5.5 Αριθμητική Ολοκλήρωση

Αν μια συνάρτηση f(x) είναι συνεχής στο διάστημα [a, b] και η παράγουσά της (αόριστο ολοκλήρωμα) F(x) είναι γνωστή, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης αυτής υπολογίζεται από το γνωστό τύπο των Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

όπου $F'(x) = f(x)$.

Πολλές φορές η F(x) δεν είναι εύκολο να βρεθεί, ή και αν βρεθεί είναι εξαιρετικά πολύπλοκη. Επομένως και ο υπολογισμός του ορισμένου ολοκληρώματος της f(x) είναι δύσκολος ή πρακτικά αδύνατος.

Έτσι, επινοήθηκαν διάφοροι μέθοδοι προσέγγισης για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.

Η επινόηση και διερεύνηση αποτελεσματικών τύπων αριθμητικής ολοκλήρωσης, αποτελεί ένα από τα βασικά αντικείμενα της αριθμητικής ανάλυσης, λόγω της μεγάλης χρησιμότητας των ολοκληρωμάτων στα Μαθηματικά και γενικά στις θετικές Επιστήμες.

5.6 Βασικοί Κανόνες Αριθμητικής Ολοκλήρωσης

Οι ακόλουθες μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης, βασίζονται στην υπόθεση, ότι ένα ορισμένο ολοκλήρωμα είναι το όριο κάποιου αθροίσματος.

5.6.1 Κανόνας του Ορθογωνίου

Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[a, b]$. Για να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx$$

υποδιαιρούμε το διάστημα $[a, b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με τα σημεία $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$. Το κάθε ένα από τα υποδιαστήματα αυτά θα έχει μήκος

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Θεωρούμε τώρα το άθροισμα

$$y_0h + y_1h + \dots y_{n-1}h \text{ ή } y_1h + y_2h + \dots + y_nh.$$

Το άθροισμα αυτό παριστάνει μια προσέγγιση στο εμβαδόν που επιζητούμε, με ενδιάμεσα παραλληλόγραμμα. Γι' αυτό, εκφράζουμε προσεγγιστικά το ολοκλήρωμα της $f(x)$ στο $[a, b]$ με τη σχέση

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx y_0h + y_1h + \dots + y_{n-1}h} \tag{5.14α}$$

ή

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx y_1h + y_2h + \dots + y_nh} \tag{5.14β}$$

Αυτός είναι ο **σύνθετος τύπος του Ορθογωνίου**. Η απλούστερη μορφή αυτού είναι

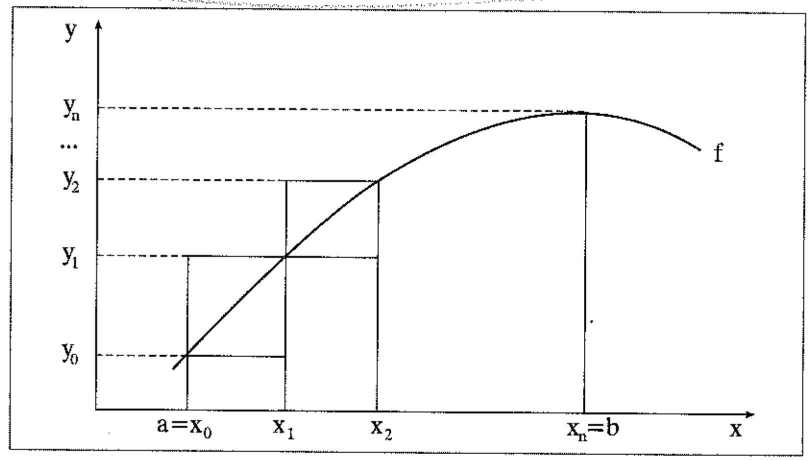
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx y_0h} \tag{5.15}$$

που λέγεται **απλός κανόνας** ή **απλός τύπος του Ορθογωνίου.**

Είναι φανερό ότι, όσο λεπτότερη κάνουμε τη διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$, τόσο μικρότερο είναι το σφάλμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Σημείωση: Μια παραλλαγή του τύπου του ορθογωνίου, για μικρότερο σφάλμα, είναι η αντικατάσταση των τιμών $f(x_i)$ με τις τιμές $f\left(\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left[f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+\dots+f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)\right]} \tag{5.16}$$



Σχημα 5.2
Γραφική παράσταση του τύπου του Ορθογωνίου.

Παράδειγμα 4

Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^2 x^3 dx$$

με το σύνθετο τύπο του Ορθογωνίου, όταν n = 4.

Λύση

Είναι a = 0, b = 2 και $h=\frac{2-0}{4}=0.5$.

Υπολογισμός των y_i, i = 0, 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} y_0 &= 0 \\ y_1 &= 0.5^3 = 0.125 \\ y_2 &= 1^3 = 1 \\ y_3 &= 1.5^3 = 3.375. \end{aligned}$$

Οπότε ο (5.14) γίνεται

$$\int_0^2 x^3 dx \approx 0.5(0.125+1+3.375)=2.25.$$

Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος είναι 4. Όπως φαίνεται το σφάλμα είναι μεγάλο. Αν εφαρμόσουμε τον τύπο (5.16) θα έχουμε

$$f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)=f\left(\frac{0+0.5}{2}\right)=f(0.25)=0.25^3=0.015625$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=f\left(\frac{0.5+1}{2}\right)=f(0.75)=0.75^3=0.5675$$

$$f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)=f\left(\frac{1+1.5}{2}\right)=f(1.25)=1.25^3=1.953125$$

$$f\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)=f\left(\frac{1.5+2}{2}\right)=f(1.75)=1.75^3=5.890625.$$

Οπότε

$$\int_0^2 x^3 dx \approx 0.5(0.015625+0.5675+1.953125+5.890625)=3.9453125.$$

Εδώ βλέπουμε ότι το σφάλμα είναι μικρότερο.

ΑΣΚΗΣΗ

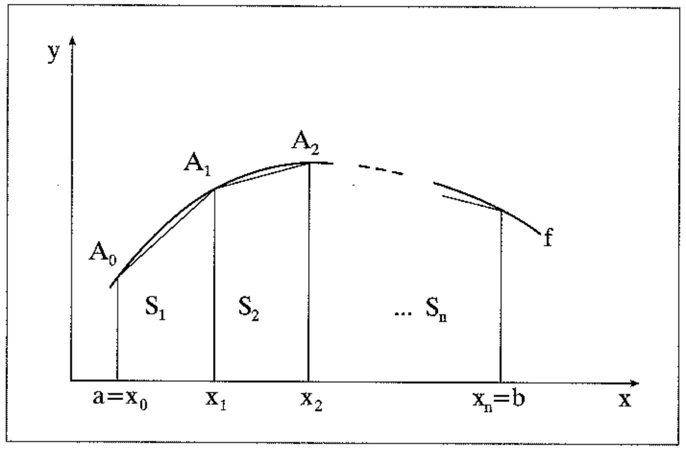
Να βρεθούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων

$$\alpha)\ \int_1^5 x^{-1}\,dx,\quad \beta)\ \int_0^4 e^x dx\quad (e=0.271),\quad \gamma)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\eta\mu x dx$$

με το τύπο του ορθογωνίου (5.14) και μετά με τον (5.16), όταν n = 4. Να συγκριθούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων με τις ακριβείς (αναλυτικές) τιμές αυτών.

5.6.2 Κανόνας του Τραπεζίου

Αν προσεγγίσουμε την καμπύλη y = f(x) όχι από μια κλιμακωτή γραμμή, όπως στο τύπο του Ορθογωνίου, αλλά από μια τεθλασμένη (βλ. Σχήμα 5.3), τότε το εμβαδόν του πολυγώνου $aA_0 \ldots A_n b$ ισούται με το άθροισμα των ορθογωνίων τραπεζίων $S_1, S_2, \ldots, S_n$.



ΣΧΗΜΑ 5.3
Γραφική παράσταση του τύπου του Τραπεζίου.

Επειδή $S_1=\frac{y_0+y_1}{2}h, S_2=\frac{y_1+y_2}{2}h$, κ.λπ. θα είναι

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)} \quad (5.17)$$

Αυτός είναι ο **σύνθετος τύπος του Τραπεζίου.** Η απλούστερη μορφή αυτού είναι

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_a+y_b}{2}h} \quad (5.18)$$

που λέγεται **απλός κανόνας** ή **απλός τύπος του Τραπεζίου.**

Είναι φυσικό να προσδοκούμε μια καλύτερη προσέγγιση με το κανόνα του Τραπεζίου από το κανόνα του Ορθογωνίου, αφού αντικαταστήσαμε τη κλιμακωτή γραμμή από μια τεθλασμένη.

Αλγόριθμος σύνθετου τύπου Τραπεζίου

Προσέγγιση του ολοκληρώματος $I = \int_a^b f(x)dx$

INPUT Άκρα a, b. Άρτιος θετικός ακέραιος n.

OUTPUT Προσέγγιση S του I

Βήμα 1 Θέσε $h = (b-a)/n$

Βήμα 2 Θέσε $S_0 = f_0 + f_n$
$S_1 = 0$.

Βήμα 3 Για $j = 1, 2, \ldots, n-1$, εκτέλεσε τα βήματα 4 και 5.

Βήμα 4 Θέσε $x = a + jh$

Βήμα 5 Θέσε $S_1 = S_1 + f(x)$

Βήμα 6 Θέσε $S = h(S_0+2S_1)/2$

Βήμα 7 OUTPUT (S)
STOP

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_0^2 x^3 dx$$

με το σύνθετο τύπο του Τραπεζίου, όταν n = 4.

Λύση

Είναι a = 0, b = 2 και $h = \frac{2-0}{4} = 0.5$.

Υπολογισμός των y_i, i = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = 0.5^3 = 0.125$$
$$y_2 = 1^3 = 1$$
$$y_3 = 1.5^3 = 3.375$$
$$y_4 = 2^2 = 8.$$

Οπότε ο (5.17) γίνεται

$$\int_0^2 x^3 dx \approx 0.5\left(\frac{0+8}{2}+0.125+1+3.375\right) = 4.25.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων

α) $\int_1^5 x^{-1}dx$, β) $\int_0^4 e^x dx \quad (e = 2.71)$, γ) $\int_0^2 xe^x dx \quad (e = 2.71)$

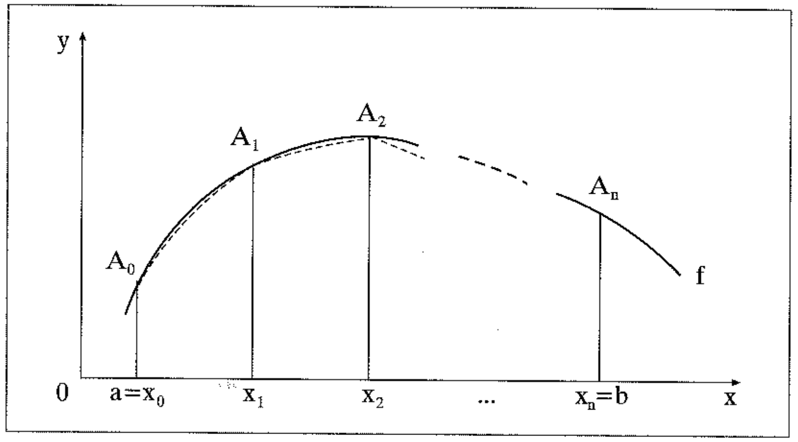
με το τύπο του Τραπεζίου (5.17), όταν α) n=4 και β) n = 6. Να συγκριθούν οι τιμές των ολοκληρωμάτων με τις ακριβείς (αναλυτικές) τιμές αυτών.

5.6.3 Κανόνας του Simpson

Υποδιαιρούμε εδώ, το διάστημα [a, b] σε ένα άρτιο αριθμό (n=2k) ίσων υποδιαστημάτων. Αντικαθιστούμε το εμβαδόν $x_0A_0A_1A_2x_2$ της f(x), που αντιστοιχεί στα δύο πρώτα διαστήματα, από το αντίστοιχο εμβαδόν του δευτεροβάθμιου πολυωνύμου παρεμβολής. Το σχήμα αυτό το ονομάζουμε «παραβολικό τραπεζοειδές».

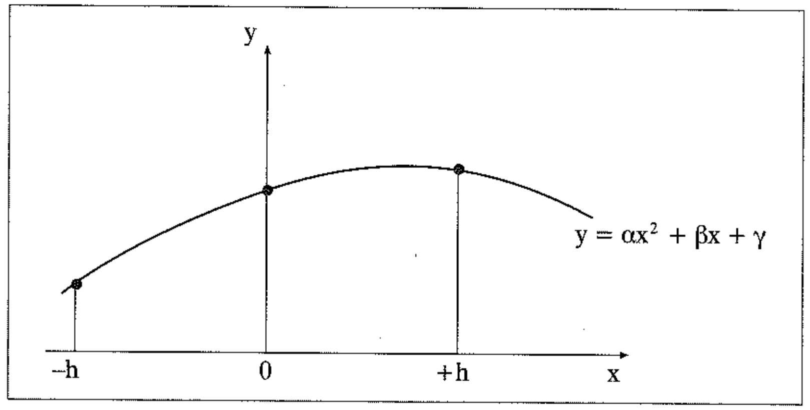
Οι συντελεστές της παρεμβαλλόμενης παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ορίζονται μονότιμα, αφού αυτή περνάει από τρία συγκεκριμένα σημεία.

Ανάλογες παραβολές μπορούν να οριστούν και για τα υπόλοιπα ζεύγη των υποδιαστημάτων του [a, b]. Το άθροισμα των εμβαδών των παραβολικών τραπεζοειδών, που σχηματίζονται, θα δώσει την προσεγγιστική τιμή του ολοκληρώματος της f(x).



Σχημα 5.4
Γραφική παράσταση του τύπου του Simpson.

Θα υπολογίσουμε τώρα το εμβαδόν ενός παραβολικού τραπεζοειδούς χρησιμοποιώντας ένα βοηθητικό σύστημα συντεταγμένων (βλ. Σχήμα 5.5).



Σχημα 5.5

Οι συντελεστές της παραβολής προσδιορίζονται από το σύστημα, που προκύπτει, ως εξής.

$$\left|\begin{array}{llll} \text{Για} & x_0 = -h & \text{είναι} & y_0 = \alpha h^2 - \beta h + \gamma \\ \text{Για} & x_1 = 0 & \text{είναι} & y_1 = \gamma \\ \text{Για} & x_2 = h & \text{είναι} & y_2 = \alpha h^2 + \beta h + \gamma \end{array}\right. \qquad (5.19)$$

Αφού βρεθούν οι συντελεστές α, β και γ, από την επίλυση του συστήματος (5.19), υπολογίζουμε κατόπιν το εμβαδόν του παραβολικού τραπεζοειδούς από τη σχέση

$$S = \int_{-h}^{+h} (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)dx = \left[\frac{\alpha x^3}{3} + \frac{\beta x^2}{2} + \gamma x\right]_{-h}^{+h} = \frac{h}{3}(2\alpha h^2 + 6\gamma).$$

Αλλά από το σύστημα (5.19) έπεται, επίσης, ότι

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2\alpha h^2 + 6\gamma,$$

οπότε

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \qquad (5.20)$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (5.20) μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{a=x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$$

$$\vdots$$

$$\int_{x_{n-2}}^{x_n=b} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[(y_0+y_n+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})\right].} \quad (5.21)$$

Αυτός είναι ο **σύνθετος τύπος του Simpson**.

Αν το διάστημα [a, b] το διαιρέσουμε σε δύο ίσα υποδιαστήματα, τότε θα έχουμε τον **απλό κανόνα ή τύπο του Simpson**:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2).} \quad (5.22)$$

Αλγόριθμος σύνθετου τύπου του Simpson

Προσέγγιση του ολοκληρώματος $I=\int_a^b f(x)dx$

INPUT Άκρα a, b. Άρτιος θετικός ακέραιος n.

OUTPUT Προσέγγιση S του I

Βήμα 1 Θέσε h = (b–a) / h

Βήμα 2 Θέσε $S_0 = f(a) + f(b)$
$S_1 = 0$
$S_2 = 0$

Βήμα 3 Για i = 1, 2, ..., n–1, εκτέλεσε τα βήματα 4 και 5.

Βήμα 4 Θέσε x = a + ih

Βήμα 5 Αν i είναι άρτιος τότε θέσε $S_2 = S_2 + f(x)$ διαφορετικά θέσε $S_1 = S_1 + f(x)$

Βήμα 6 Θέσε $S = h(S_0 + 2S_2 + 4S_1)/3$

Βήμα 7 OUTPUT (S)
STOP

Παράδειγμα 6

Να βρεθεί η τιμή του ολοκληρώματος $I=\int_0^2 x^3dx$ με το σύνθετο τύπο του Simpson, όταν n = 4.

Λύση

Είναι a = 0, b = 2 και $h=\frac{2-0}{4}=0.5.$

Υπολογισμός των y_i, i = 0, 1, 2, 3, 4:

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = 0.5^3 = 0.125$$
$$y_2 = 1^3 = 1$$
$$y_3 = 1.5^3 = 3.375$$
$$y_4 = 2^2 = 8.$$

Οπότε ο (5.21) γίνεται $\int_0^2 x^3dx \approx \frac{0.5}{3}(0+8+2\cdot1+4\cdot(0.125+3.375))=4.$