



Λογικές Συναρτήσεις

Λογικές συναρτήσεις

Κάθε λογική συνάρτηση μπορεί να εκφραστεί ως:

1. Άθροισμα ελάχιστων όρων (ΣΠ)
2. Γινόμενο μέγιστων όρων (ΠΣ)

Και οι δύο μορφές έκφρασης ονομάζονται **κανονικές μορφές**.

Ελάχιστοι όροι (Minterms)

Ελάχιστοι όροι μιας συνάρτησης ονομάζονται όλα τα γινόμενα όλων των όρων (μεταβλητών) της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος εμφανίζεται με την κανονική του μορφή (αν έχει τιμή 1) ή με τη συμπληρωματική του μορφή (αν έχει τιμή 0).

Μέγιστοι όροι (Maxterms)

Μέγιστοι όροι μιας συνάρτησης ονομάζονται όλα τα αθροίσματα όλων των όρων (μεταβλητών) της συνάρτησης, όπου ο κάθε όρος εμφανίζεται με την κανονική του μορφή (αν έχει τιμή 0) ή με τη συμπληρωματική του μορφή (αν έχει τιμή 1).

Ελάχιστοι - Μέγιστοι όροι

Ελαχιστόροι και μεγιστόροι τριών δυαδικών μεταβλητών

Δεκαδικό Ισοδύναμο	Δυαδική Μεταβλητή			Ελαχιστόροι		Μεγιστόροι	
	A	B	C	Όρος	Ονομασία	Όρος	Ονομασία
0	0	0	0	$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$	m_0	$A + B + C$	M_0
1	0	0	1	$\overline{A}\overline{B}C$	m_1	$A + B + \overline{C}$	M_1
2	0	1	0	$\overline{A}B\overline{C}$	m_2	$A + \overline{B} + C$	M_2
3	0	1	1	$\overline{A}BC$	m_3	$A + \overline{B} + \overline{C}$	M_3
4	1	0	0	$A\overline{B}\overline{C}$	m_4	$\overline{A} + B + C$	M_4
5	1	0	1	$A\overline{B}C$	m_5	$\overline{A} + B + \overline{C}$	M_5
6	1	1	0	$AB\overline{C}$	m_6	$\overline{A} + \overline{B} + C$	M_6
7	1	1	1	ABC	m_7	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	M_7

Υλοποίηση λογικής συνάρτησης (1)

Μια λογική συνάρτηση που είναι εκφρασμένη με ελαχιστόρους, αληθεύει στις θέσεις του πίνακα αλήθειας που έχουν τιμή 1, ενώ αν είναι εκφρασμένη με μεγιστόρους, αληθεύει στις θέσεις που έχουν τιμή 0.

Για παράδειγμα αν μια συνάρτηση $F(X,Y,Z)$ αληθεύει (έχει έξοδο 1) για εισόδους 001, 010, 101, 110, μπορεί να γραφεί με χρήση ελαχιστόρων ως εξής:

$$\begin{aligned} F &= X' \cdot Y' \cdot Z + X' \cdot Y \cdot Z' + X \cdot Y' \cdot Z + X \cdot Y \cdot Z' = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 \\ &= \Sigma(1, 2, 5, 6) \end{aligned}$$

Υλοποίηση λογικής συνάρτησης (2)

Η ίδια συνάρτηση δεν θα επαληθεύεται (θα έχει έξοδο 0) για τις εισόδους 000, 011, 100, 111. Για αυτές τις εισόδους με χρήση μεγιστόρων μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$F = (X+Y+Z) \cdot (X+Y'+Z') \cdot (X'+Y+Z) \cdot (X'+Y'+Z') \Rightarrow$$

$$F = M_0 \cdot M_3 \cdot M_4 \cdot M_7 = \Pi(0,3,4,7)$$

Συνεπώς

$$F = \Sigma(1,2,5,6) \text{ άθροισμα ελαχιστόρων}$$

$$F = \Pi(0,3,4,7) \text{ γινόμενο μεγιστόρων}$$

Άσκηση (1)

Η συνάρτηση $F=F(x,y,z)$ τριών μεταβλητών x , y και z , όπου x είναι το περισσότερο σημαντικό ψηφίο (Most Significant Bit - MSB) και z είναι το λιγότερο σημαντικό ψηφίο (Least Significant Bit - LSB), έχει οκτώ ελάχιστους όρους και οκτώ μέγιστους όρους ($2^3=8$, όπου 3 = αριθμός μεταβλητών).

Να εκφραστεί ως άθροισμα ελαχιστόρων και γινόμενο μεγιστόρων.

Ο πίνακας αληθείας της συνάρτησης είναι:

Άσκηση (2)

x	y	z	Y	Ελάχιστοι όροι	Μέγιστοι Όροι
0	0	0	0	$m_0 = x'y'z'$	$M_0 = x + y + z$
0	0	1	1	$m_1 = x'y'z$	$M_1 = x + y + z'$
0	1	0	0	$m_2 = x'yz'$	$M_2 = x + y' + z$
0	1	1	0	$m_3 = x'yz$	$M_3 = x + y' + z'$
1	0	0	1	$m_4 = xy'z'$	$M_4 = x' + y + z$
1	0	1	0	$m_5 = xy'z$	$M_5 = x' + y + z'$
1	1	0	0	$m_6 = xyz'$	$M_6 = x' + y' + z$
1	1	1	1	$m_7 = xyz$	$M_7 = x' + y' + z'$

Άσκηση (3)

Άθροισμα ελαχιστόρων: $F = x'y'z + xy'z' + xyz = \Sigma(1,4,7)$

Γινόμενο μεγιστόρων: $F = (x+y+z) \cdot (x+y'+z) \cdot (x+y'+z') \cdot$
 $(x'+y+z') \cdot (x'+y'+z) = \Pi(0,2,3,5,6)$

Από μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων σε απλοποιημένη μορφή συνάρτησης

$$F = \Sigma(0,2,4,6) = m_0 + m_2 + m_4 + m_6 \Rightarrow$$

$$F = X'Y'Z' + X'YZ' + XY'Z' + XYZ' \Rightarrow$$

$$F = (X' + X)Y'Z' + (X' + X)YZ' \Rightarrow$$

$$F = Y'Z' + YZ' \Rightarrow$$

$$F = (Y' + Y)Z' \Rightarrow$$

$$F = Z'$$

Από απλοποιημένη μορφή συνάρτησης σε μορφή αθροίσματος ελαχιστόρων

$$F = Z' + Y(X' + XZ) \Rightarrow$$

$$F = Z' + X'Y + XYZ \Rightarrow$$

$$F = Z'(Y + Y') + X'Y(Z + Z') + XYZ \Rightarrow$$

$$F = YZ' + Y'Z' + X'YZ + X'YZ' + XYZ \Rightarrow$$

$$F = (X + X')YZ' + (X + X')Y'Z' + X'YZ + X'YZ' + XYZ \Rightarrow$$

$$F = XYZ' + X'YZ' + XY'Z' + X'Y'Z' + X'YZ + \cancel{X'YZ'} + XYZ \Rightarrow$$

$$F = m_6 + m_2 + m_4 + m_0 + m_3 + m_7 = \Sigma(0, 2, 3, 4, 6, 7)$$

$$\text{Άρα } F = \Sigma(0, 2, 3, 4, 6, 7) \text{ ή } F = \Pi(1, 5)$$

Άσκηση

$$F = Y' + XZ + X'Y$$

Άσκηση

$$F = Y' + XZ + X'Y \Rightarrow$$

$$F = (X + X')Y' + XZ(Y + Y') + X'Y(Z + Z') \Rightarrow$$

$$F = XY' + X'Y' + XYZ + XY'Z + X'YZ + X'YZ' \Rightarrow$$

$$F = XY'(Z + Z') + X'Y'(Z + Z') + XYZ + XY'Z + X'YZ + X'YZ' \Rightarrow$$

$$F = XY'Z + XY'Z' + X'Y'Z + X'Y'Z' + XYZ + \cancel{XY'Z} + X'YZ + X'YZ' \Rightarrow$$

$$F = m_5 + m_4 + m_1 + m_0 + m_7 + m_3 + m_2 = \Sigma(0,1,2,3,4,5,7)$$

$$\text{Άρα } F = \Sigma(0,1,2,3,4,5,7) \text{ ή } F = \Pi(6)$$

Καλή συνέχεια...