

Κεφάλαιο 6

Διανυσματικοί χώροι με εσωτερικό γινόμενο

6.1 Βασικοί ορισμοί και Ιδιότητες

Στο Κεφάλαιο 4 στο χώρο \mathbb{R}^n ορίστηκε το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο, μέσω του οποίου εκφράζονται οι γεωμετρικές έννοιες του μήκους, της καθετότητας και της γωνίας, που δημιουργείται ανάμεσα σε δύο διανύσματα. Σε αυτήν την ενότητα γενικεύονται οι προηγούμενες έννοιες, για οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης.

Σημειώνεται ότι, στη συνέχεια, με \mathbb{F} συμβολίζεται το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} ή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών \mathbb{C} .

Ορισμός 6.1

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος. Μία απεικόνιση

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F} : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** στο V , όταν, για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ και $a, b \in \mathbb{F}$, ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\text{i) } \langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\text{ii) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$\text{iii) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$$

$$\text{iv) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}_V$$

Αν το σύνολο των συντελεστών \mathbb{F} είναι το \mathbb{R} ή \mathbb{C} , ο διανυσματικός χώρος V , με εσωτερικό γινόμενο, ονομάζεται **Ευκλείδειος** ή **ορθομοναδιαίος** διανυσματικός χώρος, αντίστοιχα.

Παρατήρηση 6.1 i) Με $\overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$ συμβολίζεται ο συζυγής μιγαδικός αριθμός του $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{C}$.

ii) Από την ιδιότητα (i) συμπεραίνουμε ότι η απεικόνιση του εσωτερικού γινομένου είναι γραμμική ως προς την πρώτη συντεταγμένη.

iii) Όταν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, η ιδιότητα (ii) γράφεται $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$, οπότε το εσωτερικό γινόμενο σε Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο έχει τις ίδιες ιδιότητες με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο (Πρόταση 4.2), γι' αυτό διατηρήσαμε τον ίδιο συμβολισμό.

Παράδειγμα 6.1

i) Στο χώρο \mathbb{R}^n , η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, με τύπο

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad (6.1)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, ως προς την κανονική βάση του χώρου, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο, διότι ισχύουν όλες οι ιδιότητες που απαιτούνται από τον Ορισμό 6.1, (βλέπε και σύγκρινε με την ισότητα στην (4.5)). Συνεπώς, ο χώρος \mathbb{R}^n είναι ένας Ευκλείδειος διανυσματικός χώρος. Το εσωτερικό γινόμενο στην (6.1) είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στην ενότητα 4.1.3, (Ορισμός 4.3).

ii) Στο χώρο \mathbb{C}^n , η απεικόνιση $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, με τύπο

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \cdots + x_n \bar{y}_n, \quad (6.2)$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο. Συνεπώς, ο χώρος \mathbb{C}^n είναι ένας ορθομοναδιαίος διανυσματικός χώρος. Το εσωτερικό γινόμενο, που ορίζεται από την ισότητα στην (6.2), ονομάζεται σύνηθες ή κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο \mathbb{C}^n .

iii) Έστω $C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχής συνάρτηση}\}$. Το $C([a, b], \mathbb{R})$ είναι ένας \mathbb{R} -διανυσματικός χώρος (Παράδειγμα 4.1 (v)). Αν ορίσουμε

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (6.3)$$

επαληθεύονται όλες οι ιδιότητες του Ορισμού 6.1. Συνεπώς, το ορισμένο ολοκλήρωμα στην (6.3) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο στο διανυσματικό χώρο $C([a, b], \mathbb{R})$. ◆◆◆

Στην πρόταση, που ακολουθεί, διατυπώνονται και αποδεικνύονται ιδιότητες, που αποτελούν άμεση συνέπεια του Ορισμού 6.1.

Πρόταση 6.1

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$, $a, b \in \mathbb{F}$, ισχύουν τα εξής:

$$\text{i) } \langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = \bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{b} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

$$\text{ii) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{0}_V \rangle = \langle \mathbf{0}_V, \mathbf{u} \rangle = 0$$

iii) αν για κάποιο \mathbf{z} ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = 0$, τότε $\mathbf{z} = \mathbf{0}_V$

$$\text{iv) } \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη : i) Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες (ii) και (i) του Ορισμού 6.1 έχουμε :

$$\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = \overline{\langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{a \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + b \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \overline{a \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle} + \overline{b \langle \mathbf{w}, \mathbf{u} \rangle} = \bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{b} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$$

ii) Συνδυάζοντας την προηγούμενη ιδιότητα με την $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$ έχουμε :

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}_V \rangle = \langle \mathbf{u}, 0\mathbf{u} \rangle = 0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \mathbf{0}_V, \mathbf{u} \rangle = \langle 0\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$$

iii) Αν θεωρήσουμε $\mathbf{z} = \mathbf{u}$, τότε, από την ιδιότητα (iv) του Ορισμού 6.1, ισχύει $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{z} \rangle = 0$, αν και μόνο αν $\mathbf{z} = \mathbf{0}_V$.

iv) Από την ιδιότητα (ii) του Ορισμού 6.1 γράφουμε $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$, από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \in \mathbb{R}$. ◆◆◆

Έστω ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος V με $\dim V = n$ και $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση του V . Σύμφωνα με την Πρόταση 4.10, κάθε διάνυσμα του V γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B , δηλαδή για κάθε διάνυσμα $\mathbf{u} \in V$ υπάρχει μοναδική n -άδα αριθμών x_1, x_2, \dots, x_n , τέτοια ώστε

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n.$$

Έστω ότι έχουμε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Τότε, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχουν μοναδικοί αριθμοί $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{F}$, τέτοιοι ώστε

$$\mathbf{u} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n x_i\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \dots + y_n\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n y_i\mathbf{v}_i. \quad (6.4)$$

Για το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, συνδυάζοντας τη γραφή των διανυσμάτων από την (6.4) με την ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1 και της Πρότασης 6.1, μπορούμε να γράψουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Επομένως, για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$, θέτοντας

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = a_{ij}, \quad (6.5)$$

το εσωτερικό γινόμενο των τυχαίων διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ γράφεται

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{v}_i, \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{v}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j a_{ij}. \quad (6.6)$$

Ορισμός 6.2

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση του V . Ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **πίνακας του εσωτερικού γινομένου** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ως προς τη βάση B , αν τα στοιχεία του A ορίζονται όπως στην ισότητα της (6.5).

Παρατήρηση 6.2 i) Όταν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ο πίνακας A του εσωτερικού γινομένου είναι ένας πραγματικός συμμετρικός πίνακας. Πράγματι, σύμφωνα με την Παρατήρηση 6.1. (iii) ισχύει

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = a_{ji},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $A = A^t$.

Όταν η βάση του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n είναι η κανονική, επειδή $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle = 1$ και $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$, ο πίνακας A είναι ο μοναδιαίος I_n .

ii) Όταν $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, ο πίνακας A του εσωτερικού γινομένου είναι Ερμιτιανός. Πράγματι, σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1. (ii), ισχύει

$$a_{ij} = \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle} = \bar{a}_{ji},$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $A = \overline{A^t} = A^*$.

iii) Έστω $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μία βάση του V . Από το Κεφάλαιο 4, είναι γνωστό ότι σε κάθε διάνυσμα u αντιστοιχεί ένας πίνακας-στήλη με στοιχεία τις x_i συντεταγμένες του διανύσματος u , όπως αυτές υπολογίζονται από στις ισότητες στην (6.4), δηλαδή ο πίνακας $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$. Όμοια στο διάνυσμα v αντιστοιχεί ο πίνακας $y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_n)^t$. Από την ισότητα στην (6.6) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων γράφεται ως γινόμενο πινάκων

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j a_{ij} = x^t A \bar{y} = \bar{y}^t A x = y^* A x, \quad (6.7)$$

όπου $A = (a_{ij})$ είναι ο πίνακας του εσωτερικού γινομένου, ως προς τη βάση B του διανυσματικού χώρου V , ενώ τα a_{ij} δίνονται στην (6.5).

iv) Αν θεωρήσουμε την κανονική βάση e_1, e_2, \dots, e_n στο διανυσματικό χώρο \mathbb{R}^n , σύμφωνα με την (4.20), κάθε διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ γράφεται

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$ και σε αυτό αντιστοιχεί ο πίνακας στήλη $x = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$, (Παρατήρηση 4.1 αντιστοιχία (ii)-(iii)). Επίσης, ο πίνακας του εσωτερικού γινομένου είναι ο μοναδιαίος (Παρατήρηση 6.2 (i)), οπότε για τα διανύσματα $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ σύμφωνα με την (6.7) έχουμε ότι

$$\langle x, y \rangle = x^t y.$$

Συνδυάζοντας την τελευταία ισότητα με την (6.1), καταλήγουμε στη σχέση

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = x^t y, \quad (6.8)$$

που είναι η ισότητα την οποία είχαμε επισημάνει στην (4.6). Επίσης, αν $x, y \in M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ ισχύει η ισότητα στην (6.8), επειδή υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων και των πινάκων, (Παρατήρηση 4.1 αντιστοιχία (ii)-(iii)).

v) Με ανάλογο τρόπο όπως στο (iv) μπορούμε να αποδείξουμε ότι στο διανυσματικό χώρο \mathbb{C}^n , το σύνθετο εσωτερικό γινόμενο, που ορίστηκε στην (6.2), αν το συνδυάσουμε με την τελευταία ισότητα στην (6.7), γράφεται :

$$\langle x, y \rangle = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + \dots + x_n \bar{y}_n = x^t \bar{y} = y^* x \quad (6.9)$$

Στην περίπτωση όπου έχουμε $x, y \in M_{n \times 1}(\mathbb{C})$, ισχύει η ισότητα στην (6.9), διότι υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων και των πινάκων.

Στη συνέχεια, ορίζεται η έννοια του μέτρου (μήκους) ενός διανύσματος του V , η οποία επεκτείνει τη γνωστή έννοια μέτρου ενός διανύσματος του \mathbb{R}^n , που διατυπώθηκε στο Κεφάλαιο 4. Με βάση τον ορισμό του μέτρου και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μελετώνται «γεωμετρικές έννοιες» του V , αντίστοιχες των εννοιών του χώρου \mathbb{R}^n .

Ορισμός 6.3

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (6.10)$$

ονομάζεται **μέτρο (norm)** ή **μήκος** του διανύσματος $\mathbf{u} \in V$.

Το μέτρο της διαφοράς δύο διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ονομάζεται **απόσταση μεταξύ των διανυσμάτων** και συμβολίζεται

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|. \quad (6.11)$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.1 (iv), η ισότητα στην (6.10) είναι καλά ορισμένη και επιπλέον ισχύει $\|\mathbf{u}\| = 0$ μόνο για το μηδενικό διάνυσμα (Ορισμός 6.1 (iv)).

Επίσης, όταν ισχύει $\|\mathbf{u}\| = 1$, το διάνυσμα \mathbf{u} ονομάζεται **μοναδιαίο**.

Για παράδειγμα, ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, που ορίστηκε στην (6.1), έχει μέτρο :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (6.12)$$

Επίσης, συνδυάζοντας την ισότητα στην (6.8) με την (6.12), μπορούμε να γράψουμε

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (6.13)$$

Επειδή υπάρχει μονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των διανυσμάτων και των σημείων του χώρου \mathbb{R}^n (Παρατήρηση 4.1, αντιστοιχία (ii)-(i)), αν κάνουμε αφαίρεση δύο διανυσμάτων $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, όπως ορίζεται στην (4.1) και αντικαταστήσουμε στην (6.11), διαπιστώνουμε ότι η απόσταση μεταξύ των δύο διανυσμάτων ταυτίζεται με την έννοια της απόστασης των αντίστοιχων σημείων του χώρου \mathbb{R}^n .

Ένα διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, που ορίστηκε στην (6.2), έχει μέτρο :

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \cdots + x_n\bar{x}_n} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \quad (6.14)$$

Αν συνδυάσουμε τις ισότητες στην (6.9) και στην (6.14), μπορούμε να γράψουμε

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2}. \quad (6.15)$$

Στην πρόταση, που ακολουθεί, διατυπώνονται και αποδεικνύονται ιδιότητες του μέτρου διανύσματος, θεωρώντας ότι ο διανυσματικός χώρος V είναι εφοδιασμένος με οποιοδήποτε εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητες αυτές ισχύουν και για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο και έχουν αναφερθεί στις σχέσεις των (4.8) και (4.9).

Πρόταση 6.2

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $a \in \mathbb{F}$ ισχύουν τα εξής:

- i) $\|a\mathbf{u}\| = |a| \cdot \|\mathbf{u}\|$
- ii) $|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$ (ανισότητα Cauchy -Schwartz) (6.16)
- iii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Απόδειξη : i) Εφαρμόζοντας τον Ορισμό 6.3, την ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1 και την ιδιότητα (i) της Πρότασης 6.1, έχουμε :

$$\|a\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle a\mathbf{u}, a\mathbf{u} \rangle} = \sqrt{a\bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = \sqrt{|a|^2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = |a| \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} = |a| \cdot \|\mathbf{u}\|$$

ii) Για $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$, η (6.16) είναι φανερό ότι ισχύει ως ισότητα. Έστω $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$. Από τη σχέση (6.10), τις ιδιότητες (i)-(ii) του Ορισμού 6.1 και την ιδιότητα (i) της Πρότασης 6.1, έχουμε :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} - a\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} - a\mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} - a\mathbf{v} \rangle - a \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} - a\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - a \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + a\bar{a} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - a \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + a\bar{a} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

Επειδή υποθέσαμε $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}_V$, μπορούμε να θέσουμε $a = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$. Οπότε, με

αντικατάσταση του a στην προηγούμενη ανίσωση και την παρατήρηση ότι $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{R}$, κάνοντας πράξεις παίρνουμε :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \bar{a} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - a \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + a \bar{a} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \frac{\overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^2} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2 \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cdot \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \cdot \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \|\mathbf{u}\|^2 - \frac{|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} \end{aligned}$$

Από την τελευταία ανίσωση έχουμε :

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2 \Rightarrow |\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$$

Η ισότητα στην (6.16) ισχύει όταν $\mathbf{v} = \mathbf{0}_V$ ή όταν $\mathbf{u} - a\mathbf{v} = \mathbf{0}_V \Leftrightarrow \mathbf{u} = a\mathbf{v}$, που σημαίνει ότι τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ είναι συγγραμμικά, δηλαδή γραμμικά εξαρτημένα (Πόρισμα 4.1 και Πρόταση 4.8).

iii) Από τη σχέση (6.10), τις ιδιότητες (i)-(ii) του Ορισμού 6.1, την ιδιότητα (i) της Πρότασης 6.1 και την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2 \operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &\leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2 = (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2, \end{aligned}$$

με $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$ συμβολίζεται το πραγματικό μέρος του $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$. Από την τελευταία ανίσωση $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 \leq (\|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|)^2$, συμπεραίνουμε άμεσα το ζητούμενο. ◆◆◆

Σε έναν Ευκλείδειο διανυσματικό χώρο επεκτείνεται η έννοια της γωνίας δύο διανυσμάτων, (βλέπε και σύγκρινε με τον ορισμό στην (4.10)). Αν τα διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ είναι μη μηδενικά, η ανισότητα Cauchy-Schwarz μπορεί να γραφεί :

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} \leq 1$$

Συνεπώς, για κάθε εσωτερικό γινόμενο υπάρχει πάντα μοναδική **γωνία** ϑ μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, με $0 \leq \vartheta \leq \pi$, τέτοια ώστε

$$\cos \vartheta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}. \quad (6.17)$$

6.2 Ορθογωνιότητα

Η έννοια της ορθογωνιότητας είναι πολύ χρήσιμη κυρίως στη Γεωμετρία. Από την ισότητα στην (6.17) είναι φανερό ότι ισχύει $\cos \vartheta = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ και επομένως, για κάθε διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο, μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της ορθογωνιότητας για δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$.

Ορισμός 6.4

Εστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Το διάνυσμα $\mathbf{u} \in V$ είναι **ορθογώνιο (κάθετο)** με το διάνυσμα $\mathbf{v} \in V$, αν και μόνο αν ισχύει

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Όταν το διάνυσμα $\mathbf{u} \in V$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{v} \in V$, ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, από όπου μπορούμε να γράψουμε $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} = 0$. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι και το διάνυσμα $\mathbf{v} \in V$ είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{u} \in V$ (Ορισμός 6.4). Γι' αυτό ονομάζουμε τα διανύσματα \mathbf{u}, \mathbf{v} **ορθογώνια**.

Πρόταση 6.3

Εστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τότε για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ ισχύουν τα εξής:

- i) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$ αν και μόνο αν $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ (Πυθαγόρειο θεώρημα)
- ii) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$ (νόμος παραλληλογράμμου)

Απόδειξη : Όπως και στην απόδειξη της Πρότασης 6.2 (iii) έχουμε ότι

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2 \quad (6.18)$$

και

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) + \|\mathbf{v}\|^2, \end{aligned} \quad (6.19)$$

με $\operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)$ συμβολίζεται το πραγματικό μέρος του $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \in \mathbb{C}$.

i) Από την (6.18) είναι φανερό ότι ισχύει

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2, \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \operatorname{Re}(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle) = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

ii) Προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες στις (6.18) και (6.19) συμπεραίνουμε το ζητούμενο.

Βλέπε και τα ερωτήματα της Εφαρμογής 4.11, όπου διατυπώθηκε ο νόμος του παραλληλογράμμου όταν $V \equiv \mathbb{R}^n$. ♦♦♦

Ορισμός 6.5

Ένα σύνολο διανυσμάτων $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ενός \mathbb{F} -διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο ονομάζεται **ορθοκανονικό**, αν ισχύουν :

- $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ για κάθε $\mathbf{v}_i \in S$, με $i = 1, 2, \dots, n$,
- $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ για κάθε $i \neq j$.

Αν το ορθοκανονικό σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ είναι μία βάση του διανυσματικού χώρου V , το σύνολο ονομάζεται **ορθοκανονική βάση** του V .

Για παράδειγμα, η κανονική βάση $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ του \mathbb{R}^n είναι ορθοκανονική βάση. Πράγματι, τα διανύσματα \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, \dots, n$, που ορίστηκαν στην (4.21), είναι μοναδιαία, διότι από την (6.12) έχουμε $\|\mathbf{e}_i\| = 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Επίσης, από την (6.1) είναι φανερό ότι $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$.

Πρόταση 6.4

Έστω $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ ένα ορθοκανονικό υποσύνολο διανυσμάτων ενός \mathbb{F} -διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο.

- Το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.
- Για κάθε $\mathbf{v} \in V$, το διάνυσμα \mathbf{u} , τέτοιο ώστε

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \dots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n,$$

είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα του συνόλου $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$.

Απόδειξη : i) Έστω ότι, για τους αριθμούς $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{F}$, ισχύει

$$a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \dots + a_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}_V. \quad (6.20)$$

Για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$, από την ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1 και την ιδιότητα (ii) της Πρότασης 6.1, έχουμε :

$$\begin{aligned}
0 &= \langle \mathbf{0}_V, \mathbf{v}_j \rangle = \langle a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle = a_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \rangle + a_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_j \rangle + \cdots + a_n \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Επειδή το σύνολο S είναι ορθοκανονικό, από τους όρους του αθροίσματος στην (6.21) δε μηδενίζεται ο όρος $a_j \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle$, οπότε από την ισότητα στην (6.21) για κάθε $j=1,2,\dots,n$ προκύπτει $a_j=0$, δηλαδή $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. Άρα, η διανυσματική εξίσωση στην (6.20) έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, που σημαίνει ότι το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο (Ορισμός 4.12).

ii) Για κάθε $j=1,2,\dots,n$, από την ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1, έχουμε :

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_j \rangle - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle \\
&= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle - \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle
\end{aligned} \tag{6.22}$$

Επειδή το σύνολο S είναι ορθοκανονικό, για κάθε $j=1,2,\dots,n$ ισχύει

$$\sum_{i=1}^n \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle.$$

Κάνοντας αντικατάσταση με την τελευταία σχέση στην ισότητα της (6.22) παίρνουμε

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 - \cdots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_j \rangle = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι για κάθε $j=1,2,\dots,n$, τα διανύσματα \mathbf{u}, \mathbf{v}_j είναι ορθογώνια. ◆◆◆

Σύμφωνα με την Πρόταση 4.11, κάθε πεπερασμένα παραγόμενος διανυσματικός χώρος έχει μία βάση. Συνεπώς κάθε Ευκλείδειος ή ορθομοναδιαίος διανυσματικός χώρος έχει μία βάση. Σε αρκετές εφαρμογές διαφόρων κλάδων των μαθηματικών εμφανίζεται η ανάγκη η βάση του χώρου να είναι ορθοκανονική. **Κανονικοποίηση** ονομάζεται η διαδικασία που εφαρμόζεται, προκειμένου ένα διάνυσμα να μετατραπεί σε μοναδιαίο. Τούτο επιτυγχάνεται, αν διαιρέσουμε το διάνυσμα με το μέτρο του. Συνεπώς, είναι απλή η διαδικασία κανονικοποίησης των διανυσμάτων της βάσης ενός Ευκλείδειου ή ορθομοναδιαίου διανυσματικού χώρου. Αυτό όμως δεν είναι αρκετό, διότι η ορθοκανονική βάση αποτελείται από διανύσματα που έχουν μέτρο ένα και επιπλέον είναι όλα μεταξύ τους ορθογώνια. Στην επόμενη πρόταση αποδεικνύεται ότι πάντοτε υπάρχει ορθοκανονικό σύνολο, που είναι βάση ενός Ευκλείδειου ή

ορθομοναδιαίου διανυσματικού χώρου, καθώς και ο τρόπος κατασκευής αυτής της βάσης.

Πρόταση 6.5

Κάθε \mathbb{F} – διανυσματικός χώρος V με εσωτερικό γινόμενο πεπερασμένης διάστασης έχει μία ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη : Έστω ότι $B = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση του V με $\dim V = n$. Από τη βάση αυτή θα κατασκευάσουμε ένα ορθοκανονικό σύνολο από n διανύσματα, τα οποία θα είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 6.4 (i)).

Κανονικοποιώντας το διάνυσμα \mathbf{v}_1 παίρνουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}$.

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε το διάνυσμα $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1$.

Επειδή $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \|\mathbf{w}_1\|^2 = 1$ έχουμε

$$\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2 - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle - \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1 \rangle \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 0,$$

από όπου είναι φανερό ότι το διάνυσμα \mathbf{u}_2 είναι ορθογώνιο με το \mathbf{w}_1 , (Ορισμός 6.4).

Επιπλέον, $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}_V$, διότι αν $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}_V$, τότε τα διανύσματα $\mathbf{v}_2, \mathbf{w}_1$ θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα, το οποίο είναι αδύνατο, αφού τα $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1$ είναι διανύσματα της βάσης του

V . Συνεπώς, κανονικοποιώντας το \mathbf{u}_2 , ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}$, το οποίο

είναι και ορθογώνιο με το \mathbf{w}_1 και ένας γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει τα διανύσματα $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$, έτσι ώστε να είναι μοναδιαία, ορθογώνια ανά δύο και επιπλέον να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των διανυσμάτων της αρχικής βάσης $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$.

Ορίζουμε το διάνυσμα

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1} - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}_1 \rangle \mathbf{w}_1 - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}_2 \rangle \mathbf{w}_2 - \dots - \langle \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{w}_k \rangle \mathbf{w}_k, \quad (6.23)$$

το οποίο είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4 (ii) και τον ορισμό του \mathbf{u}_{k+1} από την (6.23) ισχύει $\langle \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{w}_i \rangle = 0$,

για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$. Επίσης $\mathbf{u}_{k+1} \neq \mathbf{0}_V$, διότι αν ήταν $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{0}_V$, τότε από την (6.23) είναι φανερό ότι το διάνυσμα \mathbf{v}_{k+1} είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k$, άρα και των $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$, το οποίο είναι αδύνατο.

Συνεπώς, κανονικοποιώντας το \mathbf{u}_{k+1} ορίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{w}_{k+1} = \frac{\mathbf{u}_{k+1}}{\|\mathbf{u}_{k+1}\|}$.

Σύμφωνα με την αρχή της επαγωγής ορίζεται ένα ορθοκανονικό σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ του διανυσματικού χώρου V , το οποίο είναι γραμμικά ανεξάρτητο (Πρόταση 6.4 (i)). Επειδή ο διανυσματικός χώρος έχει $\dim V = n$ και το σύνολο $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, το S παράγει το χώρο V (Πρόταση 4.15). Επομένως, το S είναι μία ορθοκανονική βάση του V . ♦♦♦

Στην απόδειξη της Πρότασης 6.5 παρουσιάζεται η μέθοδος κατασκευής ορθοκανονικών βάσεων, την οποία ακολουθούμε στον επόμενο αλγόριθμο και είναι γνωστή ως «*Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt*».

Αλγόριθμος 6.1

Μέθοδος ορθοκανονικοποίησης των Gram - Schmidt

Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο.

Βήμα 1 Θέτουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \dots - \frac{\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{u}_{n-1} \rangle}{\|\mathbf{u}_{n-1}\|^2} \mathbf{u}_{n-1} \end{aligned}$$

Βήμα 2 Ορίζουμε $\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|} \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{w}_n = \frac{1}{\|\mathbf{u}_n\|} \mathbf{u}_n$

Τα στοιχεία $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_n$ αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του V .

Παράδειγμα 6.2 Στο χώρο \mathbb{R}^3 , θεωρούμε το σύννητες εσωτερικό γινόμενο, όπως ορίστηκε στην (6.1), και μία βάση του χώρου $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, όπου $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (0, 3, 4)$. Κατασκευάζουμε μία ορθοκανονική βάση, σύμφωνα με τον Αλγόριθμο 6.1.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1) \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1) \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = (0, 3, 4) - \frac{4}{2}(1, 0, 1) - \frac{-4}{2}(1, 0, -1) = (0, 3, 0). \end{aligned}$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ είναι, αντίστοιχα, $\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3$.

Διαιρώντας τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ με τα αντίστοιχα μέτρα, βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση

$$\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), (0, 1, 0) \right\}. \quad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Περισσότερα παραδείγματα με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης των Gram-Schmidt παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 8, όπου απαιτείται η εύρεση ενός ορθομοναδιαίου (ή ορθογωνίου) πίνακα κατά την τριγωνοποίηση του πίνακα A ή τη διαγωνοποίηση Ερμιτιανών και συμμετρικών πινάκων.

Ορισμός 6.6

Εστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και U ένα υποσύνολο του V . Το σύνολο

$$U^\perp = \{\mathbf{v} \in V : \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0, \text{ για κάθε } \mathbf{u} \in U\} \quad (6.24)$$

ονομάζεται **ορθογώνιο σύνολο** του U .

Αν το υποσύνολο U είναι υπόχωρος του V , τότε το U^\perp ονομάζεται **ορθογώνιο συμπλήρωμα** του U .

Πρόταση 6.6

Εστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $U \subseteq V$. Το ορθογώνιο σύνολο U^\perp είναι διανυσματικός υπόχωρος του V .

Απόδειξη : Το $\mathbf{0}_V \in U^\perp$, διότι για κάθε $\mathbf{u} \in U \subseteq V$ ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{0}_V \rangle = 0$ (Πρόταση 6.1 (ii)), οπότε $U^\perp \neq \emptyset$. Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.6 και την (6.24), αν τα διανύσματα $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U^\perp$, για κάθε $\mathbf{u} \in U$ προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\mathbf{v} \in U^\perp \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{w} \in U^\perp \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$$

Συνεπώς, για κάθε $\mathbf{u} \in U$ και $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U^\perp$, $k, \ell \in \mathbb{F}$, από τις παραπάνω ισότητες και την ιδιότητα (i) της Πρότασης 6.1, έχουμε

$$\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} + \ell\mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \ell\mathbf{w} \rangle = \bar{k} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \bar{\ell} \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \bar{k} \cdot 0 + \bar{\ell} \cdot 0 = 0,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $k\mathbf{v} + \ell\mathbf{w} \in U^\perp$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.5 (ii), το ορθογώνιο σύνολο U^\perp είναι υπόχωρος του V . ◆◆◆

Στην πρόταση, που ακολουθεί, παρουσιάζεται μία σημαντική σχέση, η οποία συνδέει τα σύνολα U, U^\perp με το διανυσματικό χώρο V , όταν το σύνολο U είναι υπόχωρος, οπότε, στην περίπτωση αυτή δικαιολογείται η ονομασία του U^\perp ως ορθογώνιο συμπλήρωμα του U , (Ορισμός 4.9).

Πρόταση 6.7

Έστω V ένας \mathbb{F} -διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο και U ένας υπόχωρος του V . Τότε ισχύουν τα εξής:

i) $V = U \oplus U^\perp$

ii) $(U^\perp)^\perp = U$

Απόδειξη : i) Επειδή U είναι ένας υπόχωρος του V , και U^\perp είναι υπόχωρος του V (Πρόταση 6.6), για να ισχύει $V = U \oplus U^\perp$, αρκεί να αποδειχθούν: (α) $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$ και (β) $V = U + U^\perp$ (Εφαρμογή 4.5 (i) και Ορισμός 4.9).

(α) Επειδή $U \cap U^\perp$ είναι υπόχωρος του V (Πρόταση 4.6), ισχύει $\mathbf{0}_V \in U \cap U^\perp$, (Πρόταση 4.5 (i)). Έστω $\mathbf{u} \in U \cap U^\perp$, άρα $\mathbf{u} \in U$ και $\mathbf{u} \in U^\perp$, οπότε $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ και, από την ιδιότητα (iv) του Ορισμού 6.1, συμπεραίνουμε $\mathbf{u} = \mathbf{0}_V$, άρα $U \cap U^\perp = \{\mathbf{0}_V\}$.

(β) Επιπλέον, ο υπόχωρος U γίνεται διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο, αν τον θεωρήσουμε εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο του V . Ακόμη, είναι ένας χώρος πεπερασμένης διάστασης, διότι για τον υπόχωρο U του V ισχύει

$\dim U = k < n = \dim V$ (Πρόταση 4.16 (i)). Άρα, ο χώρος U έχει μία ορθοκανονική βάση (Πρόταση 6.5), έστω $B_U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$.

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.4 (ii), αν $\mathbf{v} \in V$, το διάνυσμα

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 - \dots - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k \quad (6.25)$$

είναι ορθογώνιο με κάθε διάνυσμα του B_U , και άρα είναι ορθογώνιο στον υπόχωρο U , δηλαδή $\mathbf{u} \in U^\perp$. Συνεπώς, για κάθε $\mathbf{v} \in V$, από την (6.25) μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

όπου $\mathbf{u} \in U^\perp$ και $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_2 \rangle \mathbf{u}_2 + \dots + \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k \in U$, οπότε $V = U + U^\perp$.

ii) Αν $\mathbf{u} \in U$, τότε, για κάθε $\mathbf{v} \in U^\perp$, ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, δηλαδή $\mathbf{u} \in (U^\perp)^\perp$, οπότε

$$U \subseteq (U^\perp)^\perp. \quad (6.26)$$

Αν $\mathbf{u} \in (U^\perp)^\perp$, τότε, για κάθε $\mathbf{v} \in U^\perp$, ισχύει $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, δηλαδή $\mathbf{u} \in U$, οπότε

$$(U^\perp)^\perp \subseteq U. \quad (6.27)$$

Από τους εγκλεισμούς στις (6.26) και (6.27) είναι φανερό ότι ισχύει $U = (U^\perp)^\perp$. ♦♦♦

Όταν ο διανυσματικός χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα δύο υποχώρων του, είναι γνωστό ότι ο τρόπος γραφής των στοιχείων του V είναι μοναδικός (Εφαρμογή 4.5 (ii)), και σύμφωνα με την Πρόταση 6.7 (i) κάθε $\mathbf{v} \in V$ γράφεται μονοσήμαντα

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}, \quad \text{με } \mathbf{u} \in U \text{ και } \mathbf{w} \in U^\perp.$$

Τα διανύσματα \mathbf{u}, \mathbf{w} ονομάζονται **προβολές** του $\mathbf{v} \in V$, αντίστοιχα στους ορθογώνιους υπόχωρους U και U^\perp .

6.3 Ορθομοναδιαίοι πίνακες

Ορισμός 6.7

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$ ονομάζεται **ορθομοναδιαίος**⁽¹⁾ (unitary), αν ισχύει

$$\text{i) } AA^* = I \quad \text{ή} \quad \text{ii) } A^*A = I. \quad (6.28)$$

Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$ ο πίνακας ονομάζεται **ορθογώνιος** (orthonormal).

Για παράδειγμα, ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, οι στοιχειώδεις πίνακες $E_{III}(i, j)$

(Ορισμός 1.3), και οι πίνακες $\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$, με $\vartheta \in \mathbb{R}$, $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$, είναι

ορθογώνιοι. Οι διαγώνιοι πίνακες $\text{diag}(e^{i\vartheta_1}, e^{i\vartheta_2}, \dots, e^{i\vartheta_n})$ είναι ορθομοναδιαίοι, όπου $0 \leq \vartheta_j \leq 2\pi$, $j = 1, 2, \dots, n$ και $e^{i\vartheta_j} = \cos \vartheta_j + i \sin \vartheta_j$.

Από τις ιδιότητες στην (6.28) προκύπτουν άμεσα οι ιδιότητες των ορθομοναδιαίων πινάκων, οι οποίες είναι οι ακόλουθες :

Πρόταση 6.8

Για κάθε ορθομοναδιαίο πίνακα $A \in M_n(\mathbb{F})$, ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :

- i) ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος με $A^{-1} = A^*$ και $|\det A| = 1$
- ii) ο πίνακας A^* είναι ορθομοναδιαίος πίνακας και ισχύει $(A^*)^* = A$
- iii) οι γραμμές (στήλες) του A είναι μία ορθοκανονική βάση του $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$
- iv) το γινόμενο ορθομοναδιαίων πινάκων είναι ορθομοναδιαίος πίνακας.

Στην περίπτωση που $A \in M_n(\mathbb{R})$, οι παραπάνω ιδιότητες ισχύουν, μόνο που δεν υπάρχει η συζυγία των πινάκων.

Απόδειξη : i) Είναι φανερό ότι, από την ιδιότητα $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ (Πρόταση 2.2 (ii)) και την ισότητα (i) στην (6.28), προκύπτει

⁽¹⁾ Ένας **ορθομοναδιαίος** πίνακας στοιχεία μιγαδικούς αριθμούς, ενώ ένας **ορθογώνιος** έχει στοιχεία πραγματικούς αριθμούς.

$$\det A \cdot \det(A^*) = \det(AA^*) = \det I = 1,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\det A \neq 0$, και συνεπώς ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.

Επιπλέον, από τον ορισμό του αντιστρέψιμου πίνακα (Ορισμός 1.10, σχέση (1.3)) και τις ισότητες στην (6.28), έχουμε $A^{-1} = A^*$.

Επίσης, από την ιδιότητα $\det(A^*) = \overline{\det A}$ (Πρόταση 2.2 (i)), μπορούμε να γράψουμε

$$1 = \det I = \det(AA^*) = \det A \cdot \det(A^*) = \det A \cdot \overline{\det A} = |\det A|^2,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $|\det A| = 1$.

ii) Από την ιδιότητα $(AB)^* = B^*A^*$ (Πρόταση 1.3 (vi)) και την ισότητα (ii) στην (6.28), έχουμε

$$A^*(A^*)^* = (A^*A)^* = I. \quad (6.29)$$

Συνεπώς ο πίνακας A^* επαληθεύει την ισότητα (i) του Ορισμού 6.7, οπότε ο A^* είναι ορθομοναδιαίος. Συνδυάζοντας την ισότητα στην (6.29) με την (ii) στην (6.28), συμπεραίνουμε ότι $(A^*)^* = A$.

iii) Αν $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ είναι οι γραμμές του πίνακα A , τότε $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n)^t$ και, επειδή ο πίνακας A είναι ορθομοναδιαίος, από την ισότητα (i) στην (6.28), έχουμε

$$AA^* = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{a}}_1^t & \bar{\mathbf{a}}_2^t & \dots & \bar{\mathbf{a}}_n^t \end{pmatrix} = I,$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι ισχύει $\mathbf{a}_i \bar{\mathbf{a}}_i^t = 1 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}_i^t, \mathbf{a}_i^t \rangle = 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$, και $\mathbf{a}_i \bar{\mathbf{a}}_j^t = 0 \Leftrightarrow \langle \mathbf{a}_i^t, \mathbf{a}_j^t \rangle = 0$, για κάθε $i \neq j$. Συνεπώς οι γραμμές του πίνακα A είναι ορθοκανονικά διανύσματα του χώρου γραμμών, και άρα αποτελούν μία ορθοκανονική βάση του $M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ (Ορισμός 6.5).

iv) Έστω οι πίνακες $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ορθομοναδιαίοι, οπότε από την (6.28) ισχύουν οι ισότητες $AA^* = I$ και $BB^* = I$. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες ισότητες με την ιδιότητα $(AB)^* = B^*A^*$ (Πρόταση 1.3 (vi)), έχουμε

$$(AB)(AB)^* = AB(B^*A^*) = A(BB^*)A^* = A \cdot I \cdot A^* = I.$$

Άρα, για τον πίνακα AB επαληθεύεται η ισότητα (i) του Ορισμού 6.7. ◆◆◆

6.4 Γενικά παραδείγματα και εφαρμογές

Παράδειγμα 6.3 Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$.

i) Να αποδείξετε ότι η απεικόνιση $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ με

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2, \quad (6.30)$$

ορίζει εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^2 .

ii) Να αποδείξετε ότι $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας του εσωτερικού γινομένου, όπως

ορίστηκε στην (6.30).

Απόδειξη : i) Πρέπει να επαληθεύσουμε τις ιδιότητες του Ορισμού 6.1. Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Από τον ορισμό των πράξεων στις (4.1) και (4.2), ισχύει ότι $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2)$. Κάνοντας αντικατάσταση με τα διανύσματα και τις συντεταγμένες τους, στον τύπο που δόθηκε στην (6.30), έχουμε

$$\begin{aligned} \langle a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle &= (ax_1 + by_1)z_1 + (ax_1 + by_1)z_2 + (ax_2 + by_2)z_1 + 2(ax_2 + by_2)z_2 \\ &= a(x_1 z_1 + x_1 z_2 + x_2 z_1 + 2x_2 z_2) + b(y_1 z_1 + y_1 z_2 + y_2 z_1 + 2y_2 z_2) \\ &= a\langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + b\langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \end{aligned}$$

οπότε επαληθεύεται η ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1.

Η ιδιότητα της αντιμεταθετικότητας (ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό) των πραγματικών αριθμών μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 = y_1 x_1 + y_1 x_2 + y_2 x_1 + 2y_2 x_2 = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle,$$

οπότε επαληθεύεται η ιδιότητα (ii) του Ορισμού 6.1.

Επίσης,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = x_1 x_1 + x_1 x_2 + x_2 x_1 + 2x_2 x_2 = x_1^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 \geq 0,$$

οπότε επαληθεύεται η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 6.1.

Είναι φανερό ότι, από την ισότητα $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 = 0$, προκύπτουν $x_1 + x_2 = 0$ και $x_2 = 0$, από όπου συμπεραίνουμε ότι $x_1 = x_2 = 0$, και άρα $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Δηλαδή, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$. Το αντίστροφο είναι άμεσο.

Έτσι επαληθεύεται και η τελευταία ιδιότητα του Ορισμού 6.1.

ii) Έστω $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ και $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ τα διανύσματα της κανονικής βάσης του \mathbb{R}^2 .

Σύμφωνα με τον Ορισμό 6.2, ο πίνακας $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ του εσωτερικού γινομένου

έχει στοιχεία που βρίσκονται από την (6.5), οπότε από την ισότητα στην (6.30), έχουμε :

$$a_{11} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 = 1, \quad a_{12} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1,$$

$$a_{21} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \rangle = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 = 1, \quad a_{22} = \langle \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \rangle = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$$

◆◆◆

Παράδειγμα 6.4 Έστω η απεικόνιση $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + kx_2 y_2 \quad (6.31)$$

- i) Για ποιες τιμές της παραμέτρου $k \in \mathbb{R}$, ο τύπος (6.31) ορίζει ένα εσωτερικό γινόμενο;
- ii) Για τις τιμές που βρέθηκαν στο ερώτημα (i), να βρεθούν τα μήκη των διανυσμάτων $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ και να εξετάσετε αν τα διανύσματα είναι ορθογώνια (κάθετα).

Απόδειξη : i) Έστω $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ και $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$. Για κάθε $k \in \mathbb{R}$, εύκολα επαληθεύονται οι ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 6.1. Από τον τύπο στην (6.31) έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle &= x_1^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_1 + kx_2^2 = x_1^2 - 4x_1 x_2 + kx_2^2 \\ &= (x_1^2 - 4x_1 x_2 + (2x_2)^2) + kx_2^2 - (2x_2)^2 \\ &= (x_1 - 2x_2)^2 + kx_2^2 - (2x_2)^2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

Για να επαληθεύεται η ιδιότητα (iii) του Ορισμού 6.1 πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0 &\Leftrightarrow (x_1 - 2x_2)^2 + kx_2^2 - (2x_2)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow kx_2^2 - (2x_2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (k - 4)x_2^2 \geq 0 \Leftrightarrow k - 4 \geq 0, \end{aligned}$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι $k \geq 4$.

Έστω $k \geq 4$. Εξετάζουμε την ιδιότητα (iv) του Ορισμού 6.1.

Το δεξιό μέλος στην (6.32) είναι μη μηδενικό για κάθε $\mathbf{x} \neq (0, 0)$, αν και μόνο αν $k > 4$.

Τελικά, οι ζητούμενες τιμές της παραμέτρου k είναι $k > 4$.

ii) Από την ισότητα στην (6.10) (Ορισμός 6.3) και για το εσωτερικό γινόμενο, όπως ορίστηκε στην (6.31), τα μήκη των διανυσμάτων είναι :

$$\|e_1\| = \sqrt{\langle e_1, e_1 \rangle} = \sqrt{1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 \cdot 1 + k \cdot 0 \cdot 0} = 1$$

$$\|e_2\| = \sqrt{\langle e_2, e_2 \rangle} = \sqrt{0^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 0 + k \cdot 1 \cdot 1} = \sqrt{k}$$

Επειδή $\langle e_1, e_2 \rangle = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 + k \cdot 0 \cdot 1 = -2 \neq 0$, τα e_1, e_2 δεν είναι ορθογώνια (κάθετα) ως προς το δοσμένο εσωτερικό γινόμενο. ◆◆◆

Παράδειγμα 6.5 Έστω ο υπόχωρος $U = \text{span}(v_1, v_2)$ του \mathbb{C}^3 , όπου $v_1 = (1, 0, i)$ και $v_2 = (2, 1, 1+i)$. Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του U .

Απόδειξη : Έστω $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$. Από τη διανυσματική εξίσωση

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^3} \Leftrightarrow (a_1 + 2a_2, a_2, ia_1 + (1+i)a_2) = \mathbf{0}_{\mathbb{C}^3}$$

προκύπτει το σύστημα

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 0 \\ a_2 &= 0 \\ ia_1 + (1+i)a_2 &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο έχει μόνη λύση την τετριμμένη, δηλαδή $a_1 = a_2 = 0$. Άρα τα διανύσματα $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Ορισμός 4.12). Επομένως, επαληθεύονται οι δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, συνεπώς το σύνολο $\{v_1, v_2\}$ αποτελεί μία βάση του U .

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Gram-Schmidt για να κατασκευάσουμε την ορθοκανονική βάση. Αρχικά, θεωρούμε ότι ο υπόχωρος $U \subseteq \mathbb{C}^3$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του \mathbb{C}^3 , όπως ορίστηκε στην (6.2).

Έτσι, εφαρμόζοντας τις ισότητες στην (6.2) και (6.14) έχουμε ότι :

$$\langle v_2, v_1 \rangle = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + (1+i) \cdot \bar{i} = 3-i \quad \text{και} \quad \|v_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + i \cdot \bar{i}} = \sqrt{2}$$

Ακολουθώντας, από τον Αλγόριθμο 6.1 έχουμε :

$$u_1 = v_1 = (1, 0, i)$$

$$u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = (2, 1, 1+i) - \frac{3-i}{2} (1, 0, i) = \left(\frac{1+i}{2}, 1, \frac{1-i}{2} \right)$$

$$\text{Το μέτρο του διανύσματος } u_2 \text{ είναι : } \|u_2\| = \sqrt{\frac{1+i}{2} \cdot \frac{\overline{1+i}}{2} + 1^2 + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{\overline{1-i}}{2}} = \sqrt{2}$$

Από την κανονικοποίηση των διανυσμάτων u_1, u_2 προκύπτουν τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{w}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_1\|} \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, i) \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_2\|} \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+i}{2}, 1, \frac{1-i}{2}\right).$$

Επομένως, σύμφωνα με την Πρόταση 6.5 και τον Αλγόριθμο 6.1, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$. ◆◆◆

Παράδειγμα 6.6 Έστω U ο υπόχωρος του \mathbb{R}^4 με

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, x_2 + x_3 = 0\}.$$

- i) Να βρείτε μία βάση του υποχώρου U καθώς και τη διάστασή του.
- ii) Να βρείτε μία ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος U^\perp και τη διάσταση του U^\perp .

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με την ιδιότητα που πρέπει να ικανοποιούν τα στοιχεία του υποχώρου U , έχουμε :

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{aligned}$$

(a) Οπότε, κάθε τυχαίο στοιχείο $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \subseteq \mathbb{R}^4$ γράφεται

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-2x_2, x_2, -x_2, x_4) = x_2(-2, 1, -1, 0) + x_4(0, 0, 0, 1) = x_2 \mathbf{v}_1 + x_4 \mathbf{v}_2,$$

για κάθε $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

Άρα, ο υπόχωρος $U = \text{span}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, όπου $\mathbf{v}_1 = (-2, 1, -1, 0)$ και $\mathbf{v}_2 = (0, 0, 0, 1)$.

(b) Επιπλέον, τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in U$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, διότι ο πίνακας με στήλες τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ έχει βαθμό 2, όσα και τα διανύσματα του υποχώρου (Αλγόριθμος 4.2, βήμα 3 (i)).

Τα (a) και (b) επαληθεύουν τις δύο ιδιότητες του Ορισμού 4.14, άρα το σύνολο $B_U = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ είναι μία βάση του U , με $\dim U = 2$.

ii) Θεωρούμε το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^4 και στους υπόχωρους U, U^\perp . Η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του ορθογωνίου συμπληρώματος U^\perp θα προκύψει από την εφαρμογή του Αλγορίθμου 6.1, σε μία βάση του U^\perp . Σύμφωνα με την (6.24), για κάθε διάνυσμα $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp$, πρέπει να ισχύει $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{w} \rangle = 0$, $i = 1, 2$, από όπου προκύπτουν οι εξισώσεις

$$-2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2x_1 + x_2 \quad \text{και} \quad x_4 = 0.$$

Με αντικατάσταση των τελευταίων ισοτήτων στο τυχαίο στοιχείο $\mathbf{w} \in U^\perp$, έχουμε

$$\mathbf{w} = (x_1, x_2, -2x_1 + x_2, 0) = x_1(1, 0, -2, 0) + x_2(0, 1, 1, 0), \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \quad (6.33)$$

Από την (6.33), συμπεραίνουμε ότι ο υπόχωρος $U^\perp = \text{span}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, όπου $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -2, 0)$ και $\mathbf{v}_4 = (0, 1, 1, 0)$.

Επειδή $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ και $\mathbb{R}^4 = U \oplus U^\perp$ (Πρόταση 6.7), σύμφωνα με το Πόρισμα 4.5 ισχύει $\dim U^\perp = 2$. Επειδή $U^\perp = \text{span}(\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ και $\dim U^\perp = 2$ συμπεραίνουμε ότι τα $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα (Πρόταση 4.15). Άρα, το σύνολο $S = \{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ είναι μία βάση του U^\perp .

Επιπλέον, το μέτρο του διανύσματος \mathbf{v}_3 υπολογίζεται όπως στην (6.12) και το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3 \rangle$ από την ισότητα στην (6.1), τα οποία είναι :

$$\|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad \langle \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_3 \rangle = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = -2,$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Gram-Schmidt (Αλγόριθμος 6.1), για τα στοιχεία της βάσης $\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, και έχουμε :

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 = (1, 0, -2, 0)$$

$$\mathbf{u}_4 = \mathbf{v}_4 - \frac{\langle \mathbf{v}_4, \mathbf{u}_3 \rangle}{\|\mathbf{u}_3\|^2} \mathbf{u}_3 = (0, 1, 1, 0) - \frac{-2}{5} (1, 0, -2, 0) = \left(\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}, 0 \right)$$

Το μέτρο των διανυσμάτων $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ είναι :

$$\|\mathbf{u}_3\| = \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad \|\mathbf{u}_4\| = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{30}}{5}$$

Από την κανονικοποίηση των διανυσμάτων $\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$, προκύπτουν τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{w}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_3\|} \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} (1, 0, -2, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_4 = \frac{1}{\|\mathbf{u}_4\|} \mathbf{u}_4 = \frac{1}{\sqrt{30}} (2, 5, 1, 0).$$

Άρα, η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι $\{\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$. ◆◆◆

Παράδειγμα 6.7 Έστω ότι ο υπόχωρος U του \mathbb{R}^4 παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}_1 = (1, 2, -2, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1, -1)$ και $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 2, -4)$.

i) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του U , με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^4 .

ii) Να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 1)$ πάνω στο U και στο U^\perp .

Απόδειξη : i) Σύμφωνα με την (6.24), για κάθε διάνυσμα $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U^\perp$, πρέπει να ισχύει $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{w} \rangle = 0$, $i = 1, 2, 3$, από όπου προκύπτει το σύστημα :

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0 \\x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 0\end{aligned}$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα του συστήματος είναι $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, από όπου

συμπεραίνουμε ότι για το σύστημα υπάρχει μονοπαραμετρική απειρία λύσεων, που είναι της μορφής $\mathbf{w} = \{x_3(2, 0, 1, 1) : x_3 \in \mathbb{R}\}$. Άρα, $U^\perp = \text{span}((2, 0, 1, 1))$.

ii) Για να βρεθούν οι προβολές του διανύσματος $\mathbf{v} = (1, 1, -1, 1)$ στους υποχώρους U και U^\perp , αρκεί να προσδιοριστούν οι συντελεστές της διανυσματικής εξίσωσης

$$\mathbf{v} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{w}_1, \quad (6.34)$$

όπου $\mathbf{w}_1 = (2, 0, 1, 1)$ είναι το διάνυσμα της βάσης του U^\perp .

Επιπλέον, από τις σχέσεις στις (6.1) και (6.12), υπολογίζονται τα ακόλουθα εσωτερικά γινόμενα :

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle = 0 \quad \text{και} \quad \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 6, \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle = 2 \quad (6.35)$$

Ακολουθώντας, θεωρώντας το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος \mathbf{w}_1 με τα διανύσματα που βρίσκονται στα δύο μέλη της ισότητας στην (6.34), εφαρμόζοντας την ιδιότητα (i) του Ορισμού 6.1 και κάνοντας αντικατάσταση από τις ισότητες στην (6.35), έχουμε :

$$\begin{aligned}2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}_1 \rangle &= \langle k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + k_3\mathbf{u}_3 + k_4\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= k_1\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{w}_1 \rangle + k_2\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{w}_1 \rangle + k_3\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{w}_1 \rangle + k_4\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle \\ &= k_4\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1 \rangle = 6k_4\end{aligned}$$

Συνεπώς, από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι $k_4 = \frac{1}{3}$.

Άρα, η προβολή του \mathbf{v} στον υπόχωρο U^\perp είναι το διάνυσμα $\frac{1}{3}(2, 0, 1, 1)$.

Έτσι, έχουμε, από την (6.34), ότι η προβολή του \mathbf{v} στον υπόχωρο U είναι το διάνυσμα

$$\mathbf{v} - k_4\mathbf{w}_1 = (1, 1, -1, 1) - \frac{1}{3}(2, 0, 1, 1) = \left(\frac{1}{3}, 1, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right). \quad \blacklozenge\blacklozenge\blacklozenge$$

Παράδειγμα 6.8 Έστω ο πίνακας $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{3}(1 \ 2 \ 2)^t$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ορθογώνιος πίνακας A με πρώτη στήλη τον πίνακα \mathbf{u}_1 και ότι ισχύει :

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη : Το διάνυσμα \mathbf{u}_1 είναι μοναδιαίο. Επειδή οι τρεις στήλες του πίνακα A πρέπει να αποτελούν ορθοκανονική βάση του $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ (Πρόταση 6.8 (iii)), αρκεί να βρούμε άλλα δύο μοναδιαία διανύσματα (τη 2^η και 3^η στήλη του A), που θα ανήκουν στο ορθογώνιο συμπλήρωμα U^\perp του \mathbf{u}_1 . Αν $\mathbf{v} \in U^\perp$, σύμφωνα με την (6.24), ισχύει $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0$, όπου $\mathbf{v} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$. Εφαρμόζουμε το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο, οπότε έχουμε :

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2x_2 - 2x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα, } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ για κάθε } x_2, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Στο γραμμικό συνδυασμό του παραπάνω διανύσματος \mathbf{v} , αν θέσουμε $x_2 = 1, x_3 = 0$, βρίσκουμε το διάνυσμα $\mathbf{v}_2 = (-2 \ 1 \ 0)^t$, ενώ αν θέσουμε $x_2 = 0, x_3 = -1$, προκύπτει το διάνυσμα $\mathbf{v}_3 = (2 \ 0 \ -1)^t$.

Με την προηγούμενη κατασκευή καθένα από τα διανύσματα $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ είναι ορθογώνιο με το διάνυσμα \mathbf{u}_1 . Από την (6.12) υπολογίζεται το μέτρο του διανύσματος \mathbf{v}_2 και από την (6.8) υπολογίζεται το $\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle$, τα οποία είναι :

$$\|\mathbf{v}_2\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{5} \quad \text{και} \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 \rangle = 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = -4$$

Συνεπώς, τα διανύσματα $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ δεν είναι μοναδιαία και δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια, επομένως δεν μπορούν να είναι στήλες του A .

Γι' αυτό εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Gram-Schmidt για τα $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ και έχουμε :

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = (-2 \ 1 \ 0)^t$$

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = (2 \ 0 \ -1)^t - \frac{-4}{5} (-2 \ 1 \ 0)^t = \left(\frac{2}{5} \ \frac{4}{5} \ -1 \right)^t$$

Κανονικοποιώντας τα $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$, προκύπτουν τα μοναδιαία διανύσματα

$$\mathbf{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (-2 \ 1 \ 0)^t \quad \text{και} \quad \mathbf{w}_3 = \frac{5}{\sqrt{45}} \left(\frac{2}{5} \ -\frac{4}{5} \ -1 \right)^t = \frac{\sqrt{5}}{3} \left(\frac{2}{5} \ \frac{4}{5} \ -1 \right)^t.$$

Από την παραπάνω κατασκευή τα διανύσματα $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ είναι ορθογώνια ανά δύο και μοναδιαία, άρα αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύνολο (Ορισμός 6.5).

Συνεπώς, θέτουμε τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ στήλες στον πίνακα A , οπότε, οι στήλες του A αποτελούν ορθοκανονική βάση του $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$, άρα ο πίνακας A είναι ορθογώνιος (Πρόταση 6.8 (iii)). Έτσι, ο ζητούμενος πίνακας A είναι :

$$A = (\mathbf{u}_1 \ \mathbf{w}_2 \ \mathbf{w}_3) = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4\sqrt{5}/15 \\ 2/3 & 0 & -\sqrt{5}/3 \end{pmatrix} \quad \dots$$

Εφαρμογή 6.1 Έστω το σύνολο $S = \{1, x, x^2, x^3\}$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων, που ορίζονται στο διάστημα $[-1, 1]$, και το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στην (6.3).

i) Να βρείτε τη γωνία μεταξύ των συναρτήσεων 1 και x .

ii) Να μετατραπεί το S σε ορθοκανονικό σύνολο.

Απόδειξη : Ο διανυσματικός χώρος $C([-1, 1], \mathbb{R})$ των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$$

όπου $f, g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις (Παράδειγμα 6.1 (iii)).

Έστω $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2$ και $f_4(x) = x^3$.

i) Από το εσωτερικό γινόμενο, όπως αυτό ορίστηκε στην (6.3), υπολογίζουμε :

$$\langle f_1(x), f_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0 = \langle f_2(x), f_1(x) \rangle,$$

$$\langle f_1(x), f_1(x) \rangle = \int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx = x \Big|_{-1}^1 = 2, \quad \langle f_2(x), f_2(x) \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}.$$

Επίσης, σύμφωνα με την (6.10) ισχύει $\|f_1(x)\| = \sqrt{\langle f_1(x), f_1(x) \rangle} = \sqrt{2}$ και

$$\|f_2(x)\| = \sqrt{\langle f_2(x), f_2(x) \rangle} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Με αντικατάσταση των παραπάνω στην ισότητα της (6.17) έχουμε

$$\cos \vartheta = \frac{\langle f_1(x), f_2(x) \rangle}{\|f_1(x)\| \cdot \|f_2(x)\|} = 0.$$

Άρα, οι συναρτήσεις $f_1(x), f_2(x)$ είναι ορθογώνιες, με $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

ii) Εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Gram-Schmidt, για να μετατρέψουμε το σύνολο S σε ορθοκανονικό σύνολο.

$$\tilde{f}_1(x) = f_1(x) = 1$$

$$\tilde{f}_2(x) = f_2(x) - \frac{\langle f_2(x), \tilde{f}_1(x) \rangle}{\|\tilde{f}_1(x)\|^2} \tilde{f}_1(x) = x - \frac{0}{2} \cdot 1 = x$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_3(x) &= f_3(x) - \frac{\langle f_3(x), \tilde{f}_1(x) \rangle}{\|\tilde{f}_1(x)\|^2} \tilde{f}_1(x) - \frac{\langle f_3(x), \tilde{f}_2(x) \rangle}{\|\tilde{f}_2(x)\|^2} \tilde{f}_2(x) \\
&= x^2 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x = x^2 - \frac{2/3}{2} \cdot 1 - \frac{0}{2/3} x = x^2 - \frac{1}{3} \\
\tilde{f}_4(x) &= f_4(x) - \frac{\langle f_4(x), \tilde{f}_1(x) \rangle}{\|\tilde{f}_1(x)\|^2} \tilde{f}_1(x) - \frac{\langle f_4(x), \tilde{f}_2(x) \rangle}{\|\tilde{f}_2(x)\|^2} \tilde{f}_2(x) - \frac{\langle f_4(x), \tilde{f}_3(x) \rangle}{\|\tilde{f}_3(x)\|^2} \tilde{f}_3(x) \\
&= x^3 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot 1 dx}{\int_{-1}^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot x dx}{\int_{-1}^1 x \cdot x dx} x - \frac{\int_{-1}^1 x^3 \cdot (x^2 - 1/3) dx}{\int_{-1}^1 (x^2 - 1/3) \cdot (x^2 - 1/3) dx} (x^2 - 1/3) \\
&= x^3 - \frac{0}{2} \cdot 1 - \frac{2/5}{2/3} x - \frac{0}{8/45} (x^2 - 1/3) \\
&= x^3 - \frac{3}{5} x
\end{aligned}$$

Το σύνολο $L = \{\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \tilde{f}_3(x), \tilde{f}_4(x)\}$ έχει όλα τα στοιχεία ορθογώνια ανά δύο.

Η κανονικοποίηση των στοιχείων του L είναι :

$$\hat{f}_1(x) = \frac{\tilde{f}_1(x)}{\|\tilde{f}_1(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \hat{f}_2(x) = \frac{\tilde{f}_2(x)}{\|\tilde{f}_2(x)\|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{2}},$$

$$\hat{f}_3(x) = \frac{\tilde{f}_3(x)}{\|\tilde{f}_3(x)\|} = \frac{x^2 - 1/3}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right),$$

$$\hat{f}_4(x) = \frac{\tilde{f}_4(x)}{\|\tilde{f}_4(x)\|} = \frac{x^3 - \frac{3x}{5}}{\sqrt{\frac{8}{175}}} = \frac{5\sqrt{7}}{2\sqrt{2}} \left(x^3 - \frac{3x}{5} \right)$$

Επομένως, το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$\hat{f}_1(x), \hat{f}_2(x), \hat{f}_3(x), \hat{f}_4(x).$$

Παρατήρηση : Οι συναρτήσεις $\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \tilde{f}_3(x), \tilde{f}_4(x) \in L$ ανήκουν στο σύνολο των πολωνύμων $\mathbb{R}_n[x]$, με $n=0,1,2,3$, αρκεί να απαιτήσουμε ο μεγιστοβάθμιος συντελεστής όλων των πολωνύμων να είναι η μονάδα. Τα πολώνυμα αυτά

ονομάζονται **πολυώνυμα Legendre** και βρίσκουν εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις. ♦♦♦

Εφαρμογή 6.2 Έστω ο ορθομοναδιαίος πίνακας $A \in M_n(\mathbb{F})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$ και $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο στο χώρο \mathbb{F}^n . Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$i) \quad \langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

$$ii) \quad \|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$$

Απόδειξη : Επειδή A ορθομοναδιαίος πίνακας, από την ισότητα (ii) στην (6.28) ισχύει $A^*A = I$.

i) Για το σύννηθες εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$, από τις ισότητες στην (6.8) ή (6.9), ανάλογα με το \mathbb{F} (σύνολο πραγματικών ή μιγαδικών αριθμών), μπορούμε να γράψουμε :

$$\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle = (A\mathbf{y})^* A\mathbf{x} = \mathbf{y}^* A^* A\mathbf{x} = \mathbf{y}^* \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

ii) Στο μέτρο του διανύσματος $A\mathbf{x} \in M_{n \times 1}(\mathbb{F})$, που υπολογίζεται από τις σχέσεις στις (6.13) ή (6.15), κάνουμε αντικατάσταση της ισότητας $A^*A = I$, οπότε έχουμε :

$$\|A\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle A\mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle} = \sqrt{(A\mathbf{x})^* A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^* A^* A\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^* \mathbf{x}} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \|\mathbf{x}\| \quad \text{♦♦♦}$$

Εφαρμογή 6.3 i) Έστω ότι ο πίνακας $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ έχει n γραμμικά ανεξάρτητες στήλες. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A παραγοντοποιείται στη μορφή ⁽¹⁾

$$A = QR, \quad (6.36)$$

όπου ο πίνακας $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ έχει στήλες τα διανύσματα της ορθοκανονικής βάσης του χώρου στηλών του A και ο πίνακας $R \in M_n(\mathbb{F})$ είναι ένας αντιστρέψιμος άνω τριγωνικός πίνακας.

ii) Να βρεθεί η QR παραγοντοποίηση του πίνακα A , όπου

⁽¹⁾ Η παραγοντοποίηση ενός πίνακα στη μορφή $A = QR$ με τους πίνακες Q, R , όπως δίνονται στην Εφαρμογή 6.3. (i), είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως **QR παραγοντοποίηση** του πίνακα A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Απόδειξη : i) Έστω $C = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ το σύνολο των γραμμικά ανεξάρτητων στηλών του πίνακα A . Στα στοιχεία του συνόλου C εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 6.1, βήμα 1 και κατασκευάζουμε ένα σύνολο με ορθογώνια στοιχεία, έστω το $B_C = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$. Από τη θεωρία της μεθόδου των Gram-Schmidt είναι φανερό ότι το σύνολο B_C είναι μία βάση του χώρου στηλών του πίνακα A .

Επίσης, λύνοντας ως προς \mathbf{a}_i , $i=1,2,\dots,n$, τις ισότητες στη μέθοδο ορθογωνοποίησης των διανυσμάτων (Αλγόριθμος 6.1), μπορούμε να γράψουμε το ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{a}_2 &= \mathbf{u}_2 + \frac{\langle \mathbf{a}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + q_{21} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{a}_3 &= \mathbf{u}_3 + \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{a}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 + q_{31} \mathbf{u}_1 + q_{32} \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{a}_n &= \mathbf{u}_n + \frac{\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\langle \mathbf{a}_n, \mathbf{u}_{n-1} \rangle}{\|\mathbf{u}_{n-1}\|^2} \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{u}_n + q_{n1} \mathbf{u}_1 + \dots + q_{n,n-1} \mathbf{u}_{n-1}, \end{aligned}$$

όπου $q_{ij} = \frac{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{u}_j \rangle}{\|\mathbf{u}_j\|^2}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$. Από το προηγούμενο σύστημα είναι φανερό ότι ο

πίνακας A μπορεί να γραφεί με τη μορφή $A = QR$, όπου

$$Q = (\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n) D^{-1}, \quad D = \text{diag}(\|\mathbf{u}_1\|, \|\mathbf{u}_2\|, \dots, \|\mathbf{u}_n\|) \quad (6.37)$$

και

$$R = D \begin{pmatrix} 1 & q_{21} & q_{31} & \dots & q_{n1} \\ & 1 & q_{32} & \dots & q_{n2} \\ & & 1 & & q_{n3} \\ & \mathbb{O} & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (6.38)$$

Ο πίνακας R στην (6.38) είναι αντιστρέψιμος, διότι είναι γινόμενο ενός διαγωνίου (τα διαγώνια στοιχεία είναι διαφορετικά από το μηδέν ως μέτρα μη μηδενικών

διανυσμάτων) και ενός άνω τριγωνικού, με διαγώνια στοιχεία τη μονάδα, και συνεπώς $\det R = \|\mathbf{u}_1\| \cdot \|\mathbf{u}_2\| \dots \|\mathbf{u}_n\| \neq 0$.

Επομένως, όταν οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες, επιτυγχάνεται πάντοτε η παραγοντοποίηση του πίνακα στη μορφή που δίνεται στην (6.36).

Επίσης, αν πολλαπλασιάσουμε την (6.36) αριστερά επί τον πίνακα Q^* , έχουμε

$$A = QR \Leftrightarrow Q^*A = Q^*QR. \quad (6.39)$$

Για τον πίνακα Q στην (6.37) ισχύει η ιδιότητα $Q^*Q = I$, οπότε με αντικατάσταση στη δεξιά ισότητα της (6.39) βρίσκουμε ένα συντομότερο τρόπο υπολογισμού του πίνακα R , που είναι :

$$R = Q^*A \quad (6.40)$$

ii) Θεωρούμε τις τρεις στήλες του A ως διανύσματα του \mathbb{R}^n και εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 4.2, προκειμένου να ελέγξουμε τη γραμμική ανεξαρτησία τους. Επειδή $r(A) = 3$, οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες (Αλγόριθμος 4.2, βήμα 3 (i)). Στο ερώτημα (i) αποδείχθηκε ότι ο πίνακας A παραγοντοποιείται, όταν οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Η παραγοντοποίηση επιτυγχάνεται από τους πίνακες Q, R , όπως αυτοί δίνονται στις ισότητες των (6.37) και (6.40), όπου $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ είναι το σύνολο που προκύπτει από την εφαρμογή της μεθόδου των Gram-Schmidt στο σύνολο των στηλών του A .

Έστω ότι τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)^t$, $\mathbf{v}_2 = (3 \ -3 \ 2 \ 5 \ 5)^t$ και $\mathbf{v}_3 = (5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 8)^t$ είναι οι στήλες του A . Ο διανυσματικός χώρος $M_{5 \times 1}(\mathbb{R})$ είναι εφοδιασμένος με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο. Εφαρμόζουμε τον Αλγόριθμο 6.1 για τα διανύσματα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ και έχουμε :

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)^t$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 = (3 \ -3 \ 2 \ 5 \ 5)^t - \frac{16}{4} (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)^t = (-1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)^t$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2} \mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\|\mathbf{u}_2\|^2} \mathbf{u}_2 = (5 \ 1 \ 3 \ 2 \ 8)^t - \frac{14}{4} (1 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1)^t - \frac{12}{8} (-1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1)^t \\ &= (3 \ 3 \ 0 \ -3 \ 3)^t \end{aligned}$$

Επειδή τα μέτρα των διανυσμάτων $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ είναι $\|\mathbf{u}_1\| = 2$, $\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ και $\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{36} = 6$, ο διαγώνιος πίνακας στην (6.37) είναι $D = \text{diag}(2, 2\sqrt{2}, 6)$ και ο πίνακας Q είναι :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Από την (6.40) βρίσκουμε τον αντιστρέψιμο πίνακα R , που είναι :

$$R = Q^* A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 7 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad (6.42)$$

Εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι οι πίνακες, που υπολογίστηκαν στις (6.41) και (6.42), δίνουν την παραγοντοποίηση του πίνακα A , διότι ισχύει $A = QR$. ♦♦♦

6.5 Ασκήσεις