1. Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
Να αποδείξετε ότι: $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\overline{z_2})$

Υπόδ. Εφαρμόστε τις ιδιότητες των απολύτων τιμών και στο τέλος θεωρήστε δύο μιγαδικούς με τη μορφή $x + yi$ και κάντε αντικατάσταση.

2. Για την ακολουθία $\alpha_n = 3n + 2$, να αποδειχθεί με τον ορισμό ότι συγκλίνει στο $+\infty$

Υπόδ. Κάντε αντικατάσταση τον τύπο της ακολουθίας στον σωστό ορισμό. Λύστε ως προς n.

3. Να εξετασθεί ως προς τη σύγκλιση τα σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Υπόδ. Κάντε χρήση των κριτηρίων σύγκλισης.

4. Έστω $\alpha, x \in \mathbb{R}$. Στο σύνολο $\mathbb{C}$ να δείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha x + i}{1 - \alpha x i}\right)^{8n} + \left(\frac{i - \alpha x}{1 + \alpha x i}\right)^{8n} = 2$$

Υπόδ. Προσπαθήστε να υψώσετε στην κατάλληλα δύναμη τις παρενθέσεις για να απαλλαγείτε από το i.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = coshx$. Να αναπτυχθεί σε σειρά McLaurin και να εξετασθεί η σύγκλισή της. Θεωρώντας τους τέσσερις πρώτους όρους του πολυωνύμου Taylor της συνάρτησης να προσεγγίσετε την τιμή της συνάρτησης για $x = 2$. Να βρεθεί το σφάλμα προσέγγισης με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. Δίνεται $cosh2 = 3.762$

6. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n+1)!} x^n$$

Υπόδ. Κάντε χρήση των κριτηρίων σύγκλισης. Προσοχή στο τέλος αντικαθιστούμε τα άκρα του διαστήματος στην αρχική σειρά.

7α . Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ σε σειρά McLaurin και να εξετασθεί η σύγκλισή της.
β. Εάν $f(3) = 8$, να προσεγγιστεί η $f(3)$ με τους 4 πρώτους όρους (σταθερός + 3 όροι) της σειράς McLaurin και να βρεθεί το σφάλμα προσέγγισης (δίνεται $ln2 \cong 0.7$).

8. Να δειχθεί ότι η ακολουθία $a_n = \frac{3n-1}{n+2}$ έχει όριο το 3 με τη χρήση του ορισμού.

Υπόδ. Κάντε σωστή χρήση του ορισμού. Λύστε ως προς n.

9. Έστω συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = x^k, k \in N$. Να βρεθεί το $\lim_{x\to\xi} f(x)$.
Υπόδ. Κάντε χρήση ιδιότητας του ορίου.

10. Να βρεθεί το

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$$

11. Να βρεθεί το $\lim_{x\to 0} f(x)$ εάν $\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq 1$.

12. Θεωρούμε $f: [0,1] \to [0,1]$ συνεχής στο [0,1]. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi$.

13. Έστω η συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει $f(2) = f(3) = f(4)$.

Να δείξετε ότι

Α) $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ \ x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε να ισχύει

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_2}$$

Β) $\exists\xi \in (2,4)$ τέτοιο ώστε

$$\left.\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right|_{x=\xi} = 0$$

Σημειώνεται ότι η λύση να γίνει με το συμβολισμό των παραγώγων που αναγράφεται.

14. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ σε σειρά McLaurin κατά τις δυνάμεις

του $x - 2$