πίνακας με στοιχεία στη διαγώνιο τους υποπίνακες J_i , όπως αυτοί ορίστηκαν στην (1.26). Ο

$$J = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s) \in M_n(\mathbb{F}), \quad (1.27)$$

με υποπίνακες τα σύνθετα (block) Jordan¹

$$J_i = \begin{pmatrix} J_{i,k_{i,1}} & & & & \\ & J_{i,k_{i,2}} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_{i,k_{i,\tau}} \end{pmatrix} \in M_{v_i}(\mathbb{F}),$$

όπου $i=1,2,\dots,s$. Το κάθε σύνθετο (block) Jordan J_i είναι σύνθετος πίνακας στοιχειωδών πινάκων Jordan της ίδιας ιδιοτιμής λ_i , $J_{i,k_{i,j}}$, όπου $j=1,2,\dots,\tau$, και $k_{i,j}$ είναι το μήκος κάθε αλυσίδας που προκύπτει από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα της λ_i ιδιοτιμής, και $\tau = \dim V(\lambda_i)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής. Ισχύουν

i) ο αριθμός τ δείχνει το πλήθος όλων των $J_{i,k_{i,j}}$ στον J_i και ταυτίζεται με το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων της ιδιοτιμής.

ii) $k_i \equiv k_{i,1} \geq k_{i,2} \geq \dots \geq k_{i,\tau}$, k_i η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i στο ελάχιστο πολυώνυμο και

iii) $k_{i,1} + k_{i,2} + \dots + k_{i,\tau} = v_i$, v_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i .

Επιπλέον, υπάρχει μια βάση από n γενικευμένα ιδιοδιανύσματα όλων των αλυσίδων, όπως διατάσσονται στην (1.24) και για όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές και ένας πίνακας M με στήλες όλα τα διανύσματα της βάσης, έτσι ώστε

$$A = MJM^{-1} \text{ ή ισοδύναμα } J = M^{-1}AM, \quad (1.28)$$

όπου J είναι ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan (1.27).

Στην περίπτωση που **δεν** απαιτείται ο υπολογισμός του αντιστρέψιμου πίνακα M των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων στην (1.28), η ακόλουθη πρόταση δίνει μία μεθοδολογία για την κατασκευή του σύνθετου πίνακα Jordan J στην (1.27), που αντιστοιχεί στην κανονική μορφή Jordan του πίνακα A , μέσω του διαγράμματος των \star . Σύμφωνα με αυτήν για τον υπολογισμό του J απαιτούνται **μόνο** το χαρακτηριστικό πολυώνυμο με την αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ_i καθώς και όλοι οι βαθμοί των πινάκων $(A - \lambda_i I)^m$, $m=1,2,\dots,v_i$, όπου v_i η

σύνθετος (block) Jordan πίνακας έχει στη διαγώνιό του ως στοιχεία τους $k_j \times k_j$ υποπίνακες, που ορίστηκαν στην (1.25) ως **στοιχειώδεις πίνακες Jordan**, J_{i,k_j} .

αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής λ_i . Στην περίπτωση όπου $\nu_i = 1$, προφανώς στο διάγραμμα των \star για την ιδιοτιμή λ_i υπάρχει μόνο ένα σύνθετο (block) Jordan $J_i = (\lambda_i)$, τύπου 1×1 .

Πρόταση 1.6

Έστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, λ_i ιδιοτιμή αλγεβρικής πολλαπλότητας ν_i και ℓ_m ο αριθμός των \star στην m -γραμμή του διαγράμματος, όπου $m = 1, 2, \dots, \nu_i$. Τότε

$$\ell_1 = n - \text{rank}(A - \lambda_i I) = \tau = \dim V(\lambda_i) \quad (1.29)$$

$$\ell_w = \text{rank}((A - \lambda_i I)^{w-1}) - \text{rank}((A - \lambda_i I)^w), \quad w = 2, \dots, \nu_i, \quad (1.30)$$

όπου $\text{rank}(A)$ είναι ο βαθμός του πίνακα A .

Παρατήρηση 1.7

Ερμηνεύοντας το διάγραμμα των \star της ιδιοτιμής λ_i χρησιμοποιώντας την (1.29) και την (1.25) έχουμε να παρατηρήσουμε ότι:

- το πλήθος των \star της $1^{\text{ης}}$ γραμμής του διαγράμματος των \star ισούται με το πλήθος των block στο **σύνθετο (block) Jordan** πίνακα J_i στην (1.26), δηλαδή με το πλήθος των αλυσίδων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i .
- Το πλήθος των \star σε κάθε στήλη του διαγράμματος των \star είναι ίσο με τον τύπο (μέγεθος) του **στοιχειώδη πίνακα Jordan** στην (1.25).
- Προφανώς, το άθροισμα των τύπων των block Jordan πινάκων στην (1.26) ισούται με τη γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i στην (1.29).

Με αυτόν τον τρόπο προσδιορίζεται επακριβώς ο τύπος των στοιχειωδών πινάκων Jordan, $J_{i, k_i, j}$, $j = 1, 2, \dots, \tau$, σε κάθε σύνθετο (block) Jordan, μεθοδολογία που εφαρμόζεται και στο επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 1.12

Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 9 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 2)^3(\lambda - 3)^2$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = -2$, με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_1 = 3$, και $\lambda_2 = 3$ με αλγεβρική πολλαπλότητα $\nu_2 = 2$.

- Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$, επειδή $\text{rank}(A + 2I) = 4$, $\text{rank}((A + 2I)^2) = 3$, $\text{rank}((A + 2I)^3) = 2$, από την (1.29) η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής είναι

$$\ell_1 \equiv \tau \equiv \dim V(-2) = 5 - \text{rank}(A + 2I) = 1$$

και από την (1.30) υπολογίζονται

$$\ell_2 = \text{rank}(A + 2I) - \text{rank}((A + 2I)^2) = 1,$$

$$\ell_3 = \text{rank}((A + 2I)^2) - \text{rank}((A + 2I)^3) = 1.$$

★

Άρα, το διάγραμμα των ★ για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -2$ είναι ★. Επομένως, το ★

αντίστοιχο σύνθετο (block) Jordan είναι τύπου 3×3 , -όση και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής-, και έχει μόνο ένα στοιχειώδη πίνακα Jordan, -επειδή το άθροισμα των ★ της στήλης ταυτίζεται με τον τύπο (μέγεθος) του πίνακα. Δηλαδή ο

στοιχειώδης πίνακας είναι $J_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

- Για την άλλη ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, επειδή $\text{rank}(A - 3I) = \text{rank}((A - 3I)^2) = 3$, από την (1.29) έχουμε $\ell_1 \equiv \tau \equiv \dim V(3) = 5 - \text{rank}(A - 3I) = 2$ και από την (1.30) $\ell_2 = \text{rank}(A - 3I) - \text{rank}((A - 3I)^2) = 0$.

Συνεπώς, το διάγραμμα των ★ για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$ είναι ★ ★. Επομένως υπάρχουν δύο στοιχειώδεις υποπίνακες Jordan, τύπου 1×1 ο καθένας, της μορφής

=====

$J_{2,1} = (3)$. Άρα, για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 3$, το σύνθετο (block) Jordan είναι $J_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Από την (1.27), ο σύνθετος πίνακας Jordan του πίνακα A είναι

$$J = \text{diag}(J_1, J_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Στον επόμενο αλγόριθμο είναι συγκεντρωμένα τα βασικότερα σημεία που αναφέρονται στο Θεώρημα 1.4, στην Πρόταση 1.6 και στην ερμηνεία της (βλέπε, Παρατήρηση 1.7). Ο Αλγόριθμος 3 εφαρμόζεται έως και το 4^ο βήμα, όταν χρειάζεται να υπολογισθεί η κανονική μορφή Jordan ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$ και εφαρμόζεται ολόκληρος ο αλγόριθμος όταν απαιτείται η κατασκευή μίας βάσης Jordan.

Αλγόριθμος 3

Κανονική μορφή και βάση Jordan ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$

- Βήμα 1** Υπολογισμός χαρακτηριστικού και ελαχίστου πολυωνύμου, καθώς και ιδιοτιμές του πίνακα A
- Βήμα 2** Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , υπολογισμός των βαθμών των πινάκων $(A - \lambda_i I)^m$ $m = 1, 2, \dots, \nu_i$, όπου ν_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής.
- Βήμα 3** Κατασκευή του διαγράμματος των \star για κάθε ιδιοτιμή λ_i , κάνοντας αντικατάσταση στις (1.29) και (1.30) με τους βαθμούς των πινάκων που υπολογίστηκαν στο βήμα 2. Από αυτό το διάγραμμα
- σχηματίζουμε το σύνθετο (block) Jordan της ιδιοτιμής (αποτελείται από ℓ_1 το πλήθος στοιχειώδεις πίνακες Jordan) και είναι τύπου $\nu_i \times \nu_i$
 - καταγράφουμε τους τύπους των στοιχειωδών πινάκων Jordan, όπως δείχνουν τα μήκη των αντίστοιχων αλυσίδων $k_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, \tau$. Το μήκος κάθε αλυσίδας ισούται με το άθροισμα των \star του διαγράμματος.
- Βήμα 4** Η κανονική μορφή Jordan είναι ο σύνθετος πίνακας με διαγώνια

στοιχεία τα σύνθετα (block) Jordan όλων των ιδιοτιμών.

Βήμα 5 Για κάθε ιδιοτιμή λ_i , από την εξίσωση $(A - \lambda_i I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, υπολογίζονται τα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, \mathbf{x}_p , $1 \leq p \leq \tau \equiv \dim V(\lambda_i)$.

Βήμα 6 Για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα \mathbf{x}_p , του βήματος 5, συμπληρώνονται τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα κάθε αλυσίδας από τη σχέση (1.24) και γράφονται με διάταξη $\mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}, \mathbf{x}_{p3}, \dots, \mathbf{x}_{p(k_{i,j}-1)}$, $k_{i,j}$ είναι το μήκος της αλυσίδας, όπως αυτό υπολογίστηκε στο διάγραμμα των \star .

Βήμα 7 Κατασκευή του πίνακα M με στήλες τα διανύσματα όλων των αλυσίδων κάθε ιδιοτιμής και για όλες τις διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$, οπότε ισχύει

$$M^{-1}AM = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_s),$$

όπου J_i είναι τα σύνθετα (block) Jordan που βρέθηκαν στο βήμα 3, όλων των διακεκριμένων ιδιοτιμών λ_i , $1 \leq i \leq s$.

Παράδειγμα 1.13

Να βρεθεί η κανονική μορφή Jordan J του πίνακα A και ένας αντιστρέψιμος πίνακας M έτσι ώστε $J = M^{-1}AM$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εφαρμόζουμε τον [Αλγόριθμο 3](#) για τον υπολογισμό της κανονικής μορφής. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)^3$ με ιδιοτιμές $\lambda_1 = -1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας $\nu_1 = 2$, και $\lambda_2 = 1$, αλγεβρικής πολλαπλότητας $\nu_2 = 3$.

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = -1$, επειδή $\text{rank}(A + I) = 4$, $\text{rank}(A + I)^2 = 3$, από τις (1.29)-(1.30) έχουμε $\ell_1 = 5 - 4 = 1$, $\ell_2 = 4 - 3 = 1$, επομένως το διάγραμμα είναι :

★

★

Από την 1^η γραμμή του διαγράμματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένας στοιχειώδης Jordan πίνακας στο σύνθετο (block) Jordan, που είναι 2×2 -λόγω αλγεβρικής πολλαπλότητας- και το μήκος της αλυσίδας είναι $k_{1,1} = 2$, -όσο και το άθροισμα των ★ της στήλης-, δηλαδή,

$$J_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

• Για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$, επειδή $\text{rank}(A - I) = 3$, $\text{rank}(A - I)^2 = \text{rank}(A - I)^3 = 2$, από τις (1.29)-(1.30) έχουμε $\ell_1 = 5 - 3 = 2$, $\ell_2 = 3 - 2 = 1$, επομένως το διάγραμμα είναι:

★ ★

★

Από την 1^η γραμμή του διαγράμματος συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν δύο στοιχειώδεις πίνακες Jordan στο σύνθετο (block) Jordan, το οποίο είναι 3×3 , -λόγω αλγεβρικής πολλαπλότητας της ιδιοτιμής-, και το μήκος της αλυσίδας που αντιστοιχεί στον πρώτο στοιχειώδη πίνακα Jordan είναι $k_{2,1} = 2$, οπότε $J_{2,k_{2,1}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και το μήκος της δεύτερης αλυσίδας είναι $k_{2,2} = 1$, άρα $J_{2,k_{2,2}} = (1)$. Το αντίστοιχο σύνθετο (block) Jordan είναι

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Από την (1.27), ο πίνακας της κανονικής μορφής Jordan είναι

$$J = \text{diag}(J_1, J_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Στην $\lambda_1 = -1$, αντιστοιχεί μία αλυσίδα (επειδή η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι ένα, υπάρχει ένα γραμμικά ανεξάρτητο ιδιοδιάνυσμα) μήκους $k_{1,1} = 2$. Ο ιδιόχωρος $V(-1)$ υπολογίζεται από την εξίσωση $(A + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ότι είναι:

$$V(-1) = \left\{ x_1 (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

από τον οποίο επιλέγουμε ως ιδιοδιάνυσμα το $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_{11} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$.

Από την εξίσωση $(A+I)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ υπολογίζονται ως λύση της τα διανύσματα $\mathbf{x}_2 = (1+x_5 \ 0 \ 1 \ 0 \ x_5)^T$, $x_5 \in \mathbb{R}$. Από αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα (για $x_5 = 0$) και το τοποθετούμε ως δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της αλυσίδας, $\mathbf{x}_{12} = (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)^T$.

Επομένως, τα στοιχεία της αλυσίδας, που αντιστοιχεί στην $\lambda_1 = -1$, είναι $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}$.

• Στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ αντιστοιχούν δύο αλυσίδες, επειδή η γεωμετρική πολλαπλότητα είναι 2, (υπάρχουν δύο \star στην 1^η γραμμή του διαγράμματος των \star). Άρα υπάρχουν δύο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, μήκους $k_{2,1} = 2$ και $\tilde{k}_{2,2} = 1$ αντίστοιχα. Από την εξίσωση $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ υπολογίζεται ο ιδιόχωρος $V(1) = \left\{ x_5 (5 \ 2 \ 2 \ 0 \ 1)^T + x_4 (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T : x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\}$.

Επιλέγουμε ως ιδιοδιανύσματα: $\mathbf{x}_3 = (5 \ 2 \ 2 \ 0 \ 1)^T$ και $\mathbf{x}_5 = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)^T$.

Θεωρώντας ότι το πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας μήκους 2 είναι το $\mathbf{x}_3 \equiv \mathbf{x}_{31}$, από την (1.24) υπολογίζεται το δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας.

Δηλαδή, από την εξίσωση $(A-I)\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_3$, βρίσκουμε ως λύση τα διανύσματα

$$\mathbf{x}_4 = \left(-\frac{1}{2} + 5x_5 \quad \frac{1}{2} + 2x_5 \quad 2x_5 \quad x_4 \quad x_5 \right)^T, \quad x_4, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Από αυτά επιλέγουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα και το τοποθετούμε ως δεύτερο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της

αλυσίδας (θέτοντας $x_4 = x_5 = 0$), $\mathbf{x}_{32} = \left(-\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right)^T$. Επομένως, η αλυσίδα

μήκους 2, που αντιστοιχεί στην $\lambda_2 = 1$, είναι $\mathbf{x}_{31}, \mathbf{x}_{32}$.

Τελικά, τα διανύσματα για την ιδιοτιμή $\lambda_2 = 1$ είναι $\mathbf{x}_{31}, \mathbf{x}_{32}, \mathbf{x}_5$.

Η βάση Jordan αποτελείται από τα διανύσματα $\mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{31}, \mathbf{x}_{32}, \mathbf{x}_5$.

Ο αντιστρέψιμος πίνακας M έχει στήλες όλα τα διανύσματα της βάσης,

$$M = (\mathbf{x}_{11} \ \mathbf{x}_{12} \ \mathbf{x}_{31} \ \mathbf{x}_{32} \ \mathbf{x}_5)$$

και υπολογίζεται ότι ο αντίστροφός του είναι :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -1/4 & 1/4 & 0 & 5/4 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως, από την ισότητα στην (1.28) η κανονική μορφή Jordan είναι

$$M^{-1}AM = J.$$

Σχόλια-Παρατήρηση: Εδώ χρειάζεται να τονίσουμε ότι η επιλογή του ιδιοδιανύσματος που θα θεωρηθεί πρώτο στην αλυσίδα, για να υπολογισθούν τα υπόλοιπα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα από την (1.24), εξαρτάται από το αν το σύστημα, που προκύπτει από την πρώτη ισότητα της (1.24), έχει λύση.

Στο παραπάνω Παράδειγμα, αν επιλέξουμε ως πρώτο διάνυσμα της αλυσίδας το ιδιοδιάνυσμα x_5 , αναζητώντας στη συνέχεια το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα x (ως δεύτερο διάνυσμα της αλυσίδας), θα διαπιστώσουμε ότι το σύστημα $(A - I)x = x_5$ είναι αδύνατο. \diamond

Για περισσότερα παραδείγματα εφαρμογής αυτού του Αλγορίθμου παραπέμπουμε στα παραδείγματα του **Κεφαλαίου 8, (βλέπε, αρχείο Chapter8).**

1.4.3 Εντοπισμός ιδιοτιμών πίνακα

Εκτός από τη δυνατότητα διαγωνοποίησης των συμμετρικών πινάκων υπάρχουν και ορισμένες χρήσιμες πληροφορίες που διατυπώνονται για το άνω και κάτω φράγμα των ιδιοτιμών του πίνακα. Επειδή οι ιδιοτιμές ενός συμμετρικού πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$ είναι πραγματικοί αριθμοί, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν την ακόλουθη διάταξη $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$. Η σχέση μεταξύ των ιδιοτιμών του συμμετρικού πίνακα A και ενός υποπίνακά του παρουσιάζεται στην επόμενη πρόταση και αποδεικνύονται (βλέπε, [Theorem 4.3.15]²⁴).

Πρόταση 1.8

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας συμμετρικός πίνακας με $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ και B ένας κύριος υποπίνακας του A με $\text{rank}(B) = n - 1$ και ιδιοτιμές $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$. Για τις ιδιοτιμές των πινάκων A, B ισχύει

$$\lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \lambda_n. \quad (1.31)$$

Αν ο κύριος υποπίνακας B έχει $\text{rank}(B) = n - k$, τότε για κάθε $i = 1, 2, \dots, n - k$, ισχύει

$$\lambda_i \leq b_i \leq \lambda_{k+i}. \quad (1.32)$$

Στην περίπτωση που ο πίνακας A δεν είναι τετραγωνικός, έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ με $m \geq n$ και $\text{rank}(A) = n$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την **ιδιάζουσα ανάλυση** του A , γνωστή ως singular value decomposition (s.v.d.) και να εφαρμόσουμε τις πληροφορίες της Πρότασης 1.8 για τον πίνακα $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$. Πράγματι, επειδή

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A,$$

ο πίνακας $A^T A$ είναι **συμμετρικός**, συνεπώς ισχύει γι' αυτόν το φασματικό θεώρημα (Θεώρημα 1.2), δηλαδή, υπάρχει πάντα ορθογώνιος πίνακας $U_{A^T A} \in M_n$, που διαγωνοποιεί τον $A^T A$ στη μορφή

$$A^T A = U_{A^T A} \Delta_{A^T A} U_{A^T A}^T$$

με

²⁴ R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005.

$$\Delta_{A^T A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \sigma(A^T A)$. Επιπλέον επειδή για κάθε μη-μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ισχύει

$$\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (A\mathbf{x})^T A\mathbf{x} \geq 0,$$

είναι φανερό ότι $A^T A$ είναι θετικά ημιορισμένος, οπότε οι ιδιοτιμές του είναι μη-αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί (βλέπε, ιδιότητα 10, Πρόταση 1.4), συνεπώς ισχύει

$$\lambda_n = \rho(A^T A) \text{ και } 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Αν B είναι υποπίνακας του A , που προκύπτει από τη διαγραφή της τελευταίας στήλης του A , έχει $\text{rank}(B) = n-1$ και ισχύει $B^T B \in M_{n-1}(\mathbb{R})$. Ο τελευταίος πίνακας είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και από την κατασκευή του είναι κύριος υποπίνακας του $A^T A$. Αν $b_i \in \sigma(B^T B)$ με $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$, σύμφωνα με το πρώτο τμήμα της Πρότασης 1.8 ισχύει η σχέση (1.31), δηλαδή,

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \rho(A^T A).$$

Αν C είναι υποπίνακας του A , που προκύπτει από τη διαγραφή των k τελευταίων στηλών του A , τότε $C^T C \in M_{n-k}(\mathbb{R})$ είναι συμμετρικός πίνακας βαθμού $n-k$ με ιδιοτιμές $0 < c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{n-k}$, οι οποίες είναι θετικοί αριθμοί.

Για τις ιδιοτιμές των πινάκων $A^T A, C^T C$ εφαρμόζεται το δεύτερο τμήμα της Πρότασης 1.8, δηλαδή από την (1.32) ισχύει η ανισότητα,

$$\lambda_i \leq c_i \leq \lambda_{k+i}, \text{ για κάθε } i = 1, 2, \dots, n-k. \quad (1.33)$$

Μία γενίκευση της Πρότασης 1.8 αποτελεί η διαγραφή οποιασδήποτε στήλης του A , αρκεί να χρησιμοποιήσουμε έναν κατάλληλο πίνακα μετάθεσης P και να εφαρμόσουμε την ίδια διαδικασία με την παραπάνω. Επιπλέον, αν διαγράψουμε μία γραμμή αντί για στήλη, τα συμπεράσματα είναι ίδια, αρκεί στην απόδειξη να χρησιμοποιήσουμε τον πίνακα A^T αντί A . Αυτό διατυπώνεται στην επόμενη πρόταση και παρουσιάζεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

Πρόταση 1.9

Έστω ένας πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ με $m \geq n$.

i) Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \equiv \rho(A^T A)$ οι ιδιοτιμές του $A^T A$ και B είναι ο πίνακας που δημιουργείται με τη διαγραφή μιας οποιασδήποτε στήλης του A και $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1}$ οι ιδιοτιμές του $B^T B$, τότε ισχύει

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{n-1} \leq \rho(A^T A). \quad (1.34)$$

ii) Αν $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_m \equiv \rho(AA^T)$ οι ιδιοτιμές του AA^T και B είναι ο πίνακας που δημιουργείται με τη διαγραφή μιας οποιασδήποτε γραμμής του A και $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{m-1}$ οι ιδιοτιμές του BB^T , τότε ισχύει

$$0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{m-1} \leq \rho(AA^T). \quad (1.35)$$

Παράδειγμα 1.14

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ με βαθμό $rank(A) = 4$.

Ο 4×4 πίνακας $A^T A = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 28 & 11 \\ 25 & 74 & 42 & 24 \\ 28 & 42 & 49 & 21 \\ 11 & 24 & 21 & 30 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(A^T A) = \{\lambda_1 = 5.4785, \lambda_2 = 18.8128, \lambda_3 = 21.8976, \lambda_4 = 130.8112\}.$$

➤ Έστω B_1 ο πίνακας που προκύπτει μετά τη διαγραφή της τελευταίας (4^{th}) στήλης του A :

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cancel{3} \\ 3 & 1 & 5 & \cancel{0} \\ 0 & 4 & 2 & \cancel{1} \\ 3 & 2 & 1 & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 1 & \cancel{4} \\ 2 & 7 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας $B_1^T B_1 = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 28 \\ 25 & 74 & 42 \\ 28 & 42 & 49 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(B_1^T B_1) = \{b_1 = 5.7161, b_2 = 21.7249, b_3 = 119.559\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $\lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4$, όπως αναμενόταν από την (1.31) της [Πρότασης 1.8](#).

➤ Αν διαγράψουμε τη 2^η στήλη του A αντί για την τελευταία, προκύπτει ο ακόλουθος πίνακας:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & \cancel{2} & 3 & 3 \\ 3 & \cancel{1} & 5 & 0 \\ 0 & \cancel{4} & 2 & 1 \\ 3 & \cancel{2} & 1 & 0 \\ 1 & \cancel{0} & 1 & 4 \\ 2 & \cancel{7} & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας $B_2^T B_2 = \begin{pmatrix} 24 & 28 & 11 \\ 28 & 49 & 21 \\ 11 & 21 & 30 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(B_2^T B_2) = \{b_1 = 5.5229, b_2 = 18.842, b_3 = 78.6351\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4$, όπως αναμενόταν από την (1.34) της [Πρότασης 1.9](#).

➤ Έστω ο πίνακας που προκύπτει μετά τη διαγραφή της τελευταίας (4^{ης}) και της προτελευταίας (3^{ης}) στήλης του A ,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cancel{3} & \cancel{3} \\ 3 & 1 & \cancel{5} & \cancel{0} \\ 0 & 4 & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & \cancel{1} & \cancel{4} \\ 2 & 7 & \cancel{3} & \cancel{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},$$

Ο τετραγωνικός πίνακας $C^T C = \begin{pmatrix} 24 & 25 \\ 25 & 74 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει ιδιοτιμές

$$\sigma(C^T C) = \{c_1 = 13.6447, c_2 = 84.3553\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν $\lambda_1 \leq c_1 \leq \lambda_3$ και $\lambda_2 \leq c_2 \leq \lambda_4$, όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.33).

➤ Ο 6×6 πίνακας $AA^T = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 17 & 10 & 16 & 31 \\ 20 & 35 & 14 & 16 & 8 & 28 \\ 17 & 14 & 21 & 10 & 6 & 36 \\ 10 & 16 & 10 & 14 & 4 & 23 \\ 16 & 8 & 6 & 4 & 18 & 13 \\ 31 & 28 & 36 & 23 & 13 & 66 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει

ιδιοτιμές

$$\sigma(AA^T) = \{\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 5.4785, \lambda_4 = 18.8128, \lambda_5 = 21.8976, \lambda_6 = 130.8112\}.$$

Θεωρούμε ως υποπίνακα τον πίνακα που προκύπτει μετά την αφαίρεση της τελευταίας (6^{ης}) γραμμής του A :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ \cancel{\alpha} & \cancel{\beta} & \cancel{\gamma} & \cancel{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Ο τετραγωνικός πίνακας $BB^T = \begin{pmatrix} 23 & 20 & 17 & 10 & 16 \\ 20 & 35 & 14 & 16 & 8 \\ 17 & 14 & 21 & 10 & 6 \\ 10 & 16 & 10 & 14 & 4 \\ 16 & 8 & 6 & 4 & 18 \end{pmatrix}$ είναι συμμετρικός και έχει

ιδιοτιμές

$$\sigma(BB^T) = \{b_1 = 0, b_2 = 5.1097, b_3 = 12.1557, b_4 = 18.8134, b_5 = 74.9212\}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $0 \leq \lambda_1 \leq b_1 \leq \lambda_2 \leq b_2 \leq \lambda_3 \leq b_3 \leq \lambda_4 \leq b_4 \leq \lambda_5 \leq b_5 \leq \lambda_6$ όπως αναμενόταν από τη σχέση (1.35) της [Πρότασης 1.9](#). ◇

1.5 Ιδιότητες τιμές πίνακα

Επειδή οι πίνακες που παρουσιάζονται στις εφαρμογές είναι μη τετραγωνικοί, υπάρχει ανάγκη να βρεθεί μία μέθοδος που να «μελετά» τους μη τετραγωνικούς με «μεθόδους και ποσά» που είναι αντίστοιχα με αυτά που χρησιμοποιούνται στη μελέτη των τετραγωνικών πινάκων.

Στην παράγραφο αυτή αντιμετωπίζεται το ανάλογο πρόβλημα της παραγοντοποίησης ενός $m \times n$ πίνακα και αποδεικνύεται ότι για έναν πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ υπάρχουν πάντοτε κατάλληλοι πίνακες U, V ώστε να επιτυγχάνεται μια παραγοντοποίηση του πίνακα στη μορφή $A = USV^T$, όπου Σ είναι «αραιός πίνακας, σχεδόν διαγώνιος» πίνακας.

Για έναν πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ παρατηρούμε ότι $A^T A \in M_n(\mathbb{R})$, $AA^T \in M_m(\mathbb{R})$, είναι συμμετρικοί πίνακες, επειδή εφαρμόζοντας τις ιδιότητες (1) και (4) της παραγράφου 1.1.4, μπορούμε να γράψουμε

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A \quad \text{και} \quad (AA^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T. \quad (1.36)$$

Επίσης οι συμμετρικοί πίνακες $A^T A$, AA^T είναι θετικά ημιορισμένοι, επειδή για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ και $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ έχουμε αντίστοιχα τις σχέσεις :

$$\mathbf{x}^T A^T A \mathbf{x} = (A \mathbf{x})^T A \mathbf{x} = \|A \mathbf{x}\|^2 \geq 0, \quad \mathbf{y}^T AA^T \mathbf{y} = (A^T \mathbf{y})^T A^T \mathbf{y} = \|A^T \mathbf{y}\|^2 \geq 0. \quad (1.37)$$

Στην περίπτωση δε ενός συμμετρικού πίνακα A , όπου ισχύει $A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ με $\|\mathbf{x}\| = 1$, παρατηρούμε ότι

$$\|A \mathbf{x}\| = \|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| = |\lambda|,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή του συμμετρικού πίνακα A , τότε το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα είναι αυτό που κάνει το διάνυσμα $A \mathbf{x}$ να έχει ακριβώς ίδιο μήκος με την τιμή $|\lambda|$.

Αυτές οι παρατηρήσεις συμβάλλουν στην παραγοντοποίηση ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, αρκεί να κάνουμε τη μελέτη του μέσω των αντίστοιχων συμμετρικών και θετικά ημιορισμένων πινάκων $A^T A$, AA^T , όπως αποδείχθηκαν στις (1.36)-(1.37). Συνδυάζοντας την (1.37) και την ιδιότητα 10 στην Πρόταση 1.4 συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικοί αριθμοί, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε μια διάταξή τους $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$.

Ορισμός 1.25

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ και $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ οι ιδιοτιμές του $A^T A$ με $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$. Όλες οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών λ_i ονομάζονται **ιδιάζουσες τιμές** (singular values) του A , συμβολίζονται σ_i , δηλαδή

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.38)$$

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν αλγόριθμο για την «παραγοντοποίηση» ενός $m \times n$ πίνακα A με τη χρήση «ειδικών» ορθογωνίων πινάκων.

Θεώρημα 1.5 (ιδιάζουσα παραγοντοποίηση πίνακα)

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ με $\text{rank}(A) = k$. Τότε υπάρχει $m \times n$ πίνακας

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Delta_{k \times k} & \mathbb{O}_{k \times (n-k)} \\ \mathbb{O}_{(m-k) \times k} & \mathbb{O}_{(m-k) \times (n-k)} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

με τον $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, όπου $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ οι ιδιάζουσες τιμές του πίνακα A και υπάρχουν οι $m \times m$ και $n \times n$ ορθογώνιοι πίνακες U, V αντιστοίχως τέτοιοι ώστε

$$A = U \Sigma V^T, \quad (1.40)$$

όπου ο πίνακας V έχει στήλες τα ορθοκανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα $A^T A$ και ο πίνακας U έχει ως στήλες ορθοκανονικά διανύσματα που προκύπτουν

$$\mathbf{u}_i = \frac{1}{\sigma_i} A \mathbf{v}_i, \quad (1.41)$$

όπου \mathbf{v}_i είναι η i -στήλη του ορθογώνιου πίνακα V στην (1.40) για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

Παρατήρηση 1.10

i) Η παραγοντοποίηση του $m \times n$ πίνακα A στη μορφή (1.40) ονομάζεται **ιδιάζουσα ανάλυση** (singular value decomposition, ή συντομογραφικά SVD)²⁵ του A . Ο πίνακας Σ είναι **μοναδικά ορισμένος**, επειδή τα διαγώνια στοιχεία του είναι οι θετικές τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών του πίνακα $A^T A$, ποσότητες μοναδικά

²⁵ Εντολή στη Matlab: $[U, S, V] = \text{svd}(A)$ παρουσιάζει σε έναν πίνακα U τα αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα A , ο S είναι ο πίνακας με τις ιδιάζουσες τιμές όπως στην (1.39) και V είναι ο πίνακας με στήλες τα δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα του πίνακα A .

ορισμένες. Οι πίνακες U, V δεν είναι μοναδικά ορισμένοι, επειδή εξαρτώνται από τα ιδιοδιανύσματα του $A^T A$, οι στήλες του U ονομάζονται **αριστερά ιδιάζοντα διανύσματα** του πίνακα A , και οι στήλες του V ονομάζονται **δεξιά ιδιάζοντα διανύσματα** του A .

Αν η βάση των αριστερών ιδιάζόντων διανυσμάτων του πίνακα A περιέχει λιγότερα διανύσματα από m , αυτή συμπληρώνεται με όσα διανύσματα απαιτούνται (γίνεται επέκταση της βάσης των υπαρχόντων διανυσμάτων), ώστε όλες οι στήλες του U να αποτελούν μια ορθοκανονική βάση διάστασης m .

ii) Αποδεικνύεται ότι η **ιδιάζουσα ανάλυση** (παραγοντοποίηση) του πίνακα $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ στη μορφή (1.40) είναι ισοδύναμη με την

$$A = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \quad (1.42)$$

όπου $k = \text{rank}(A)$, και σ_i είναι οι ιδιάζουσες τιμές του A , $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i$ είναι το αριστερό και δεξιό ιδιάζον διάνυσμα που αντιστοιχεί στη σ_i του A για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

Παράδειγμα 1.15

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογισθούν ορθογώνιοι πίνακες U, V , ώστε ο πίνακας A να παραγοντοποιηθεί στη μορφή (1.40).

Αρχικά ο συμμετρικός πίνακας $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 4 & 8 & -4 & -4 \\ -2 & -4 & 2 & 2 \\ -2 & -4 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, έχει χαρακτηριστικό

πολυώνυμο $\chi_{A^T A}(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 22\lambda + 96) = \lambda^2(\lambda - 6)(\lambda - 16)$. Οι ιδιοτιμές είναι

$\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 6$ και $\lambda_3 = 0$ (διπλή ρίζα). Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$\mathbf{x}_1 = (-1 \ -2 \ 1 \ 2)^T$, $\mathbf{x}_2 = (1 \ 2 \ -1 \ 3)^T$, $\mathbf{x}_3 = (-2 \ 1 \ 0 \ 0)^T$ και

$\mathbf{x}_4 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε **μέθοδο Gram-Schmidt** ανάμεσα

στα δύο τελευταία ιδιοδιανύσματα $\tilde{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{x}_4 - \frac{\mathbf{x}_4 \circ \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|^2} \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{5} \ \frac{2}{5} \ 1 \ 0 \right)^T$. Διαιρώντας

τα διανύσματα με τα μέτρα τους έχουμε τα ορθοκανονικά διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1 \ -2 \ 1 \ 2)^T,$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{15}}(1 \ 2 \ -1 \ 3)^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \ 1 \ 0 \ 0)^T,$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_4}{\|\tilde{\mathbf{x}}_4\|} = \frac{5}{\sqrt{30}}\left(\frac{1}{5} \ \frac{2}{5} \ 1 \ 0\right)^T = \frac{1}{\sqrt{30}}(1 \ 2 \ 5 \ 0)^T.$$

Οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A είναι $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 4$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6}$, ο βαθμός του A είναι $rank(A) = 2$. Επομένως $A\mathbf{v}_3 = A\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Ορίζουμε τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ όπως στην (1.41), οπότε

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1}A\mathbf{v}_1 = \frac{1}{4\sqrt{10}}(-4 \ 12)^T = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1 \ 3)^T,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2}A\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}\sqrt{15}}(9 \ 3)^T = \frac{1}{\sqrt{10}}(3 \ 1)^T.$$

Συνεπώς, ο ορθογώνιος πίνακας U είναι

$$U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

και ο ορθογώνιος πίνακας V είναι

$$V = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{10} & 1/\sqrt{15} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{10} & 2/\sqrt{15} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{15} & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 2/\sqrt{10} & 3/\sqrt{15} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 1.5, οι ορθογώνιοι πίνακες U, V , και ο 2×4 πίνακας

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

επαληθεύουν την (1.40), συνεπώς, ο πίνακας A έχει την ιδιάζουσα ανάλυση

$$A = U\Sigma V^T.$$

◇

Ορισμός 1.26

Έστω $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ένας $n \times m$ πίνακας, που στη συνέχεια σημειώνεται A^+ , ικανοποιεί τις τρεις ακόλουθες ιδιότητες

- i) $AA^+A = A$
- ii) $A^+AA^+ = A^+$
- iii) οι πραγματικοί πίνακες AA^+ και A^+A είναι συμμετρικοί, ονομάζεται γενικευμένος αντίστροφος²⁶ πίνακας του A ή ψευδοαντίστροφος πίνακας του A .

Πρόταση 1.10

Για το γενικευμένο αντίστροφο του $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- i) ο πίνακας A^+ είναι μοναδικός.
- ii) $(A^+)^+ = A$.
- iii) $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1}A^+$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
- iv) Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε $A^+ = A^{-1}$.

Παρατήρηση 1.11

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 1.26 και τις ιδιότητες της Πρότασης 1.10 αποδεικνύεται ότι η μορφή του γενικευμένου αντίστροφου πίνακα του A εξαρτάται από το βαθμό του πίνακα. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι :

- i) Αν ο πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ είναι πλήρους βαθμού ως προς τις στήλες (full column rank), δηλαδή $rank(A) = n$, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T \quad (1.43)$$

Πράγματι, επειδή $rank(A) \leq \min\{m, n\}$ και ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού ως προς τις στήλες συμπεραίνουμε ότι $rank(A) = n (\leq m)$, το οποίο σημαίνει ότι ο πίνακας A έχει n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Επιπλέον, επειδή

²⁶ Στη βιβλιογραφία είναι γνωστός ως generalized inverse matrix ή Moore-Penrose pseudoinverse matrix .

=====
 $rank(A) = rank(A^T) = n$, είναι φανερό ότι $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος (γιατί;). Αντικαθιστώντας την (1.43) επαληθεύονται οι τρεις ιδιότητες του Ορισμού 1.26, συνεπώς, ο πίνακας στην (1.43) ορίζει το γενικευμένο αντίστροφο του A .

Επιπλέον, αντικαθιστώντας την (1.43) στον πίνακα $A^+ A$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $A^+ A = I_n$, άρα επαληθεύεται ο **Ορισμός 1.15**, γι' αυτό λέμε ότι ο πίνακας A^+ αποτελεί έναν **αριστερό αντίστροφο** του A .

- ii) Αν ο πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ είναι **πλήρους βαθμού ως προς τις γραμμές** (full row rank), δηλαδή $rank(A) = m$, τότε ο γενικευμένος αντίστροφος του A δίνεται από τον τύπο:

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (1.44)$$

Πράγματι, επειδή ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού ως προς τις γραμμές συμπεραίνουμε ότι $rank(A) = m (\leq n)$, το οποίο σημαίνει ότι ο A έχει m γραμμικά ανεξάρτητες γραμμές. Επιπλέον, επειδή $rank(A) = rank(A^T) = m$, είναι φανερό ότι AA^T είναι αντιστρέψιμος (γιατί;). Αντικαθιστώντας την (1.44) επαληθεύονται οι τρεις ιδιότητες του Ορισμού 1.26, συνεπώς, ο πίνακας στην (1.44) ορίζει το γενικευμένο αντίστροφο του A . Επιπλέον, αντικαθιστώντας την (1.44) στον πίνακα AA^+ συμπεραίνουμε ότι ισχύει $AA^+ = I_m$, γι' αυτό λέμε ότι ο πίνακας A^+ αποτελεί ένα **δεξιό αντίστροφο** του A .

- iii) Γενικότερα, αν ο πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ έχει $rank(A) = k \leq \min\{m, n\}$, κάνοντας μια κατάλληλη διαμέριση των ορθογωνίων πινάκων U, V που εμφανίζονται στην (1.40), παίρνουμε

$$U = (U_k \ U_{m-k}), \quad \text{όπου } U_k = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_k) \quad (1.45)$$

$$V = (V_k \ V_{n-k}), \quad \text{όπου } V_k = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_k) \quad (1.46)$$

και αντικαθιστώντας στην (1.40) τους παραπάνω πίνακες U, V από τις (1.45)-(1.46) έχουμε

$$A = U \Sigma V^T = (U_k \ U_{m-k}) \begin{pmatrix} \Delta & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_k^T \\ V_{n-k}^T \end{pmatrix} = U_k \Delta V_k^T, \quad (1.47)$$

όπου $\Delta = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k)$, σ_i οι μη μηδενικές ιδιάζουσες τιμές του A . Με βάση την παραγοντοποίηση του πίνακα A στην (1.47) και επειδή ο Δ είναι αντιστρέψιμος

πίνακας (τα διαγώνια στοιχεία του είναι θετικοί αριθμοί), αποδεικνύεται ότι ο $n \times m$ γενικευμένος αντίστροφος πίνακας του A δίνεται από τον τύπο,

$$A^+ = V_k \Delta^{-1} U_k^T. \quad (1.48)$$

Παράδειγμα 1.16

Να υπολογιστούν οι γενικευμένοι αντίστροφοι των πινάκων:

$$\text{i) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Είναι φανερό ότι $\text{rank}(A) = 3$, $\text{rank}(B) = 2$, και $\text{rank}(C) = 2$.

(i) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.11 (i), ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού ως προς τις στήλες. Επειδή $\chi_{A^T A}(\lambda) = \lambda^3 - 16\lambda^2 + 29\lambda - 14$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3(i) από την Πρόταση 1.4 ο πίνακας $A^T A$ είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος πίνακας $(A^T A)^{-1}$ υπολογίζεται από την ιδιότητα 12 της Πρότασης 1.4:

$$(A^T A)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{14} \left((A^T A)^2 - 16A^T A + 29I \right) = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Επομένως, ο γενικευμένος αντίστροφος του A υπολογίζεται από τον τύπο στην (1.43) και ισούται με

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

(ii) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.11 (ii), ο πίνακας B είναι πλήρους βαθμού ως προς τις γραμμές. Επειδή $\chi_{BB^T}(\lambda) = \lambda^2 - 22\lambda^2 + 96$, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα 3(i) από την Πρόταση 1.4 ο πίνακας BB^T είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος πίνακας $(BB^T)^{-1}$ υπολογίζεται από την ιδιότητα 12 της Πρότασης 1.4.

$$(BB^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 15 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{96} (B - 22I) = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

Συνεπώς, από τον τύπο στην (1.44) ο γενικευμένος αντίστροφος του B ισούται με

$$B^+ = B^T (BB^T)^{-1} = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{96} \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ 24 & -8 \\ -12 & 4 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}.$$

(iii) Σύμφωνα με την Παρατήρηση 1.11 (iii), επειδή ο πίνακας C δεν είναι πλήρους βαθμού, $rank(C) = k = 2 < 3$ απαιτείται ο υπολογισμός των ορθογωνίων πινάκων U, V , που χρησιμοποιούνται στην ιδιάζουσα ανάλυση του πίνακα C , όπως αυτή περιγράφεται στο Θεώρημα 1.5.

Ο συμμετρικός πίνακας $C^T C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & -4 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$\chi_{C^T C}(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 - 13\lambda + 12) = \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda - 12)$. Οι ιδιοτιμές είναι $\lambda_1 = 12$, $\lambda_2 = 1$ και $\lambda_{3,4} = 0$ (διπλή ρίζα). Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\mathbf{x}_1 = (-1 \ -2 \ 1 \ 0)^T$, $\mathbf{x}_2 = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$, $\mathbf{x}_3 = (-2 \ 1 \ 0 \ 0)^T$ και $\mathbf{x}_4 = (1 \ 0 \ 1 \ 0)^T$. Χρειάζεται να εφαρμόσουμε μέθοδο Gram-Schmidt ανάμεσα στα δύο τελευταία ιδιοδιανύσματα

$\tilde{\mathbf{x}}_4 = \mathbf{x}_4 - \frac{\mathbf{x}_4 \circ \mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|^2} \mathbf{x}_3 = \left(\frac{1}{5} \ \frac{2}{5} \ 1 \ 0 \right)^T$. Διαιρώντας τα διανύσματα με τα μέτρα τους

έχουμε τα ορθοκανονικά διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{x}_1}{\|\mathbf{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 \ -2 \ 1 \ 0)^T$,

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_2\|} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T,$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{x}_3}{\|\mathbf{x}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2 \ 1 \ 0 \ 0)^T,$$

$$\mathbf{v}_4 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_4}{\|\tilde{\mathbf{x}}_4\|} = \frac{5}{\sqrt{30}} \left(\frac{1}{5} \ \frac{2}{5} \ 1 \ 0 \right)^T = \frac{1}{\sqrt{30}}(1 \ 2 \ 5 \ 0)^T.$$

Οι ιδιάζουσες τιμές του C είναι $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{12}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1$, $\sigma_{3,4} = \sqrt{\lambda_{3,4}} = 0$, συνεπώς ο βαθμός του C είναι $rank(C) = 2$. Επομένως $C\mathbf{v}_3 = C\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$. Από την (1.41) υπολογίζονται τα διανύσματα $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ως ακολούθως

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sigma_1} C\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1 \ 1 \ 0)^T,$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sigma_2} C \mathbf{v}_2 = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

Επειδή ο ορθογώνιος πίνακας U πρέπει να είναι 3×3 θεωρούμε το διάνυσμα $\tilde{\mathbf{u}}_3 = (1 \ 0 \ 0)^T$. Επειδή τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ είναι ορθοκανονικά εφαρμόζουμε **μέθοδο Gram-Schmidt** ανάμεσα στα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ και το $\tilde{\mathbf{u}}_3$, και έχουμε

$$\hat{\mathbf{u}}_3 = \tilde{\mathbf{u}}_3 - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_3 \circ \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 - \frac{\tilde{\mathbf{u}}_3 \circ \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ 0 \right)^T, \quad \text{με} \quad \|\hat{\mathbf{u}}_3\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\text{επομένως} \quad \mathbf{u}_3 = \frac{\hat{\mathbf{u}}_3}{\|\hat{\mathbf{u}}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 \ 1 \ 0)^T.$$

$$\text{Συνεπώς, ο ορθογώνιος πίνακας } U \text{ είναι } U = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{ο ορθογώνιος πίνακας } V \text{ είναι } V = (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{v}_4) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{30} \\ -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 0 & 5/\sqrt{30} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

και από την (1.39) ο 3×4 πίνακας Σ με τις ιδιάζουσες τιμές είναι

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επειδή $\text{rank}(C) = k = 2$, θεωρούμε τις διαμερίσεις των παραπάνω ορθογωνίων πινάκων U, V , όπως υποδεικνύουν οι σχέσεις (1.45) και (1.46), οπότε έχουμε

$$U_2 \equiv (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 \equiv (\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 0 \\ -2/\sqrt{6} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Από την (1.47) ο διαγώνιος πίνακας Δ είναι $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ και από την (1.48)

υπολογίζεται ο γενικευμένος αντίστροφος του C , ο οποίος είναι

$$C^+ = V_2 \Delta^{-1} U_2^T = V_2 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} U_2^T = \begin{pmatrix} 1/12 & -1/12 & 0 \\ 2/12 & -2/12 & 0 \\ -1/12 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$

Παράδειγμα 1.17

Θεωρώντας $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ και χρησιμοποιώντας το γενικευμένο αντίστροφο του πίνακα

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ του Παραδείγματος 1.16 να λυθεί η γραμμική εξίσωση:

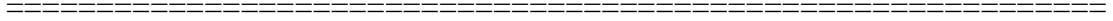
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Επειδή ο πίνακας A είναι πλήρους βαθμού ως προς τις στήλες, όπως αναφέρθηκε στην Παρατήρηση 1.11 (i) ο γενικευμένος αντίστροφος πίνακας A^+ είναι ένας αριστερός αντίστροφος του A , δηλαδή, ισχύει $A^+A = I_3$. Συνδυάζοντας την παραπάνω ιδιότητα και πολλαπλασιάζοντας αριστερά τη δοθείσα εξίσωση επί A^+ καταλήγουμε στη λύση της γραμμικής εξίσωσης, που είναι :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Rightarrow A^+A\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} \Rightarrow I_3\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω ισότητα $\mathbf{x} = A^+\mathbf{b}$ τον πίνακα A^+ , που υπολογίστηκε στο [Παράδειγμα 1.16 \(i\)](#), το σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ έχει μοναδική λύση την

$$\mathbf{x} = A^+\mathbf{b} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 & 0 \\ -6 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \diamond$$



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Θεωρία Perron-Frobenius

Μη-αρνητικοί και θετικοί πίνακες εμφανίζονται κατά την αναπαράσταση και μοντελοποίηση προβλημάτων που σχετίζονται με ποικίλους επιστημονικούς κλάδους, όπως είναι η στατιστική, η βιολογία, οι οικονομικές και οι κοινωνικές επιστήμες. Η επίλυση των προβλημάτων αυτών είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τη γενικότερη θεωρία Πινάκων, γεγονός που μας επιτρέπει να αντλήσουμε άμεσα ορισμένες ιδιότητες για τους πίνακες αυτούς από την εφαρμογή του Ορισμού 1.2 και τις ιδιότητές τους, που διατυπώθηκαν στις Προτάσεις 1.2 και 1.3. Ωστόσο η θεωρία της φασματικής ανάλυσης δίνει σημαντικότερες πληροφορίες για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων, συνήθως συμβάλει στην απλοποίησή τους και επιταχύνει τη λύση τους. Στην παρούσα ενότητα διατυπώνονται οι σημαντικότερες ιδιότητες που σχετίζονται με τη φασματική ακτίνα των πινάκων αυτών.

2.1 Φράγματα φασματικής ακτίνας μη-αρνητικών πινάκων

Η επόμενη πρόταση δίνει την πληροφορία ότι όταν τα στοιχεία ενός πίνακα B είναι μεγαλύτερα ή ίσα από τα στοιχεία που βρίσκονται στις αντίστοιχες θέσεις (ίδια γραμμή και στήλη) στον πίνακα $|A| = (|a_{ij}|)$, (υπενθυμίζουμε ότι $|A| \geq 0$, βλέπε στα σχόλια του Ορισμού 1.3), η φασματική ακτίνα του B , $\rho(B)$, είναι μεγαλύτερη ή ίση από τη φασματική ακτίνα του A . Επίσης η $\rho(A)$ είναι μικρότερη από τη φασματική ακτίνα του $|A|$ (στην περίπτωση που ο πίνακας A έχει αρνητικά στοιχεία) ή ίση (στην περίπτωση που όλα τα στοιχεία του A είναι μηδέν ή θετικά).

Πρόταση 2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{F})$ και $B \in M_n(\mathbb{R})$ με $B \geq 0$. Αν ισχύει $|A| \leq B$, τότε

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

Επειδή για $A \geq 0 \Rightarrow |A| = A$, άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1 είναι η ακόλουθη πρόταση, η οποία δίνει συμπέρασμα για τη διάταξη των φασματικών ακτίνων δύο μη-αρνητικών πινάκων A, B , που σχετίζονται με τη διάταξη των στοιχείων των αντίστοιχων πινάκων.

Πρόταση 2.2

Έστω $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ με $0 \leq A \leq B$. Τότε $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Παράδειγμα 2.1

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Όπως αποδείχθηκε στο Παράδειγμα 1.1, ισχύει $0 \leq B < A$ οπότε εφαρμόζεται η Πρόταση 2.2 και αναμένεται να ισχύει $\rho(B) < \rho(A)$. Πράγματι, οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από την ισότητα

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 4 & 5 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0,$$

συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = -0.2749$ και $\lambda_2 = 7.2749$ κατά συνέπεια η φασματική ακτίνα του A είναι:

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2\} = \max\{|-0.2749|, 7.2749\} = 7.2749.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από

$$\det(B - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0,$$

άρα οι ιδιοτιμές του B είναι $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = 3$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα του B είναι:

$$\rho(B) = \max\{|\lambda_1|, \lambda_2\} = \max\{|-2|, 3\} = 3$$

Από $0 \leq B < A$ καταλήγουμε $\rho(B) \leq \rho(A)$, επαληθεύοντας το συμπέρασμα της Πρότασης 2.2. ◇

Η σχέση που συνδέει τη φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα με τον κύριο υποπίνακά του δίνεται στην επόμενη πρόταση και μάλιστα παρουσιάζεται το πρώτο κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα, το οποίο σχετίζεται με τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

Πρόταση 2.3

Εστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A \geq 0$. Αν \tilde{A} είναι ένας οποιοσδήποτε κύριος υποπίνακας του A , τότε $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$. Ειδικότερα, $\max_{1 \leq i \leq n} \{a_{ii}\} \leq \rho(A)$.

Παράδειγμα 2.2

Εστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 9 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$. Θεωρούμε το 2×2 κύριο υποπίνακα $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Ο πίνακας \tilde{A} ως άνω τριγωνικός έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 4$, (ιδιότητα (1),

Πρόταση 1.4), καθώς και $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ έχει ιδιοτιμές τις λ_1, λ_2 και την $\lambda_3 = 0$.

Προφανώς οι φασματικές ακτίνες είναι $\rho(\tilde{A}) = \rho(\hat{A}) = 4$. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1.4853$ και $\lambda_3 = 15.4853$, οπότε $\rho(A) = 15.4853$. Είναι φανερό ότι επαληθεύεται $\rho(\tilde{A}) \leq \rho(A)$ και επιπλέον ότι ισχύει

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{a_{ii}\} = \max\{1, 4, 7\} = 7 \leq 15.4853 = \rho(A). \quad \diamond$$

Σε ορισμένες περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ενός μη-αρνητικού πίνακα ταυτίζεται με κάποια από τις γνωστές νόρμες των πινάκων, ιδιότητα που περιγράφεται στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4

Εστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A \geq 0$.

i) Αν τα στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζονται στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε $\rho(A) = \|A\|_\infty$.

ii) Αν τα στοιχεία κάθε στήλης αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό, τότε $\rho(A) = \|A\|_1$.

Παράδειγμα 2.3

Έστω οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

➤ Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός και ότι τα

στοιχεία κάθε γραμμής αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στον αριθμό 4. Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 &\Leftrightarrow (2-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-\lambda & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)[(3-\lambda)(2-\lambda)-1] + 1 - (3-\lambda) = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-5\lambda+\lambda^2) - 2 + \lambda = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)[(\lambda^2 - 5\lambda + 5) - 1] = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0 \end{aligned}$$

Άρα $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 4$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(A) = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \max\{1, 2, 4\} = 4.$$

Αν υπολογίσουμε $\|A\|_\infty$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.13) έχουμε:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 |a_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq i \leq 3} \{c_i\} = \max\{c_1, c_2, c_3\} = \\ &= \max\{|a_{11} + a_{12} + a_{13}|, |a_{21} + a_{22} + a_{23}|, |a_{31} + a_{32} + a_{33}|\} = \\ &= \max\{4, 4, 4\} = 4 \end{aligned}$$

Προφανώς $\rho(A) = \|A\|_\infty = 4$ επαληθεύοντας έτσι το (i) της Πρότασης 2.4.

➤ Επίσης ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ είναι μη-αρνητικός και τα στοιχεία κάθε στήλης

αθροίζουν στον ίδιο σταθερό αριθμό και συγκεκριμένα στο 3. Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(B - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) + 4 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$$

Οι ιδιοτιμές του B είναι : $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$ και $\lambda_3 = 3$. Συνεπώς η φασματική ακτίνα είναι:

$$\rho(B) = \max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3 \} = \max \{ |i|, |-i|, 3 \} = \max \{ \sqrt{0^2 + 1^2}, \sqrt{0^2 + (-1)^2}, 3 \} = 3$$

Αν υπολογίσουμε $\|B\|_1$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.14) έχουμε:

$$\|B\|_1 = \max_{1 \leq j \leq 3} \left\{ \sum_{i=1}^3 |b_{ij}| \right\} = \max_{1 \leq j \leq 3} \{b_j\} = \max \{b_1, b_2, b_3\} =$$

$$= \max \{ |b_{11} + b_{21} + b_{31}|, |b_{12} + b_{22} + b_{32}|, |b_{13} + b_{23} + b_{33}| \} = \max \{3, 3, 3\} = 3$$

Προφανώς επαληθεύεται το (ii) της Πρότασης 2.4, επειδή ισχύει $\rho(B) = \|B\|_1 = 3$. \diamond

Στην Πρόταση 2.3 δόθηκε ένα κάτω φράγμα για τη φασματική ακτίνα ενός πίνακα, φράγμα το οποίο εξαρτάται από τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα, στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζεται ένα διάστημα μέσα στο οποίο κυμαίνεται η φασματική ακτίνα, τα άκρα του διαστήματος είναι τα δύο φράγματά της, άνω και κάτω, και εξαρτώνται από τα στοιχεία ενός μη-αρνητικού πίνακα.

Θεώρημα 2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη-αρνητικός πίνακας ($A \geq 0$). Τότε ισχύουν:

$$\min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.1)$$

και

$$\min_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \leq \rho(A) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n a_{ij} \right\} \quad (2.2)$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω ο μη-αρνητικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ποσότητες $\min_{1 \leq i \leq 3} \{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \}$ και $\max_{1 \leq i \leq 3} \{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \}$.

$$\min_{1 \leq i \leq 3} \{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \} = \min \{ a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33} \} = \min \{ 3, 4, 2 \} = 2$$

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{ \sum_{j=1}^3 a_{ij} \} = \max \{ a_{11} + a_{12} + a_{13}, a_{21} + a_{22} + a_{23}, a_{31} + a_{32} + a_{33} \} = \max \{ 3, 4, 2 \} = 4$$

Επομένως σύμφωνα με την ανισότητα (2.1) του Θεωρήματος 2.1 για τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$ θα πρέπει να ισχύει

$$2 \leq \rho(A) \leq 4.$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$

, που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 3\lambda + 7 = 0$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές είναι : $\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i$, $\lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i$ ¹ και $\lambda_3 = 2.8171$. Επομένως η φασματική ακτίνα υπολογίζεται ότι είναι

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \max \{ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3 \} = \\ &= \max \{ \sqrt{0.0914^2 + 1.5737^2}, \sqrt{0.0914^2 + (-1.5737)^2}, 2.8171 \} = \\ &= \max \{ 1.5764, 1.5764, 2.8171 \} = 2.8171, \end{aligned}$$

αποτέλεσμα που επαληθεύει το Θεώρημα 2.1, καθώς $2 < 2.8171 < 4$.

Επίσης, για τον ίδιο πίνακα προκειμένου να επαληθεύσουμε τη (2.2) υπολογίζουμε τις

ποσότητες $\min_{1 \leq j \leq 3} \{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \}$ και $\max_{1 \leq j \leq 3} \{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \}$:

$$\min_{1 \leq j \leq 3} \{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \} = \min \{ a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33} \} = \min \{ 4, 2, 3 \} = 2$$

$$\max_{1 \leq j \leq 3} \{ \sum_{i=1}^3 a_{ij} \} = \max \{ a_{11} + a_{21} + a_{31}, a_{12} + a_{22} + a_{32}, a_{13} + a_{23} + a_{33} \} = \max \{ 4, 2, 3 \} = 4$$

Πράγματι ισχύει $2 \leq \rho(A) \leq 4$. ◇

¹ Όταν ο πίνακας έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ως ρίζα ένα μιγαδικό αριθμό z , σίγουρα θα υπάρχει ως ρίζα (ιδιοτιμή) και ο συζυγής του \bar{z} .

Επειδή τα φράγματα των ανισοτήτων στις (2.1)-(2.2) του Θεωρήματος 2.1 εξαρτώνται από τα στοιχεία του πίνακα, αναρωτιόμαστε αν οι μη-αρνητικοί πίνακες πρέπει να έχουν κάποια συγκεκριμένη μορφή (ως προς τα μηδέν) ώστε το κάτω φράγμα των ανισοτήτων στις (2.1)-(2.2) να είναι θετικός αριθμός, ή μήπως το κάτω φράγμα εξαρτάται μόνο από το φάσμα του πίνακα και δεν μπορεί να αντλείται η πληροφορία από τη μορφή του πίνακα; Γιατί είναι φανερό ότι, όπως παρουσιάζεται και στο επόμενο παράδειγμα, αν οι πίνακες δεν έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή η φασματική ακτίνα τους είναι διάφορη του μηδενός, στην περίπτωση όπου οι πίνακες έχουν το μηδέν ως ιδιοτιμή παρατηρούμε ότι άλλοι έχουν φασματική ακτίνα διάφορη του μηδενός και άλλοι όχι.

Παράδειγμα 2.5

$$\text{Έστω } A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

➤ Παρατηρούμε ότι $A > 0$ και εύκολα διαπιστώνουμε ότι το άθροισμα της κάθε στήλης του A ισούται με το σταθερό αριθμό 3, επομένως σύμφωνα με το (ii) της Πρότασης 2.4 η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = 3$.

Επιπλέον οι ιδιοτιμές του πίνακα A υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2}-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2}-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \frac{15}{4}\lambda - \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = 3$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα A αποτελείται από τρεις διακεκριμένες μη μηδενικές τιμές και είναι $\sigma(A) = \{\lambda_1 = -1.5, \lambda_2 = 0.5, \lambda_3 = 3\}$, από όπου επιβεβαιώνεται ότι η φασματική ακτίνα είναι ο θετικός αριθμός $\rho(A) = 3$.

=====

➤ Για το μη-αρνητικό πίνακα B ισχύει : $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 b_{ij} \right\} = 1$, $\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 b_{ij} \right\} = 2$. Επομένως,

σύμφωνα με το Θεώρημα 2.1 έχουμε $1 \leq \rho(B) \leq 2$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα B υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$\det(B - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 (-\lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = 1$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα B είναι $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$, από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(B) = 1$. Επιπλέον η μία ιδιοτιμή είναι διπλή, όλες δε οι ιδιοτιμές βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα $\rho(B)$.

➤ Για τον πίνακα C ισχύει : $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 c_{ij} \right\} = 1$, $\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 c_{ij} \right\} = 3$. Επομένως, σύμφωνα με

το Θεώρημα 2.1 έχουμε $1 \leq \rho(C) \leq 3$.

Οι ιδιοτιμές του πίνακα C υπολογίζονται από τη λύση της εξίσωσης

$\det(C - \lambda I) = 0$, που είναι:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2$$

Άρα, το φάσμα του πίνακα C αποτελείται από τρεις διακεκριμένες τιμές και είναι $\sigma(C) = \{-2, 0, 2\}$, από όπου προκύπτει ότι η φασματική ακτίνα ισούται με $\rho(C) = 2$. Εδώ η μία ιδιοτιμή βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $(0,0)$, και οι άλλες δύο λ_1, λ_3 έχουν το ίδιο μέτρο με αυτό της φασματικής ακτίνας, άρα αυτές ανήκουν στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας ίσης με τη φασματική ακτίνα $\rho(C)$.

➤ Για τον πίνακα D ισχύει : $\min_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 d_{ij} \right\} = 0$, $\max_{1 \leq i \leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^3 d_{ij} \right\} = 1$. Επομένως, σύμφωνα

με το Θεώρημα 2.1 έχουμε $0 \leq \rho(D) \leq 1$. Επιπλέον, ο πίνακας είναι άνω τριγωνικός, συνεπώς οι ιδιοτιμές του είναι τα διαγώνια στοιχεία του (βλέπε,

ιδιότητα (1), Πρόταση 1.4), άρα $\sigma(D) = \{0, 0, 0\}$, δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι $\rho(D) = 0$, και μάλιστα το μηδέν είναι τριπλή ιδιοτιμή του πίνακα D . \diamond

Πρόταση 2.5

Εστω $A \in M_n(\mathbb{R})$.

- i) Αν A είναι μη-αρνητικός ($A \geq 0$) και $\sum_{j=1}^n a_{ij} > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\rho(A) > 0$.
- ii) Αν $A > 0$, τότε $\rho(A) > 0$.
- iii) Αν A είναι μη-αναγώγιμος (*irreducible*) και μη-αρνητικός ($A \geq 0$), τότε $\rho(A) > 0$.

Σχόλια: Στο ερώτημα «για ποιους πίνακες ισχύει $\rho(A) \neq 0$ » απαντούν οι περιπτώσεις που παρουσιάζονται στην Πρόταση 2.5, από όπου είναι φανερό ότι η απάντηση δε σχετίζεται με το αν το μηδέν υπάρχει στο φάσμα του πίνακα ή όχι, αλλά μόνο από τα στοιχεία του πίνακα. Οι πίνακες του Παραδείγματος 2.5 επαληθεύουν τα προηγούμενα συμπεράσματα.

Συγκεκριμένα, ο πίνακας A είναι θετικός, επομένως από το (ii) της Πρότασης 2.5 είναι αναμενόμενο να έχει $\rho(A) > 0$.

Οι μη-αρνητικοί πίνακες B, C ικανοποιούν την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (i), μια και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής τους είναι θετικός αριθμός, επομένως είναι αναμενόμενο η φασματική τους ακτίνα να είναι θετική. Εδώ σημειώστε ότι ο πίνακας B είναι αντιστρέψιμος και αναγώγιμος (ελέγξτε και διαπιστώστε ότι $(I + B)^2 \geq 0$, οπότε από Πρόταση 1.1 είναι αναγώγιμος), ενώ ο πίνακας C είναι μη-αντιστρέψιμος και μη-αναγώγιμος (ελέγξτε και διαπιστώστε ότι $(I + C)^2 > 0$), άρα ο C επαληθεύει και την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (iii).

Ο πίνακας $D \geq 0$ δεν ικανοποιεί την υπόθεση της Πρότασης 2.5 (i), διότι η τελευταία γραμμή έχει το άθροισμα των στοιχείων της ίσο με μηδέν, και επιπλέον ο πίνακας D είναι αναγώγιμος, γιατί έχει μηδενική γραμμή, (βλέπε σχόλια του Ορισμού 1.10), συνεπώς είναι αναμενόμενο ότι $\rho(D) = 0$.

=====

Χρειάζεται να τονίσουμε ότι ένας $A \geq 0$ και αναγωγίμος μπορεί να έχει $\rho(A) \neq 0$, αρκεί να ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.5 (i), όπως συνέβη με τον πίνακα B του Παραδείγματος 2.5.

2.2 Θετικοί πίνακες

Πίνακες που πολύ συχνά προκύπτουν στις εφαρμογές είναι πίνακες με θετικά στοιχεία μόνο, γι' αυτό αυτοί οι πίνακες εξετάζονται ξεχωριστά, όπως και οι μη-αρνητικοί πίνακες. Το βασικό θεώρημα των Perron-Frobenius τέτοιους πίνακες μελετά και όπως είναι φυσικό αρκετοί ερευνητές σε ποικίλες ερευνητικές περιοχές έχουν παρουσιάσει ένα μεγάλο πλήθος θεωρημάτων, προτάσεων και πορισμάτων γι' αυτούς.

Σημειώνεται ότι το ακόλουθο θεώρημα έχει το όνομα δύο κορυφαίων γερμανών μαθηματικών των Perron-Frobenius, ωστόσο το ακόλουθο που αφορά θετικό πίνακα, αποδείχθηκε το 1907 από τον Oskar (Oscar) Perron και η γενίκευσή του, που αναφέρεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, αποδείχθηκε το 1912 από τον Ferdinand Georg Frobenius.

Θεώρημα 2.2 (Perron-Frobenius)

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A > 0$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- i) $\rho(A) > 0$.
- ii) $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1, δηλαδή, $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A .
- iii) $|\lambda| < \rho(A)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(A)$, οπότε η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.
- iv) Υπάρχει διάνυσμα με θετικά στοιχεία ως συντεταγμένες ($\mathbf{x} > 0$) τέτοιο ώστε να ισχύει $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Σχόλια : i) Συνδυάζοντας το (ii) και (iii) του Θεωρήματος 2.2 (Perron-Frobenius) συμπεραίνουμε ότι σε ένα θετικό πίνακα η μοναδική ιδιοτιμή, η οποία βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου, που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$, είναι αυτή που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα, και όλες οι άλλες ιδιοτιμές βρίσκονται στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου.

ii) Το μοναδικό θετικό ιδιοδιάνυσμα $x > 0$ για το οποίο ισχύει $Ax = \rho(A)x$ σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 (Perron-Frobenius) μπορεί να έχει μέτρο ίσο με 1, αρκεί να διαιρέσουμε το ιδιοδιάνυσμα με το μέτρο του· στην περίπτωση αυτή θα ισχύει

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Ορισμός 2.1

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$. Η θετική ιδιοτιμή του A που ισούται με τη $\rho(A)$ ονομάζεται **ρίζα Perron** (Perron root) και το αντίστοιχο μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμά της ονομάζεται **διάνυσμα Perron** (Perron vector). Το διάνυσμα Perron του A^T ονομάζεται **αριστερό διάνυσμα Perron** (left Perron vector) του A .

Παράδειγμα 2.6

Έστω ο θετικός πίνακας $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας είναι κατά γραμμή στοχαστικός², και από την ιδιότητα (11) τις υποενότητας 1.3.3 Ιδιότητες νορμών η φασματική ακτίνα είναι $\rho(A) = 1$. Οι ιδιοτιμές του A που προκύπτουν ως ρίζες της εξίσωσης $\det(A - \lambda I) = 0$ είναι :

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = -0.1377, \lambda_2 = 0.121, \lambda_3 \equiv \rho(A) = 1\}.$$

Το φάσμα του πίνακα A επαληθεύει τα συμπεράσματα (i) - (iii) του Θεωρήματος 2.2, δηλαδή η φασματική ακτίνα είναι η μεγαλύτερη θετική ιδιοτιμή του πίνακα A και όλες οι άλλες ιδιοτιμές έχουν μέτρο μικρότερο από τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$.

Το δε ιδιοδιάνυσμα που υπολογίζεται από τη λύση της εξίσωσης $(A - \lambda_3 I)x = 0$ είναι ένα θετικό ιδιοδιάνυσμα επαληθεύοντας το συμπέρασμα (iv) του Θεωρήματος 2.2. Πράγματι:

² Βλέπε, στον Ορισμό 1.8.

$$\begin{aligned}
 (A - \lambda_3 I) \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow (A - I) \mathbf{x} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{matrix} \\
 &\Rightarrow \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R} - \{0\}
 \end{aligned}$$

οποιαδήποτε $x_3 > 0$ και να επιλέξουμε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα της φασματικής ακτίνας είναι ένα διάνυσμα με συντεταγμένες θετικούς αριθμούς. \diamond

2.3 Μη-αρνητικοί πίνακες και θεωρία Perron-Frobenius

Στην παρούσα ενότητα θα μελετήσουμε ποιες από τις χαρακτηριστικές ιδιότητες των θετικών πινάκων που διατυπώθηκαν στο Θεώρημα 2.2 εκλείπουν και ποιες διατηρούνται στην περίπτωση μη-αρνητικών πινάκων. Παίρνοντας αφορμή από τους μη-αρνητικούς πίνακες που παρουσιάστηκαν στο Παράδειγμα 2.5 και οι οποίοι έχουν φασματική ακτίνα διαφορετική από το μηδέν και από την ιδιότητα που παρουσιάζει η ρίζα Perron των θετικών πινάκων, για τους μη-αρνητικούς πίνακες αναρωτιώμαστε:

- α) αν η φασματική ακτίνα μη-αρνητικών πινάκων ταυτίζεται με θετική πραγματική ιδιοτιμή ή όχι.
- β) ποια είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής που αντιστοιχεί στη φασματική ακτίνα; Η πολλαπλότητα σχετίζεται με τη θέση και την ποσότητα των μηδενικών στοιχείων του πίνακα ή με κάποια χαρακτηριστική ιδιότητά τους (π.χ. ανάγωγους, συμμετρικούς);
- γ) υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα με μέτρο ίσο με αυτό της φασματικής ακτίνας; Πόσες είναι οι ιδιοτιμές που έχουν την προαναφερθείσα ιδιότητα;

Το ακόλουθο θεώρημα, δίνει απάντηση στο πρώτο από τα προαναφερθέντα ερωτήματα, μια και αποδεικνύεται ότι η φασματική ακτίνα είναι μία πραγματική θετική ιδιοτιμή του μη-αρνητικού πίνακα και επιπλέον το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτήν είναι μη-αρνητικό διάνυσμα.

Θεώρημα 2.3

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ και $A \geq 0$, τότε $\rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή του A και υπάρχει ένα μη-αρνητικό διάνυσμα $x \geq 0$, $x \neq 0$, τέτοιο ώστε $Ax = \rho(A)x$.

Σχόλια : i) Το Θεώρημα 2.3, που εφαρμόζεται σε μη-αρνητικούς πίνακες, μια ευρύτερη κατηγορία πινάκων από τους θετικούς, αποτελεί γενίκευση των αποτελεσμάτων του Θεωρήματος 2.2 και μας πληροφορεί ότι η $\rho(A)$ είναι μια ιδιοτιμή του πίνακα A και όχι απλά η απόλυτη τιμή μιας από τις ιδιοτιμές του.

Συνεπώς, οι τιμές $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ **δεν μπορεί** να αποτελούν ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα A , καθώς στην περίπτωση αυτή έχουμε

$$\rho(A) = \max \{|\lambda_1|, \lambda_2, \lambda_3\} = \max \{4, 1, 3\} = 4.$$

Η τιμή της φασματικής ακτίνας είναι η απόλυτη τιμή της λ_1 και όχι η ίδια η λ_1 . Επιπρόσθετα οι τιμές $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ είναι πιθανές ιδιοτιμές ενός μη-αρνητικού πίνακα όπως και οι $\lambda_1 = -4, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$, επειδή και στις δύο περιπτώσεις η φασματική ακτίνα ισούται με την ιδιοτιμή λ_3 .

ii) Παίρνοντας αφορμή από τους πίνακες των Παραδειγμάτων 2.3 και 2.4, χρειάζεται να επισημάνουμε ότι οι ιδιοτιμές ενός $A \geq 0$ μπορεί να είναι και μιγαδικοί αριθμοί, ωστόσο η φασματική ακτίνα αντιστοιχεί σε ιδιοτιμή, που είναι πραγματικός θετικός αριθμός, (βλέπε, τον πίνακα B στο Παράδειγμα 2.3 και τον A στο Παράδειγμα 2.4).

iii) Στο Θεώρημα 2.3 για μη-αρνητικούς πίνακες αποδείχθηκε ότι η ιδιοτιμή στην οποία αντιστοιχεί η φασματική ακτίνα του πίνακα είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός χωρίς να γνωρίζουμε πληροφορίες για την πολλαπλότητα αυτής της ιδιοτιμής, πληροφορίες τις οποίες έδινε το Θεώρημα 2.2 (κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες).

Υπενθυμίζουμε ότι στο Παράδειγμα 2.5 ο μη-αρνητικός και αναγώγιμος πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

έχει φάσμα $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$, άρα $\rho(B) = \lambda = 1$, και η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής $\lambda = 1$ είναι ίση με 2, ενώ ο μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος πίνακας

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

έχει φάσμα $\sigma(C) = \{-2, 0, 2\}$, και όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα έχουν αλγεβρική πολλαπλότητα ίση με 1 και $\rho(C) = 2$.

Το επόμενο θεώρημα είναι γνωστό ως γενικευμένο θεώρημα Perron-Frobenius, η απόδειξη μπορεί να αναζητηθεί³.

³ R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005, [βλέπε, Theorem 8.4.4].

Θεώρημα 2.4

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη-αναγώγιμος (*irreducible*) πίνακας με $A \geq 0$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

- i) $\rho(A) > 0$.
- ii) $\rho(A)$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα A με αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα ίση με 1, δηλαδή, $\rho(A)$ είναι απλή ιδιοτιμή του A .
- iii) Υπάρχει διάνυσμα με θετικά στοιχεία ως συντεταγμένες ($\mathbf{x} > 0$) τέτοιο ώστε να ισχύει $A\mathbf{x} = \rho(A)\mathbf{x}$.

Σχόλια: i) Όπως στο Θεώρημα 2.2 (κλασικό θεώρημα Perron-Frobenius για θετικούς πίνακες) έτσι και στη γενικότερη περίπτωση των μη-αρνητικών πινάκων A η θετική ιδιοτιμή ταυτίζεται με τη φασματική ακτίνα $\rho(A)$, η οποία ονομάζεται **ρίζα Perron** και το αντίστοιχο θετικό ιδιοδιάνυσμά της **διάνυσμα Perron**.

ii) Θεωρητικά, δεν υπάρχει δυσκολία για τον καθορισμό των ιδιοτιμών ενός πίνακα $A \in M_n(\mathbb{R})$, στην πράξη συμβαίνει το αντίθετο, επειδή μόνο ο υπολογισμός της ορίζουσας $\det(A - \lambda I)$ απαιτεί $n!$ πολλαπλασιασμούς, είναι άμεσα αντιληπτό ότι για μεγάλη τιμή του n το πλήθος των πράξεων του προβλήματος εύρεσης ιδιοτιμών είναι αριθμός απαγορευτικός. Επιπρόσθετα, ο υπολογισμός των ριζών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι άλλο ένα δύσκολο αλγεβρικά και υπολογιστικά πρόβλημα, γι' αυτό στην πράξη χρησιμοποιούμε αριθμητικές μεθόδους. Ο απλούστερος, αλλά κάποιες φορές, χρονοβόρος τρόπος εύρεσης της φασματικής ακτίνας παρακάμπτει τον υπολογισμό όλων των ιδιοτιμών λ_i και στη συνέχεια την επιλογή της ιδιοτιμής εκείνης που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή $|\lambda|$ από όλες τις υπόλοιπες με την ανάπτυξη αλγορίθμων, οι οποίοι υπολογίζουν τη φασματική ακτίνα, χωρίς τον υπολογισμό των υπόλοιπων ιδιοτιμών. Οι αλγόριθμοι αυτοί είναι

- ο γνωστός ως αλγόριθμος της Δυναμικής Μεθόδου (Power Method), καθώς και
- ένας ο αλγόριθμος των Chengming Wen και Ting-Zhu Huang⁴.

⁴ Chengming Wen και Ting-Zhu Huang, (2011). A modified algorithm for the Perron root of a nonnegative matrix, Applied Mathematics and Computation, 217(9), pp. 4453–4458.

=====
iii) Στο γενικευμένο Perron-Frobenius (βλέπε, Θεώρημα 2.4) δεν δόθηκαν πληροφορίες για το μέτρο όλων των άλλων ιδιοτιμών του μη-αρνητικού πίνακα σε σχέση με τη ρίζα Perron και είναι το μόνο σημείο στο οποίο διαφέρει το κλασσικό θεώρημα Perron-Frobenius, που αναφέρεται σε θετικούς πίνακες από το γενικευμένο.

Παράδειγμα 2.7

Έστω οι μη-αρνητικοί πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

➤ Ο πίνακας A είναι ο μη-αρνητικός πίνακας του Παραδείγματος 2.4, όπου υπολογίστηκε ότι

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \lambda_3\} = \max\{1.5764, 1.5764, 2.8171\} = 2.8171,$$

επειδή το φάσμα του είναι

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 0.0914 + 1.5737i, \lambda_2 = 0.0914 - 1.5737i, \lambda_3 = 2.8171\}.$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι A είναι μη-αναγώγιμος, επειδή

$$(I + A)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 12 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix} > 0,$$

(βλέπε, Πρόταση 1.1). Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.4, από όπου είναι αναμενόμενο ότι $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$ είναι μία απλή ιδιοτιμή του A .

Επιπλέον σημείωσε ότι ισχύει $|\lambda_{1,2}| < \rho(A)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda_{1,2} \neq \rho(A)$, δηλαδή η $\rho(A)$ είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο.

➤ Ο πίνακας B του Παραδείγματος 2.5 έχει φάσμα $\sigma(B) = \{-1, 1, 1\}$, η ρίζα Perron $\rho(B) = 1$ είναι αναμενόμενο να έχει πολλαπλότητα διαφορετική του 1, επειδή ο πίνακας B είναι αναγώγιμος, συνεπώς, δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του γενικευμένου θεωρήματος Perron-Frobenius Θεώρημα 2.4.

➤ Ο πίνακας C αναφέρεται στο Παράδειγμα 2.5 έχει φάσμα

$$\sigma(C) = \{\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2\}.$$

Χρειάζεται να σημειώσουμε ότι είναι μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος, επειδή

$$(I + C)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} > 0.$$

Επομένως, εφαρμόζεται το Θεώρημα 2.4, από όπου είναι αναμενόμενο να υπολογίζεται ότι $\rho(C) = \lambda_3 = 2$ είναι μία απλή ιδιοτιμή του πίνακα. Όμως **δεν** ισχύει $|\lambda| < \rho(C)$ για κάθε ιδιοτιμή $\lambda \neq \rho(C)$, δηλαδή η $\rho(C)$ **δεν** είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο. \diamond

Από το παραπάνω Παράδειγμα 2.7 παρατηρούμε ότι οι μη-αρνητικοί και ανάγωγοι πίνακες A και C επαληθεύουν τα συμπεράσματα του γενικευμένου Θεωρήματος 2.4 των Perron-Frobenius, αφού η φασματική τους ακτίνα είναι μια απλή θετική ιδιοτιμή τους, ωστόσο η φασματική ακτίνα δεν είναι η μοναδική ιδιοτιμή με το μέγιστο μέτρο. Άρα χρησιμοποιώντας γνωστές έως εδώ κατηγορίες μη-αρνητικών πινάκων δεν μπορούμε να παράγουμε ένα κριτήριο το οποίο να εντοπίζει, αν υπάρχουν ή όχι, άλλες ιδιοτιμές του πίνακα (εκτός της φασματικής ακτίνας) πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου με κέντρο στην αρχή των αξόνων και ακτίνα ίση με τη φασματική ακτίνα. Έτσι αναγκάζομαστε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό για να απαντήσουμε με αυτόν τον τρόπο στο τρίτο ερώτημα που τέθηκε στην αρχή αυτής της ενότητας.

Ορισμός 2.2

Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ ένας μη-αρνητικός και μη-αναγώγιμος. Αν ο πίνακας A έχει μία μόνο ιδιοτιμή πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(A)$ ονομάζεται **πρωταρχικός πίνακας** (primitive). Σε αντίθετη περίπτωση, όπου υπάρχουν περισσότερες από μία ιδιοτιμές πάνω στην περιφέρεια του κυκλικού δίσκου κέντρου μηδέν και ακτίνας $\rho(A)$ ο πίνακας A ονομάζεται **μη-πρωταρχικός** (imprimitive).

Η επόμενη πρόταση⁵ δίνει ικανές και αναγκαίες συνθήκες σύμφωνα με τις οποίες μπορούμε να εξετάσουμε αν ένας μη-αρνητικός πίνακας A είναι πρωταρχικός.

⁵ R.A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix analysis*, Cambridge University Press, 2005, [βλέπε, Theorem 8.5.2 και Corollary 8.5.9].

Η μία συνθήκη εξαρτάται από έναν k άγνωστο φυσικό αριθμό και σχετίζεται με τη k -δύναμη του πίνακα A και η άλλη συνθήκη σχετίζεται με δύναμη του πίνακα A γνωστή εκ των προτέρων, η οποία εξαρτάται από το μέγεθος του πίνακα.

Θεώρημα 2.5

Εστω πίνακας $A \in M_n(\mathbb{R})$ με $A \geq 0$ και μη-αναγώγιμος (*irreducible*). Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- i) A είναι πρωταρχικός.
- ii) $A^k > 0$, για κάποιο $k \geq 1$.
- iii) $A^{n^2-2n+2} > 0$.

Παράδειγμα 2.8

➤ Εφαρμόζοντας την ισοδυναμία (iii)-(i) του Θεωρήματος 2.5 διαπιστώνουμε ότι ο πίνακας A του προηγούμενου Παραδείγματος 2.7 είναι πρωταρχικός, μια και ισχύει

$$A^5 = \begin{pmatrix} 61 & 32 & 70 \\ 105 & 61 & 96 \\ 48 & 35 & 61 \end{pmatrix} > 0.$$

Επομένως επαληθεύεται ο Ορισμός 2.2, οπότε όλες οι άλλες ιδιοτιμές, εκτός της φασματικής ακτίνας, ανήκουν εντός του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(A) = \lambda_3 = 2.8171$.

➤ Εξετάζοντας αν ισχύει η σχέση (iii) του Θεωρήματος 2.5 διαπιστώνουμε ότι για τον πίνακα C του προηγούμενου Παραδείγματος 2.7 έχουμε

$$C^5 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & 0 \\ 32 & 0 & 16 \\ 0 & 32 & 0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

συνεπώς ο πίνακας C είναι μη-πρωταρχικός. Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2, υπάρχουν και άλλες ιδιοτιμές του πίνακα, εκτός της φασματικής ακτίνας, που έχουν μέτρο ίσο με τη φασματική ακτίνα $\rho(C) = \lambda_3 = 2$.

➤ Τέλος, για να μη θεωρηθεί ότι ο προηγούμενος πίνακας C είναι ειδικής μορφής πίνακας (τριδιαγώνιος), ας θεωρήσουμε το μη-αρνητικό πίνακα

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας D έχει το ίδιο πλήθος μηδενικών που έχει και ο C σε διαφορετικές θέσεις. Το φάσμα του D είναι το σύνολο

$$\sigma(D) = \{ \lambda_1 = 1.3247, \lambda_2 = -0.6624 + 0.5623i, \lambda_3 = -0.6624 - 0.5623i \},$$

τα μέτρα των ιδιοτιμών είναι $|\lambda_1| = 1.3247$, $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.8688$, από όπου είναι φανερό ότι η φασματική ακτίνα είναι $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$, εδώ παρατηρούμε ότι όλες οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες.

Ο πίνακας D είναι μη-αναγώγιμος, επειδή

$$(I + D)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} > 0,$$

και είναι πρωταρχικός (βλέπε, Θεώρημα 2.5-(iii)-(i)), επειδή ισχύει

$$D^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} > 0.$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές λ_2, λ_3 έχουν μέτρο μικρότερο από $\rho(D) = \lambda_1 = 1.3247$, επειδή ανήκουν στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $\rho(D)$, (όχι πάνω στην περιφέρεια). \diamond