

Σημειώσεις Ανάλυσης II (2021)

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1. Σειρές Πραγματικών αριθμών	1
1. Βασικοί ορισμοί	1
2. Μερικά παραδείγματα σειρών	3
3. Δύο γενικά κριτήρια σύγκλισης σειρών.	5
4. Γενικά κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.	6
5. Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο και το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.	9
6. Το Κριτήριο Λόγου και το Κριτήριο Ρίζας.	12
7. Άθροιση κατά μέρη και τα κριτήρια Dirichlet και Abel	15
8. Απόλυτη σύγκλιση σειρών	17
9. Ερωτήσεις και Ασκήσεις	19
Κεφάλαιο 2. Δυναμοσειρές	23
1. Βασικοί ορισμοί, ακτίνα και διάστημα σύγκλισης δυναμοσειράς	23
2. Συνέχεια, ολοκλήρωση και παραγωγήιση δυναμοσειράς	28
3. Σειρές Taylor	29
4. Λυμένες ασκήσεις	32
5. Ερωτήσεις και Ασκήσεις	36
Κεφάλαιο 3. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$	39
1. Βασικές έννοιες.	39
2. Ανοικτές και κλειστές μπάλες	40
3. Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^n$	42
Κεφάλαιο 4. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όρια και συνέχεια	47
1. Γενικές έννοιες.	47
2. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών	49
3. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών	51
4. Λυμένες Ασκήσεις	52
Κεφάλαιο 5. Παραγωγήιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών	55
1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης	55
2. Παράγωγος κατά κατεύθυνση	56
3. Παράγωγος και διαφορικό	58
4. Εφαπτόμενο επίπεδο	62
5. Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου	62
6. Συνέχεια μερικών παραγώγων και παραγωγισιμότητα	66
7. Ο Κανόνας Αλυσίδας	68

8. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης	72
9. Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης και το Θεώρημα Schwarz	77
10. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης	82
11. Τα Θεωρήματα Taylor για δύο μεταβλητές	84
12. Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών	93
13. Εφαρμογές	105
14. Ερωτήσεις και Ασκήσεις	108

Σειρές Πραγματικών αριθμών

Γενικά με τον όρο *σειρά* εννοούμε μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τυπικά βέβαια ένα τέτοιο άπειρο άθροισμα δεν ορίζεται αφού η πρόσθεση είναι μια πράξη που αφορά πεπερασμένο πλήθος προσθεταίων. Όμως το πρόβλημα αυτό μπορεί να παρακαμφθεί όπως θα δούμε μέσω της έννοιας του *όριου*. Πιο συγκεκριμένα με την παραπάνω έκφραση θα εννοούμε το όριο της ακολουθίας (s_n) με

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

εφόσον βέβαια αυτό υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο). Η ακολουθία αυτή καλείται ακολουθία των *μερικών αθροισμάτων της σειράς*.

Για παράδειγμα το πηλίκιο $1/3 = 0,333\dots$ εκφράζει την σειρά

$$0,333\dots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \dots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

Παρατηρείστε ότι εδώ η ακολουθία (s_n) είναι η ακολουθία

$$s_n = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n}$$

που όπως θα δούμε όντως συγκλίνει στον αριθμό $1/3$.

Οι σειρές έχουν πάρα πολλές εφαρμογές στη Φυσική, στην Επιστήμη των Υπολογιστών και στα Οικονομικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε συνοπτικά τα βασικά στοιχεία της θεωρίας των σειρών πραγματικών αριθμών.

1. Βασικοί ορισμοί

Σειρά είναι μια άπειρη παράσταση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

όπου (a_n) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το άθροισμα

$$s_n = a_1 + \dots + a_n$$

ονομάζεται ***n-μερικό άθροισμα της σειράς*** και η ακολουθία (s_n) που προκύπτει από αυτά καλείται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς***. Η παραπάνω σειρά γράφεται και με το σύμβολο “ $\sum$ ” του αθροίσματος ως

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

και ομοίως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ γράφεται και το n -μερικό άθροισμα ως

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.1. Παρατηρείστε ότι από την ακολουθία (s_n) μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία (a_n) αφού $a_1 = s_1$ και για κάθε $n \geq 2$,

$$a_n = s_n - s_{n-1}.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.2. Πολλές φορές είναι χρήσιμο η άθροιση σε μια σειρά να ξεκινάει από το $n = 0$ αντί για το $n = 1$ (ή ακόμη και από άλλους φυσικούς αριθμούς πχ. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$). Στην περίπτωση αυτή για τη σειρά γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

και τα μερικά αθροίσματα είναι η ακολουθία (s_n) όπου

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + \dots + a_n$$

δηλαδή $s_0 = a_0$, $s_1 = a_0 + a_1$, $s_2 = a_0 + a_1 + a_2$, ...

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της. Αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s$$

(πεπερασμένο ή άπειρο) τότε το όριο αυτό καλείται **όριο** (ή **άθροισμα**) της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και στην περίπτωση αυτή γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Όταν το όριο s της σειράς είναι πραγματικός αριθμός θα λέμε ότι η σειρά **συγκλίνει** στο $s \in \mathbb{R}$ ή ότι η σειρά είναι **συγκλίνουσα**. Όταν το όριο της σειράς είναι το $+\infty$ (αντ. το $-\infty$) τότε θα λέμε ότι η σειρά **αποκλίνει** στο $+\infty$ (αντ. στο $-\infty$). Μια σειρά που δεν είναι συγκλίνουσα (δηλαδή το όριό της είτε δεν υπάρχει ή υπάρχει αλλά είναι $\pm\infty$) θα καλείται **αποκλίνουσα** σειρά. Ειδικότερα, αν όριό της δεν υπάρχει τότε λέμε ότι η σειρά **ταλαντώνεται**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \dots$ είναι ένα αράδειγμα αποκλίνουσας σειράς που ταλαντώνεται. Πράγματι, έχουμε $s_{2n} = 0 \rightarrow 0$ και $s_{2n-1} = -1 \rightarrow -1$ και συνεπώς το όριο της (s_n) δεν υπάρχει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.2. Έστω οι συγκλίνουσες σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ και έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ είναι συγκλίνουσα και ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $s_n = a_1 + \dots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \dots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντίστοιχα. Τότε για τα μερικά αθροίσματα w_n της $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ έχουμε

$$w_n = (\lambda a_1 + \mu b_1) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda s_n + \mu \tau_n$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$$

□

2. Μερικά παραδείγματα σειρών

1) Η γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

ή γενικότερα

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + ax^3 + \dots$$

όπου $a \neq 0, x$ σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Όπως θα δούμε η γεωμετρική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή το άθροισμα της σειράς είναι

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}$$

Πχ. όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου αν $a = 3/10$ και $x = 1/10$ έχουμε την σειρά

$$\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2) Η αρμονική σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Αποδεικνύεται (δείτε Παράδειγμα 1.13) ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

3) Οι p -αρμονικές σειρές, δηλαδή οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots$$

όπου $p \in \mathbb{R}$. Αποδεικνύεται (δείτε Πρόταση 1.13) ότι η p -αρμονική σειρά είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν $p > 1$. Ειδικότερα για $p = 2$ αποδεικνύεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

4) Οι **εναλλάσσουσες σειρές** δηλαδή σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$$

όπου $a_n > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Χαρακτηριστικό παράδειγμα εδώ είναι η **εναλλάσσουσα αρμονική σειρά**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

Αποδεικνύεται¹ ότι για την εναλλάσσουσα αρμονική έχουμε

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots = \ln 2$$

5) Οι **τηλεσκοπικές σειρές**: Από την Παρατήρηση 1.1 κάθε σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ γράφεται ως $\sum_{n=1}^{\infty} (s_n - s_{n-1})$ όπου $s_n = 0$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$ αν $n \geq 1$. Μια σειρά καλείται **τηλεσκοπική ως προς μια δεδομένη ακολουθία** (b_n) όταν είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$ ή της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ δηλαδή οι όροι της είναι διαφορές διαδοχικών όρων της (b_n) . Παρατηρείστε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n-1})$ δίνονται από τον τύπο

$$s_n = (b_1 - b_0) + (b_2 - b_1) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = b_n - b_0$$

και ανάλογα αν είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$. Έτσι το άθροισμα μιας τηλεσκοπικής σειράς προσδιορίζεται από το όριο της ακολουθίας (b_n) που την ορίζει. Ένα κλασσικό παράδειγμα εδώ είναι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

Η παραπάνω σειρά είναι τηλεσκοπική (ως προς την ακολουθία $b_n = \frac{1}{n}$) διότι

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = b_n - b_{n+1}$$

και άρα

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

6) **Σειρές που συγκλίνουν στο π και στον e** : Αποδεικνύεται² ότι

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

¹Με χρήση του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της $\ln(1+x)$

²Η απόδειξη γίνεται με χρήση δυναμοσειρών και συγκεκριμένα με το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά της $\arctan x$ που θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

και συνεπώς ο αριθμός π γράφεται με τη μορφή σειράς ως

$$\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \dots$$

Αντίστοιχα για τον αριθμό e αποδεικνύεται ³ ότι

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

3. Δύο γενικά κριτήρια σύγκλισης σειρών.

Η θεωρία των σειρών επικεντρώνεται στην εύρεση κριτηρίων που δείχνουν αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι. Υπενθυμίζουμε ότι όταν λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει εννοούμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.

Το πρώτο πράγμα που βλέπουμε σε μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι οι όροι της, δηλαδή η ακολουθία (a_n) . Επειδή

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

έπεται άμεσα ότι αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$ τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.3. *Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$. Ισοδύναμα, αν η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$ αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \cos 0 = 1$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.4. *Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = a + ax + ax^2 + \dots$ (όπου $a \neq 0$) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$ και στην περίπτωση αυτή*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n = \frac{a}{1-x}.$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} ax^n$ συγκλίνει τότε από την Πρόταση 1.3 θα πρέπει $\lim_{n \rightarrow +\infty} (ax^n) = a \lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$. Επειδή $a \neq 0$ αυτό σημαίνει ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να συμβαίνει όταν $|x| \geq 1$ αφού τότε $|x^n| = |x|^n \geq 1$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν τώρα $x \in (-1, 1)$ επειδή

$$s_n = a + ax + \dots + ax^n = a \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

θα έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(a \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right) = a \frac{1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} x^{n+1}}{1 - x} = \frac{a}{1 - x}$$

□

³Πάλι η απόδειξη γίνεται με χρήση του αναπτύγματος σε δυναμοσειρά της e^x .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.3. Τονίζουμε ότι η Πρόταση 1.3 **δεν** μας λέει ότι αν $a_n \rightarrow 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Πχ. $1/n \rightarrow 0$ αλλά όπως έχουμε αναφέρει η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ (θα το αποδείξουμε αυτό στην επόμενη παράγραφο).

Το δεύτερο γενικό κριτήριο σύγκλισης σειρών είναι το κριτήριο Cauchy. Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία (a_n) καλείται Cauchy αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $|a_n - a_m| < \varepsilon$ για όλα τα $n > m \geq n_0$. Όπως έχουμε δει στις ακολουθίες μια ακολουθία είναι συγκλίνουσα (σε πραγματικό αριθμό) αν και μόνο αν είναι Cauchy. Επειδή εξ ορισμού μια σειρά είναι συγκλίνουσα αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της είναι συγκλίνουσα, όσον αφορά τις σειρές το κριτήριο Cauchy αναδιατυπώνεται άμεσα ως εξής:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.5. (**Κριτήριο Cauchy**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Τότε η σειρά συγκλίνει αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς είναι Cauchy, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$|s_n - s_m| = a_{m+1} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

για όλα τα $n > m \geq n_0$.

Το κριτήριο Cauchy είναι πολύ χρήσιμο εργαλείο για την απόδειξη άλλων κριτηρίων σύγκλισης σειρών που θα παρουσιάσουμε στην συνέχεια. Μια άμεση εφαρμογή του είναι και η παρακάτω:

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.6. Έστω οι ακολουθίες (a_n) και (b_n) με $a_n = b_n$ για όλα τα $n \geq n_0$.

(1) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει (όχι όμως απαραίτητα στον ίδιο πραγματικό αριθμό).

(2) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$) τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει στο $+\infty$ (αντ. $-\infty$).

(2) Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ταλαντώνεται τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ταλαντώνεται.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \cdots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αντιστοίχως τότε για κάθε $n > m \geq n_0$ έχουμε ότι

$$|s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^n a_k = \sum_{k=m+1}^n b_k = |\tau_n - \tau_m|.$$

Από αυτή την παρατήρηση και το κριτήριο Cauchy η πρόταση έπεται εύκολα. □

4. Γενικά κριτήρια σειρών με μη αρνητικούς όρους.

Οι πρώτες σειρές που μελετάμε είναι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μερικά βασικά κριτήρια σύγκλισης τέτοιων σειρών. Είναι εύκολο καταρχάς να δούμε ότι τα μερικά αθροίσματα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους αποτελούν μια **αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών αριθμών** αφού

$$s_{n+1} = a_1 + \cdots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \geq 0$$

Ως γνωστόν, μια αύξουσα ακολουθία είτε είναι άνω φραγμένη και συγκλίνει σε πραγματικό αριθμό είτε δεν είναι άνω φραγμένη και αποκλίνει στο $+\infty$. Συνεπώς είτε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \geq 0$ ή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$. Με άλλα λόγια πάντα υπάρχει το άθροισμα μιας σειράς με μη αρνητικούς όρους (μπορεί όμως να είναι και το $+\infty$). Καταλήξαμε συνεπώς στο εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.7. Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(1) Αν η (s_n) είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά συγκλίνει.

(2) Αν η (s_n) δεν είναι άνω φραγμένη τότε η σειρά αποκλίνει και ειδικότερα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Cauchy και το ότι δύο σειρές με τελικά τους ίδιους όρους έχουν τις ίδιες διαφορές μερικών αθροισμάτων από κάποιο n_0 και μετά (δείτε και την απόδειξη της Πρότασης 1.6), έπεται το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.8. (Κριτήριο Σύγκρισης) Έστω (a_n) και (b_n) δύο ακολουθίες μη αρνητικών αριθμών με την ιδιότητα $a_n \leq b_n$, για κάθε $n \geq n_0$. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή ισοδύναμα, αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $s_n = a_1 + \dots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \dots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Αν $n > m \geq n_0$ τότε από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$|s_n - s_m| = s_n - s_m = a_n + \dots + a_{m+1} \leq b_n + \dots + b_{m+1} = \tau_n - \tau_m = |\tau_n - \tau_m|$$

Από την σχέση αυτή έπεται ότι αν η (τ_n) είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει) τότε και η (s_n) είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει). Ισοδύναμα αν η (s_n) δεν είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει) τότε ούτε και η (τ_n) είναι Cauchy (η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει). $\square$

Απο το παραπάνω έπεται και το εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.9. (Οριακό Κριτήριο Σύγκρισης) Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ σειρές με $a_n \geq 0$ και $b_n > 0$ για κάθε $n \geq n_0$. Έστω επίσης ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$$

Τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \in (0, +\infty)$ για $\varepsilon = L/2$ έχουμε ότι υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με

$$0 < \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2} \Rightarrow 0 < \frac{L}{2} \cdot b_n < a_n < \frac{3L}{2} \cdot b_n \quad (1.1)$$

Έστω $s_n = a_1 + \dots + a_n$ και $\tau_n = b_1 + \dots + b_n$ τα μερικά αθροίσματα των σειρών $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την (1.1) έπεται ότι

$$0 < \tau_n < \frac{2}{L} \cdot s_n \quad (1.2)$$

και

$$0 < s_n < \frac{3L}{2} \cdot \tau_n. \quad (1.3)$$

Έστω τώρα ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει. Αυτό σημαίνει ότι η (s_n) είναι συγχλίνουσα και άρα φραγμένη. Από την (1.2) έπεται ότι η (τ_n) είναι άνω φραγμένη και συνεπώς από την Πρόταση 1.7 η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγχλίνει. Αντίστοιχα με τον ίδιο συλλογισμό και χρησιμοποιώντας την (1.3) δείχνουμε ότι αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγχλίνει τότε συγχλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή όπως έχουμε πεί και θα εξηγήσουμε στα επόμενα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγχλίνει.

Πράγματι, $0 < \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n^2}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και άρα επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

συγχλίνει, απο το κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ συγχλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, απο το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγχλίνει.

Πράγματι, $\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει (και αυτό θα το δούμε παρακάτω), από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

Πράγματι,

$$\frac{n+1}{n^2+5n+7} = \frac{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n^2 \left(1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}} = 1$$

Επειδή η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει, από το οριακό κριτήριο σύγκρισης έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+5n+7}$ αποκλίνει.

5. Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο και το Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy.

Στην παράγραφο αυτή θα διατυπώσουμε δύο κριτήρια σύγκλισης για σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ όπου η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών.

Με τα κριτήρια αυτά μπορούμε να δεούμε γιατί η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ,

αν $p > 1$, η p -αρμονική $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.10. Αν $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα του $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq a$, το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f ορίζεται να είναι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$$

και συμβολίζεται με

$$\int_a^{+\infty} f(t) dt$$

Το παραπάνω όριο πάντα υπάρχει (επειδή η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ είναι αύξουσα όταν η f είναι θετική) μπορεί να είναι όμως και $+\infty$. Στην περίπτωση όπου το $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ είναι πραγματικός αριθμός λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα της f συγκλίνει. Διαφορετικά λέμε ότι αποκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.11. Έστω $p \geq 1$ και $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο

$$f(t) = \frac{1}{t^p}.$$

(1) Αν $p = 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = +\infty$$

και άρα το το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ αποκλίνει.

(2) Αν $p > 1$ τότε

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \frac{1}{p-1}$$

και άρα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι,

$$(\ln t)' = 1/t \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln 1 = \ln x$$

ενώ για κάθε $a \neq -1$,

$$\left(\frac{t^{a+1}}{a+1} \right)' = t^a \Rightarrow \int_1^x t^a dt = \frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

ενώ αν $p > 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x t^{-p} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1} \right) = \frac{1}{p-1}$$

αφού λόγω του ότι $p > 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-p+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{p-1}} = 0$. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.12. (**Το Ολοκληρωτικό Κριτήριο**) Έστω $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια θετική και φθίνουσα συνάρτηση. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι

$$\int_1^n f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx \quad (1.4)$$

και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ συγκλίνει αν και μόνο αν το $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Επειδή η f είναι φθίνουσα έχουμε ότι $f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$ για κάθε $x \in [k, k+1]$ και άρα

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geq 2$,

$$f(1) + \cdots + f(n-1) \geq \int_1^2 f(x) dx + \cdots + \int_{n-1}^n f(x) dx \geq f(2) + \cdots + f(n)$$

ή ισοδύναμα,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) \geq \int_1^n f(x) dx \geq \sum_{k=2}^n f(k).$$

Η (1.4) προκύπτει εύκολα από την παραπάνω σχέση. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.4. Αν $f(x) = 1/x$ τότε η σχέση (1.4) δίνει

$$\ln n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$$

και συνεπώς $0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n < 1$

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.13. Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει ενώ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ με $p > 1$, συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πράγματι, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t$. Από τη Πρόταση 1.11 έχουμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ αποκλίνει και άρα από το Ολοκληρωτικό κριτήριο η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει. Αντίστοιχα, για $p > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ με $f(t) = 1/t^p$ και από την Πρόταση 1.11 το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^p} dt$ συγκλίνει. $\square$

Περνάμε τώρα σε ένα δεύτερο κριτήριο για σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.14. (**Κριτήριο Συμπύκνωσης του Cauchy**) Έστω (a_n) φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα δείξουμε ότι ισχύει η επόμενη ανισότητα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Πράγματι, επειδή η (a_n) είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \dots \\ &= a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \\ &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα,

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots \\
 &= a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \dots \\
 &\leq a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3 + a_3 + a_4) + \dots \\
 &= 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots) \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n.
 \end{aligned}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.8. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο συμπίκνωσης μπορούμε να δώσουμε και μια γρήγορη απόδειξη της μη σύγκλισης της αρμονικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αλλά και πιο γενικά της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{an+b}$, όπου a, b θετικές σταθερές. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{an+b}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{a \cdot 2^n + b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a + \frac{b}{2^n}} = +\infty$$

αφού $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a + \frac{b}{2^n}} = \frac{1}{a} \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.9. Η σειρά $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$ αποκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών και

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \cdot \ln(2^n)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\ln 2 \cdot n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

6. Το Κριτήριο Λόγου και το Κριτήριο Ρίζας.

Τα κριτήρια Λόγου (D'Alembert) και αντίστοιχα Ρίζας (Cauchy) ανάγουν την σύγκλιση μιας σειράς με θετικούς όρους στην μελέτη της ακολουθίας των λόγων $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ και αντίστοιχα των n -οστών ριζών $\sqrt[n]{a_n}$. Πρόκειται στην ουσία για δύο κριτήρια σύγκρισης της σειράς με την γεωμετρική σειρά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.15. (**Κριτήριο Λόγου I**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(1) Αν υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $0 < \lambda < 1$ τέτοιο ώστε $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$. Τότε $a_{n_0+k} \leq a_{n_0} \lambda^k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $a = \frac{a_{n_0}}{\lambda^{n_0}}$ παίρνουμε ότι

$$a_n \leq a \lambda^n$$

για κάθε $n \geq n_0$. Επειδή $0 < \lambda < 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a \lambda^n$ συγχλίνει (Πρόταση 1.4) και άρα απο το κριτήριο σύγκρισης (Πρόταση 1.8) η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.

(2) Αν $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ έπεται ότι $a_{n+1} \geq a_n$ για κάθε $n \geq n_0$ (δηλαδή η (a_n) είναι τελικά αύξουσα). Ειδικότερα, $a_n \geq a_{n_0} > 0$ για κάθε $n \geq n_0$ που σημαίνει ότι η (a_n) δεν μπορεί να συγχλίνει στο μηδέν και άρα (Πρόταση 1.3) η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει. $\square$

Προκύπτει τώρα άμεσα το επόμενο δεύτερο κριτήριο Λόγου που συνήθως χρησιμοποιούμε στην πράξη.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.16. (**κριτήριο Λόγου II**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$$

- (1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγχλίνει.
 (2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.5. Το Κριτήριο Λόγου II δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

και αντίστοιχα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} \right)^2 = 1$$

αλλά, όπως είδαμε απο το ολοκληρωτικό κριτήριο, η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγχλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.10. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ συγχλίνει. Πράγματι,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{2}{n+1}$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.11. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)!}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot (n+1) \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \end{aligned}$$

και άρα

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

Περνάμε τώρα στο Κριτήριο Ρίζας.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.17. (**Κριτήριο Ρίζας I**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Αν υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ με $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- (2) Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Αν υπάρχει $\lambda \in (0, 1)$ με $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$ για κάθε $n \geq n_0$, τότε $a_n \leq \lambda^n$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα (όπως και στην απόδειξη του κριτηρίου Λόγου) επειδή η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n$ συγκλίνει για $0 < \lambda < 1$, από το κριτήριο σύγκρισης η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

(2) Αν $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ τότε $a_n \geq 1$ για κάθε $n \geq n_0$ και άρα η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν. $\square$

Μια δεύτερη μορφή του κριτηρίου Ρίζας που έπεται εύκολα και είναι χρήσιμη στην πράξη είναι και η εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.18. (**Κριτήριο Ρίζας II**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \geq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

- (1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.
- (2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.6. Όπως και το κριτήριο λόγου, το κριτήριο ρίζας δεν μπορεί να αποφανθεί αν $\lambda = 1$. Πχ. και για τις δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

και ομοίως

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1$$

αλλά η πρώτη αποκλίνει ενώ η δεύτερη συγκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.7. Είναι γνωστό ότι για μια ακολουθία (a_n) θετικών όρων

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$$

(η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν ισχύει). Άρα το κριτήριο Ρίζας αποφαινεται όπου αποφαινεται και το κριτήριο Λόγου (με τον ίδιο βέβαια τρόπο). Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου το Κριτήριο Λόγου δεν αποφαινεται αλλά το Ρίζας μπορεί να αποφανθεί.

Πχ. η σειρά

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \dots$$

συγκλίνει (στο 2). Είναι $a_{2n-1} = a_{2n} = 1/2^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα

$$\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = 1 \quad \text{ενώ} \quad \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1/2$$

και άρα το κριτήριο Λόγου (και το I και το II) δεν μπορούν να αποφανθούν. Όμως μπορούμε να δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2 < 1$ και άρα από το κριτήριο Ρίζας II η σειρά συγκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.12. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n$ συγκλίνει. Πράγματι,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{5n+4}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{5n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5+4/n} = 3/5 < 1.$$

7. Άθροιση κατά μέρη και τα κριτήρια Dirichlet και Abel

Τα κριτήρια Abel και Dirichlet αναφέρονται σε σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, όπου η ακολουθία (a_n) είναι μονότονη. Η απόδειξή τους στηρίζεται στην παρακάτω ταυτότητα που καλείται και *άθροιση κατά μέρη*. Η ταυτότητα αυτή είναι ανάλογη με την αντίστοιχη ταυτότητα της Ολοκλήρωσης κατά μέρη.

ΛΗΜΜΑ 1.19. (**Άθροιση κατά μέρη**) Έστω $(a_n), (b_n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $B_n = b_1 + \dots + b_n$. Τότε για κάθε $n \geq 2$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \quad (1.5)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.8. Παρατηρήστε ότι στο δεξί μέλος της (1.5) οι όροι a_k με $1 \leq k < n$ αντικαθίστανται με την διαφορά $a_k - a_{k+1}$ ενώ οι όροι b_k με $1 \leq k \leq n$ με το άθροισμα $B_k = b_1 + \dots + b_k$. Αν θέσουμε $B_0 = 0$ το αριστερό μέλος μπορεί να γραφεί και ως $\sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1})$ και έτσι η ταυτότητα να πάρει την εξής ισοδύναμη μορφή

$$\sum_{k=1}^n a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n. \quad (1.6)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n a_k b_k &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\
&= a_1 B_1 + a_2 (B_2 - B_1) + a_3 (B_3 - B_2) + \cdots + a_n (B_n - B_{n-1}) \\
&= a_1 B_1 + a_2 B_2 - a_2 B_1 + a_3 B_3 - a_3 B_2 + \cdots + a_n B_n - a_n B_{n-1} \\
&= a_1 B_1 - a_2 B_1 + a_2 B_2 - a_3 B_2 + a_3 B_3 - \cdots - a_n B_{n-1} + a_n B_n \\
&= (a_1 - a_2) B_1 + (a_2 - a_3) B_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n) B_{n-1} + a_n B_n \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n.
\end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.20. (**Κριτήριο Dirichlet**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Αν η ακολουθία (a_n) είναι μονότονη και μηδενική και η ακολουθία $B_n = b_1 + \cdots + b_n$ φραγμένη τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Από την ταυτότητα της άθροισης κατά μέρη έχουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Η ακολουθία $a_n B_n$ είναι μηδενική ως γινόμενο μηδενικής και φραγμένης ακολουθιάς. Άρα η (s_n) είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν η ακολουθία

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$$

είναι συγκλίνουσα ή ισοδύναμα Cauchy. Πράγματι, έστω $\epsilon > 0$. Έστω επίσης $B > 0$ ένα άνω φράγμα της $(|B_n|)$. Αφού η (a_n) είναι Cauchy υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_n - a_m| < \epsilon/B$. Τότε για κάθε $n > m \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\tau_n - \tau_m| &= \left| \sum_{k=m}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \right| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \cdot |B_k| \\
&\leq B \sum_{k=m}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| \leq B \cdot |a_n - a_m| < \epsilon
\end{aligned}$$

(Παρατηρείστε ότι για κάθε $n > m$ ισχύει ότι

$$\sum_{k=m}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| = |a_n - a_m|$$

λόγω μονοτονίας της (a_n)).

□

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται το επόμενο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.21. (**Κριτήριο Abel**) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Αν η ακολουθία (a_n) είναι μονότονη και συγκλίνουσα (ισοδύναμα μονότονη και φραγμένη) και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουσα σειρά τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ είναι συγκλίνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Έστω επίσης (B_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Από την ταυτότητα της άθροισης κατά μέρη έχουμε

$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_n B_n$$

Η ακολουθία $a_n B_n$ είναι συγκλίνουσα ως γινόμενο συγκλινουσών ακολουθιών. Όπως και στο κριτήριο Dirichlet παραπάνω, αποδεικνύεται ότι και η ακολουθία $\tau_n = \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$ είναι συγκλίνουσα και άρα η (s_n) είναι συγκλίνουσα. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.13. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει. Πράγματι, η ακολουθία $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και συγκλίνουσα στον e και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ συγκλίνει από το Οριακό κριτήριο Σύγκρισης με την συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (Παράδειγμα 1.6).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.9. Το κριτήριο Abel μπορεί ναδειχθεί και με χρήση του κριτηρίου Dirichlet (δείτε Άσκηση B.4)

ΠΟΡΙΣΜΑ 1.22. (**Κριτήριο Leibniz**) Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών όρων. Τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \dots$ συγκλίνει.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το κριτήριο προκύπτει άμεσα από το κριτήριο Dirichlet αφού η (a_n) είναι μονότονη και μηδενική και η (B_n) φραγμένη αφού είτε $B_n = 0$ ή $B_n = 1$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.14. Η εναλλασσόμενη αρμονική δηλαδή η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

συγκλίνει⁴ αφού η $(1/n)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.15. Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots$ συγκλίνει⁵ αφού η $(1/n!)$ είναι φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών.

8. Απόλυτη σύγκλιση σειρών

Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει γενικούς όρους και τα προηγούμενα κριτήρια δεν μπορούν να εφαρμοσθούν τότε για να εξετάσουμε την σύγκλιση της την μετατρέπουμε σε σειρά με μη αρνητικούς όρους αντικαθιστώντας τους όρους της a_n με τα απόλυτά τους $|a_n|$. Αν η προκύπτουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε θα λέμε ότι η σειρά

⁴Όπως έχουμε αναφέρει, με την θεωρία των δυναμοσειρών που θα αναπτύξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, το όριο της είναι ο $\ln 2$.

⁵Όπως θα δούμε πάλι στο επόμενο κεφάλαιο, το όριο της είναι ο $1/e$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **συγκλίνει απολύτως**. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Cauchy αποδεικνύεται η εξής πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.23. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Με άλλα λόγια αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε συγκλίνει και κανονικά.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\tau_n = |a_1| + \dots + |a_n|$ και $s_n = a_1 + \dots + a_n$ τα μερικά αθροίσματα της $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αντιστοίχως. Παρατηρούμε ότι για κάθε $n > m$ έχουμε

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \leq |a_{m+1}| + \dots + |a_n| = |\tau_n - \tau_m|$$

και άρα αν η (τ_n) είναι Cauchy τότε και η (s_n) είναι Cauchy. Άρα από το κριτήριο Cauchy αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1.10. Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πχ. η εναλλάσσουσα αρμονική $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απολύτως.

Με την χρήση της Πρότασης 1.23 το κριτήριο του Λόγου II (Πρόταση 1.16) και το κριτήριο Ρίζας II (Πρόταση 1.18) διατυπώνονται για σειρές με γενικούς όρους ως εξής.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.24. (Κριτήριο Λόγου III) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$$

- (1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).
- (2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΠΡΟΤΑΣΗ 1.25. (Κριτήριο Ρίζας του Cauchy III) Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και έστω ότι

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

- (1) Αν $\lambda < 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει (και μάλιστα απολύτως).
- (2) Αν $\lambda > 1$ τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.16. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ συγκλίνει. Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = 0$ τότε η σειρά είναι η $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$ και άρα συγκλίνει στο 1. Αν $x \neq 0$ τότε θέτοντας $a_n = \frac{x^n}{n!}$ έχουμε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1$$

και άρα από το κριτήριο λόγου η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ συγκλίνει.

9. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

A. Ερωτήσεις: Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

A1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

A2. Αν $a_n > 0$ και $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

A3. Αν $a_n > 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

A4. Αν $a_n > 0$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 a_n) = 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

A5. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολύτως τότε για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_n = \pm 1$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n a_n$ συγκλίνει.

A6. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ συγκλίνει.

A7. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει τότε οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ συγκλίνουν.

A8. Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ συγκλίνουν τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

B. Ασκήσεις :

B1. Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις επόμενες σειρές:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos(1/n))$ (Υπόδειξη: Σύγκριση με $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$).

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^n}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n^2}$ (Υπόδειξη: Κριτήριο Abel).

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right) \sin^3\left(\frac{1}{n}\right)$ (Υπόδειξη: Κριτήριο Abel).

(5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ (Υπόδειξη: Κριτήριο συμπίκνωσης Cauchy)

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ (Υπόδειξη: Κριτήριο Dirichlet)

B2. (α) Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει.

(β) Βρείτε ένα παράδειγμα όπου $a_n > 0$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

B3. Έστω η συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (α) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η σειρά $\sum_{k=n}^{\infty} a_k$ είναι συγκλίνουσα. (β) Αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θέσουμε $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ δείξτε ότι $\lim r_n = 0$.

B4. Αν $a_n > 0$ δείξτε ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ συγκλίνει.

B5. Δείξτε ότι το κριτήριο Dirichlet (Πρόταση 1.20) δίνει το κριτήριο Abel (Πρόταση 1.21) (Υπόδειξη: Θεωρείστε τις σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a)b_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} ab_n$, όπου $a = \lim a_n$).

B6. Έστω $a_n > 0$ και $\lim a_n = 0$. Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αποκλίνουσα δείξτε ότι για κάθε $x \geq 0$ (αντίστοιχα $x < 0$) υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $0 = m_0 < m_1 < \dots$ φυσικών αριθμών τέτοια ώστε αν θέσουμε $b_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k$ τότε $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$ (αντ. $x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$).

(Υπόδειξη: Έστω $x \geq 0$ (αν $x < 0$ θεωρούμε τον $-x$ αντί για τον x). Θα χρησιμοποιήσουμε ένα “μπρός-πίσω” επιχείρημα για να επιλέξουμε τα $m_1 < m_2 < \dots$: Έστω

$$M_1 = \{n \in \mathbb{N} : a_1 + \dots + a_n > x\}$$

Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, το M_1 δεν είναι κενό και άρα από την Αρχή Καλής Διάταξης του $\mathbb{N}$ υπάρχει το ελάχιστο του M_1 . Θέτουμε

$$m_1 = \min M_1 \quad \text{και} \quad b_0 = \sum_{k=1}^{m_1} a_k$$

Από τον ορισμό του m_1 έπεται ότι

$$b_0 - a_{m_1} \leq x < b_0$$

Προχωρούμε για να ορίσουμε τον m_2 . Θέτουμε

$$M_2 = \{n \geq m_1 + 1 : b_0 - (a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \dots + a_n) < x\}$$

Το M_2 δεν είναι κενό. Πράγματι, αφού $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ έπεται ότι $\sum_{n=m}^{\infty} a_n = +\infty$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα, $\sum_{n=m_1+1}^{\infty} a_n = +\infty$ και άρα υπάρχει $n \geq m_1 + 1$ με $a_{m_1+1} + a_{m_1+2} + \dots + a_n > b_0 - x$. Θέτουμε

$$m_2 = \min M_2 \quad \text{και} \quad b_1 = \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k$$

Από τον ορισμό του m_2 έπεται ότι

$$b_0 - b_1 < x \leq b_0 - b_1 + a_{m_2}$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά επιλέγουμε $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$ τέτοια ώστε αν $m_0 = 1$, $b_n = \sum_{m_n+1}^{m_{n+1}} a_k$ και $B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$, τότε

$$B_{2n} - a_{m_{2n+1}} \leq x < B_{2n} \quad \text{και} \quad B_{2n+1} < x \leq B_{2n+1} + a_{m_{2n+2}} \quad (1.7)$$

για κάθε $n \geq 0$. Ειδικότερα,

$$|B_n - x| \leq a_{m_{n+1}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επειδή τώρα $a_n \rightarrow 0$ έχουμε $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n = \lim B_n = x$.)

Δυναμοσειρές

Οι απλούστερες συναρτήσεις στα μαθηματικά είναι οι πολυωνυμικές δηλαδή οι συναρτήσεις της μορφής

$$\sum_{n=0}^k a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

ή γενικότερα της μορφής

$$\sum_{n=0}^k a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n$$

όπου n μη αρνητικός ακέραιος, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις παραγωγίζονται όρο προς όρο και η παράγωγός του είναι πάλι πολυωνυμική συνάρτηση:

$$\left(\sum_{n=0}^k a_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^k (a_n (x - x_0)^n)' = \sum_{n=1}^k n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

Ομοίως και με την ολοκλήρωση:

$$\int_{x_0}^x \left(\sum_{n=0}^k a_n (x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^k \int_{x_0}^x a_n (x - x_0)^n dx = \sum_{n=0}^k \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}$$

Όμως πολύ σημαντικές συναρτήσεις όπως οι εκθετικές και οι τριγωνομετρικές δεν είναι πολυωνυμικές. Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε την έννοια της *δυναμοσειράς* και θα δείξουμε ότι οι συναρτήσεις αυτές είναι στην ουσία δυναμοσειρές. Οι δυναμοσειρές είναι μια γενίκευση των πολυωνυμικών συναρτήσεων (θα λέγαμε ότι είναι πολυώνυμα “απείρου βαθμού”) και όπως θα δούμε διατηρούν τις παραπάνω απλές ιδιότητες της παραγωγίσιμης και ολοκλήρωσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.1. Η μελέτη των δυναμοσειρών γίνεται μέσω της έννοιας της λεγόμενης *ομοιόμορφης σύγκλισης* ακολουθιών και σειρών συναρτήσεων. Οι έννοιες αυτές εκφεύγουν του σκοπού του παρόντος μαθήματος και θα μελετηθούν αργότερα στο μάθημα της Πραγματικής Ανάλυσης. Για τον λόγο αυτόν τα περισσότερα θεωρήματα που θα διατυπώσουμε θα είναι (δυστυχώς) χωρίς απόδειξη.

1. Βασικοί ορισμοί, ακτίνα και διάστημα σύγκλισης δυναμοσειράς

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x_0 \in \mathbb{R}$. Η παράσταση

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ καλείται *δυναμοσειρά*. Το σημείο x_0 καλείται *κέντρο* της δυναμοσειράς και οι αριθμοί $a_0, a_1, \dots$ καλούνται *συντελεστές* της δυναμοσειράς. Αν το κέντρο είναι το $x_0 = 0$ η δυναμοσειρά παίρνει την πιο απλή μορφή

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Ένα από τα πρώτα ερωτήματα που εμφανίζονται με τις δυναμοσειρές είναι για ποιά $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά έχει νόημα δηλαδή η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει. Παρατηρούμε εύκολα ότι κάθε δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ συγκλίνει για $x = x_0$ (στο a_0). Το θέμα είναι αν συγκλίνει και για άλλα $x \in \mathbb{R}$. Το επόμενο θεώρημα λέει ότι γενικά μια δυναμοσειρά συγκλίνει σε ένα ανοικτό διάστημα I συμμετρικό ως προς το κέντρο της.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Τότε υπάρχει μοναδικός $R \geq 0$ τέτοιος ώστε:

- (1) Αν $R = 0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x = x_0$.
- (2) Αν $R = +\infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.
- (3) Αν $0 < R < +\infty$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < R$ και η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| > R$.

Ο R καλείται **ακτίνα σύγκλισης** και το διάστημα $(x_0 - R, x_0 + R)$ **διάστημα σύγκλισης** της δυναμοσειράς (Αν $R = +\infty$ τότε γράφοντας $(x_0 - R, x_0 + R)$ εννοούμε το $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.2. (1) Παρατηρείστε ότι στην περίπτωση (3) όπου η ακτίνα σύγκλισης είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός το θεώρημα δεν αποφαινεται αν η δυναμοσειρά συγκλίνει ή όχι στα σημεία $x = x_0 - R$ και $x = x_0 + R$. Οι περιπτώσεις αυτές εξετάζονται για κάθε δυναμοσειρά ξεχωριστά. Άρα στην περίπτωση αυτή το σύνολο όλων των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία συγκλίνει η δυναμοσειρά είναι το διάστημα σύγκλισης και ίσως ένα ή και τα δύο άκρα του.

(2) Αποδεικνύεται ότι ο R εξαρτάται μόνο από την ακολουθία (a_n) των συντελεστών της δυναμοσειράς δηλαδή για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

Η επόμενη πρόταση μας λέει πως μπορούμε να υπολογίσουμε την ακτίνα σύγκλισης μιας δυναμοσειράς σε κάποιες περιπτώσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.2. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Αν το όριο

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \varrho$$

υπάρχει (πεπερασμένο ή άπειρο) τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R = \frac{1}{\varrho}$$

(με τις συμβάσεις $\frac{1}{+\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = +\infty$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Σταθεροποιούμε ένα $x \in \mathbb{R}$. Αν $x = x_0$ τότε η δυναμοσειρά συγκλίνει αφού $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + 0 + 0 + \dots$. Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $x \neq x_0$. Εξετάζουμε την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με το κριτήριο ρίζας. Έχουμε,

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| \right) \\ &= |x-x_0| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|} \right) = |x-x_0| \cdot \varrho\end{aligned}$$

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

1) $\varrho = +\infty$: Τότε $\lambda = +\infty > 1$ (αφού $x \neq x_0$) και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αποκλίνει. Επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά αποκλίνει για κάθε $x \neq x_0$.

2) $\varrho = 0$: Τότε $\lambda = 0 < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει. Επειδή το x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός εκτός του x_0 έχουμε ότι η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \neq x_0$. Επειδή συγκλίνει και για $x = x_0$ έπεται ότι στην περίπτωση αυτή συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

(3) $0 < \varrho < +\infty$: Τότε

(α) Αν $|x-x_0| < 1/\varrho$ έχουμε ότι $\lambda < 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ συγκλίνει.

(β) Αν $|x-x_0| > 1/\varrho$ έχουμε ότι $\lambda > 1$ και άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ αποκλίνει.

Συνεπώς, το Θεώρημα 2.1 ισχύει για $R = 1/\varrho$. $\square$

Είναι γνωστή πρόταση στην θεωρία ακολουθιών ότι αν το όριο $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ υπάρχει τότε υπάρχει και το $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ και είναι ίσα μεταξύ τους. Χρησιμοποιώντας την πρόταση αυτή έχουμε το επόμενο πόρισμα που πολλές φορές διευκολύνει τον υπολογισμό του R .

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.3. Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ μια δυναμοσειρά με $a_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (ή τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$). Αν το όριο

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \varrho \quad (2.1)$$

υπάρχει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι $R = 1/\varrho$ (με τις συμβάσεις $R = +\infty$ αν $\varrho = 0$ και $R = 0$ αν $\varrho = +\infty$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά αυτή είναι η γεωμετρική σειρά με λόγο x και άρα (όπως είδαμε στο κεφάλαιο των σειρών) συγκλίνει μόνο για $x \in (-1, 1)$. Αυτό μπορούμε τώρα να

το δούμε και με εφαρμογή της Πρότασης 2.2 ή του Πορίσματος 2.3 αφού $a_n = 1$ και άρα

$$\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

Παρατηρείστε ότι στα σημεία $x = \pm 1$ η δυναμοσειρά δεν συγκλίνει (για $x = 1$ παίρνει γίνεται η σειρά $1 + 1 + \dots = +\infty$ ενώ για $x = -1$ γίνεται η σειρά $1 - 1 + 1 - \dots$ που ταλαντώνεται).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_n = 1/n!$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$. Όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε άμεσα $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$ και άρα η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.3. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και συντελεστές $a_0 = 0$ και $a_n = (-1)^n/n$ για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Εύκολα βλέπουμε ότι $\lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$ και άρα $R = 1$. Επίσης για $x = 1$ η δυναμοσειρά γίνεται η εναλλάσσουσα αρμονική και άρα συγκλίνει ενώ για $x = -1$ είναι η σειρά $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = -\infty$. Συνεπώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1]$ και αποκλίνει παντού αλλού.

Μερικές φορές η Πρόταση 2.2 ή το Πόρισμα 2.3 δεν μπορούν να εφαρμοσθούν διότι δεν υπάρχει το όριο $\left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.4. Έστω η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = 1 + x^2 + x^4 + \dots$$

Για τους συντελεστές της παρατηρούμε ότι $a_{2n-1} = 0$ και $a_{2n} = 1$ και εύκολα βλέπουμε ότι η ακολουθία $\left(\sqrt[n]{|a_n|} \right)$ είναι η ίδια ακολουθία με την (a_n) η οποία δεν συγκλίνει. Την περίπτωση αυτή μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε ως εξής: Θέτουμε $t = x^2$ και έχουμε

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = 1 + t + t^2 + \dots$$

Εδώ οι συντελεστές είναι η σταθερή ακολουθία (a_n) όπου όλοι οι όροι είναι ίσοι με την μονάδα. Άρα $\varrho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ οπότε και η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ είναι $R = 1$. Μπορούμε να δούμε ότι και η αρχική μας δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $\sqrt{1} = 1$. Πράγματι, έστω $|x| < 1$. Τότε $|t| = |x^2| < 1$ οπότε η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ συγκλίνει. Ομοίως αν $|x| \geq 1$ τότε $|t| \geq 1$ και άρα η $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ δεν συγκλίνει.

Γενικά έχουμε την εξής πρόταση για δυναμοσειρές όπως του παραπάνω παραδείγματος.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.4. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn+m}$ όπου $k > 0$, $m \geq 0$ ακέραιοι. Αν το $\varrho = \lim \sqrt[k]{|b_n|}$ (ή το $\varrho = \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$) υπάρχει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι

$$R = \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}$$

(με τις συμβάσεις $\sqrt[k]{+\infty} = +\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0$ και $\frac{1}{0} = +\infty$).

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn+m} = (x-x_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn}$, η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn+m}$ είναι η ίδια με της $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn}$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m = 0$. Θέτοντας τώρα $t = (x-x_0)^k$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$, που από την Πρόταση 2.2 συγκλίνει για $|t| < 1/\varrho$ και αποκλίνει για $|t| > 1/\varrho$. Άρα η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn}$ συγκλίνει για $|x-x_0|^k < 1/\varrho \Leftrightarrow |x-x_0| < \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}$ και αποκλίνει για $|x-x_0|^k > 1/\varrho \Leftrightarrow |x-x_0| > \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}$. Συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{kn}$ είναι $R = \frac{1}{\sqrt[k]{\varrho}}$. $\square$

Άρα αν μια δυναμοσειρά είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{2n}$ και το $\varrho = \lim \sqrt[n]{|b_n|}$ (ή το $\varrho = \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right|$) υπάρχει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το $R = 1/\sqrt{\varrho}$ και όχι το $1/\varrho$ (ομοίως για δυναμοσειρές της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^{2n+1}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.5. Η ακτίνα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{2n}$ είναι $R = 1/\sqrt{2}$ αφού

$$\varrho = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = \lim \frac{2n}{n+1} = 2.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.6. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}$, με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}$. Άρα, $\varrho = \lim \left| \frac{b_{n+1}}{b_n} \right| = 0 \Rightarrow \sqrt{\varrho} = 0 \Rightarrow R = +\infty$. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.7. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

έχει κέντρο το $x_0 = 0$ και είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n+1}$ με $b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}$. Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα καταλήγουμε ότι $R = +\infty$, δηλαδή η δυναμοσειρά συγκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$.

2. Συνέχεια, ολοκλήρωση και παραγωγήιση δυναμοσειράς

Αποδεικνύεται ότι κάθε δυναμοσειρά ορίζει μια συνεχή και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο διάστημα σύγκλισής της που η ολοκλήρωση και η παραγωγήιση της γίνεται όρο προς όρο. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το εξής¹:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.5. Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$.

(1) Η f είναι συνεχής στο $(x_0 - R, x_0 + R)$.

(2) Για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ ισχύει ότι

$$\int_{x_0}^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

(3) Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ και ισχύει ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Επιπλέον η ακτίνα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} \quad \text{και} \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

είναι η ίδια με την ακτίνα σύγκλισης της $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.3. Στο (2) το x είναι οποιοδήποτε σημείο του διαστήματος σύγκλισης (θυμηθείτε ότι στην περίπτωση όπου $x < x_0$ με το σύμβολο $\int_{x_0}^x f(t) dt$ εννοούμε το $-\int_x^{x_0} f(t) dt$). Επίσης το (2) είναι ισοδύναμο με το ότι για κάθε $a < b$ στο $(x_0 - R, x_0 + R)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n (x - x_0)^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} ((b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}). \end{aligned}$$

¹Στα επόμενα στην περίπτωση όπου $R = +\infty$, όταν γράφουμε $(x_0 - R, x_0 + R)$ θα εννοούμε το $(-\infty, +\infty)$ δηλαδή όλο το $\mathbb{R}$.

Το (3) του παραπάνω θεωρήματος έχει και τις επόμενες σημαντικές συνέπειες.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.6. Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε η f είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη στο $(x_0 - R, x_0 + R)$. Ειδικότερα, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η $f^{(k)}$ είναι η δυναμοσειρά

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k} \quad (2.2)$$

και έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης $R > 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το (3) του Θεωρήματος 2.5 βλέπουμε ότι η παράγωγος μιας δυναμοσειράς είναι πάλι δυναμοσειρά με την ίδια ακτίνα σύγκλισης. Άρα για την $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ θα έχουμε ότι $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Ομοίως, $f^{(3)}(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$ κ.ο.κ. $\square$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.7. Έστω η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \quad (2.3)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Επειδή $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + \dots$ έχουμε ότι $f'(x_0) = a_1$. Ομοίως $f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + \dots$ και άρα $f''(x_0) = 2a_2$ απ' όπου παίρνουμε ότι $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$. Γενικά, έστω $k \in \mathbb{N}$. Από την (2.2) έχουμε ότι $f^{(k)}(x_0) = k!a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$. $\square$

3. Σειρές Taylor

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, $R > 0$ και $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 αν γράφεται υπό την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το x_0 , δηλαδή αν υπάρχουν $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Από το Πόρισμα 2.6 έχουμε αν η συνάρτηση f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο κάποιο σημείο $x_0 \in (x_0 - R, x_0 + R)$ τότε η f θα πρέπει να είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη. Επίσης, από το Πόρισμα 2.7, το ανάπτυγμά της f με κέντρο το x_0 είναι μοναδικό αφού θα πρέπει $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Άρα αν η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 τότε η f γράφεται μοναδικά ως εξής:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots \quad (2.4)$$

Παρατηρείστε ότι για κάθε $n = 0, 1, \dots$ το άθροισμα των $(n+1)$ -πρώτων όρων της σειράς (2.4) είναι το πολυώνυμο

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

που ως γνωστόν είναι το πολυώνυμο Taylor της f τάξης n με κέντρο το x_0 .

Με βάση τα παραπάνω δίνουμε τον εξής ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.8. Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου I διάστημα του $\mathbb{R}$, απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση και $x_0 \in I$. Η δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \quad (2.5)$$

καλείται **σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0** .

Αν το $x_0 = 0$ τότε η σειρά Taylor της f γράφεται

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots \quad (2.6)$$

που συνήθως καλείται **σειρά Maclaurin της f** .

Από τα παραπάνω έχουμε ότι αν μια συνάρτηση αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το x_0 τότε αυτή η δυναμοσειρά είναι η σειρά Taylor της f με κέντρο το x_0 . Γενικά μια συνάρτηση δεν αναπτύσσεται πάντα σε δυναμοσειρά ακόμη και αν είναι απεριόριστα παραγωγίσιμη. Μάλιστα όπως αποδεικνύεται, οι συναρτήσεις που αναπτύσσονται σε δυναμοσειρά αποτελούν ένα πολύ μικρό μέρος των απεριόριστα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η επόμενη πρόταση δίνει μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για να αναπτύσσεται μια απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση ως δυναμοσειρά.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.9. Έστω $R > 0$ και $f : (x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow \mathbb{R}$ (όπου $R > 0$) απεριόριστα παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έστω $T_n(x)$ το πολυώνυμο Taylor και $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ το υπόλοιπο Taylor της f τάξης n με κέντρο το x_0 . Τότε η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά αν και μόνο αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$ για κάθε $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Τότε

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n &\Leftrightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &\Leftrightarrow f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x) - T_n(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0. \end{aligned}$$

□

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Taylor² και την Πρόταση 2.9 προκύπτουν τα εξής αναπτύγματα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.10. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.7)$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad (2.8)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (2.9)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.4. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5 μπορούμε να δώσουμε μια απλή απόδειξη της (2.7) αποφεύγοντας τον τύπο Taylor. Πράγματι, η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$ (Παράδειγμα 2.2). Θέτοντας $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, από το Θεώρημα 2.5 έχουμε ότι

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$$

Επειδή $f'(x) = f(x)$ έχουμε ότι $f(x) = ce^x$ για κάποια σταθερά $c \in \mathbb{R}$. Αφού $f(0) = 1$ έπεται ότι $c = 1$ δηλαδή $f(x) = e^x$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.5. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η (2.8) συνεπάγεται την (2.9) και αντιστρόφως.

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ για κάθε $x \in (-1, 1)$, μπορεί να δειχθεί το εξής (δείτε τις Λυμένες Ασκήσεις παρακάτω).

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.11. Για κάθε $x \in (-1, 1)$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2.10)$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad (2.11)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 2.6. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο Leibniz (Πρόταση 1.22), βλέπουμε εύκολα ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ και $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ του Θεωρήματος 2.11 συγκλίνουν και για $x = 1$.

²Θυμηθείτε ότι αν $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ απειρίορστα παραγωγίσιμη τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ με $x \neq x_0$ υπάρχει ξ_n στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα x, x_0 τέτοιο ώστε

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(\xi_n)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Από το κριτήριο Abel (Πρόταση 1.21) μπορεί ναδειχθεί ότι αν μια δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $0 < R < +\infty$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ συγκλίνει τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

(και ομοίως αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$ συγκλίνει τότε $\lim_{x \rightarrow x_0 - R} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-R)^n$).

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (2.12)$$

και συνεπώς επειδή οι συναρτήσεις $\ln(1+x)$ και $\arctan x$ είναι συνεχείς, έχουμε

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots \quad (2.13)$$

και

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots \quad (2.14)$$

4. Λυμένες ασκήσεις

Παραθέτουμε στην συνέχεια κάποιες λυμένες ασκήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 1. Δίνεται η δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

- (1) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης.
- (2) Βρείτε όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά συγκλίνει.
- (3) Δείξτε ότι $f'(x) = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.
- (4) Δείξτε ότι $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = -\ln(1-x)$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.
- (5) Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln 2$.

Λύση: (1) Έχουμε $\rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Άρα $R = 1/\rho = 1$.

(2) Επειδή $R = 1$ και $x_0 = 0$, η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in (-1, 1)$ και αποκλίνει για $x < -1$ ή $x > 1$. Μένει να εξετάσουμε τα σημεία $x = -1$ και $x = 1$.

Στο $x = -1$ η δυναμοσειρά παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα

αρμονική η οποία συγκλίνει ενώ για $x = 1$ παίρνει την μορφή $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η

αρμονική η οποία αποκλίνει. Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in [-1, 1)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

(3) Είναι $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(4) Επειδή

$$\left(\ln \left(\frac{1}{1-x} \right) \right)' = (-\ln(1-x))' = \frac{1}{1-x}$$

οι συναρτήσεις $f(x)$ και $\ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$ έχουν την ίδια παράγωγο για κάθε $x \in (-1, 1)$.

Άρα

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right) + c$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Επειδή $f(0) = 0 = \ln \left(\frac{1}{1-0} \right)$ έχουμε $c = 0$, δηλαδή

$$f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Εναλλακτικά,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \\ &= - \int_1^{1-x} \frac{1}{u} du \\ &= -[\ln u]_1^{1-x} = -\ln(1-x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$.

(5) Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1/2)^n}{n} = f(1/2)$. Επειδή $f(x) = \ln \left(\frac{1}{1-x} \right)$

για κάθε $x \in (-1, 1)$, έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \ln \left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}} \right) = \ln 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2. Με βάση το ανάπτυγμα $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x \in (-1, 1)$ αναπτύξτε σε δυναμοσειρά την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x \in (-1, 1)$. Στην συνέχεια βρείτε το άθροισμα $1 + 2 \left(\frac{3}{4} \right) + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^2 + 4 \left(\frac{3}{4} \right)^3 + \dots$ και την $g^{(2021)}(0)$.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, \end{aligned}$$

για κάθε $x \in (-1, 1)$. Ειδικότερα για $x = 3/4$,

$$1 + 2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots = \frac{1}{(1 - \frac{3}{4})^2} = 16.$$

Επίσης από την (2.3) για την $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$, $x \in (-1, 1)$ έχουμε

$$a_n = n+1 = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow g^{(n)}(0) = (n+1) \cdot n! = (n+1)!$$

Οπότε

$$g^{(2021)}(0) = 2022!$$

ΑΣΚΗΣΗ 3. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις $\frac{1}{1+t}$, $t \in (-1, 1)$ και $\ln(1+x)$, $x \in (-1, 1)$.

Λύση. Έστω $t \in (-1, 1)$. Τότε $-t \in (-1, 1)$ και άρα

$$f(t) = \frac{1}{1+t} = \frac{1}{1-(-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

Οπότε, για $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις $\frac{1}{1+t^2}$, $t \in (-1, 1)$ και $\arctan x$, $x \in (-1, 1)$.

Λύση. Έστω $t \in (-1, 1)$. Τότε $t^2 \in (-1, 1)$ και άρα

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{1-(-t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$$

Οπότε, για $x \in (-1, 1)$,

$$\begin{aligned} \arctan x &= \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΗ 5. Αναπτύξτε σε δυναμοσειρά τις συναρτήσεις $\cosh x$ και $\sinh x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση. Έχουμε

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Από το Θεώρημα 2.10 έχουμε

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (2.15)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ και άρα

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n \quad (2.16)$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right) x^n = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι

$$\sinh x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ΑΣΚΗΣΗ 6. Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n}$. Για ποια $x \in \mathbb{R}$ η δυναμοσειρά συγκλίνει και για ποιά αποκλίνει;

Λύση: Έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ με $a_n = \frac{2^n}{n}$. Η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς δίνεται από τον τύπο $R = 1/\rho$, όπου

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{n+1}}{\frac{2^n}{n}} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 2$$

και άρα $R = 1/2$.

Συνεπώς η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} \cdot x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει για $x < -\frac{1}{2}$ και $x > \frac{1}{2}$. Μένει να εξετάσουμε τη σύγκλιση στα σημεία $x = -\frac{1}{2}$ και $x = \frac{1}{2}$.

Για $x = -\frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ που είναι η εναλλάσσουσα αρμονική που ως γνωστόν (Κριτήριο Leibnitz) συγκλίνει.

Για $x = \frac{1}{2}$ παίρνουμε την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ που είναι η αρμονική που ως γνωστόν αποκλίνει.

Άρα η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ και αποκλίνει παντού αλλού.

ΑΣΚΗΣΗ 7. Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ και έστω $0 < x_1 < x_2$. Είναι δυνατόν η δυναμοσειρά να αποκλίνει στο x_1 και να συγκλίνει στο x_2 ?

Απάντηση: Όχι, αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1 > 0$ τότε αποκλίνει για όλα τα $x > x_1$. Πράγματι, έστω R η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς. Γνωρίζουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για όλα τα $x \in (-R, R)$ και αποκλίνει για όλα τα $x \in \mathbb{R}$ με $x < -R$ ή $x > R$ (στα άκρα $-R$ και $+R$ μπορεί να συγκλίνει ή όχι). Αφού λοιπόν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = x_1 > 0$ αναγκαστικά $x_1 \geq R$. Άρα αν $x_2 > x_1$ θα ισχύει ότι $x_2 > R$ και συνεπώς η δυναμοσειρά αποκλίνει και στο x_2 .

5. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

A. Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

A1. Αν $\lim a_n = 0$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = +\infty$.

A2. Αν $1 \leq |a_n| \leq n$ τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1$.

A3. Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{2n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R = 1/\sqrt{2}$.

A4. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για $x = 1$ τότε $R \geq 1$.

A5. Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ αποκλίνει για $x = 1$ τότε $R \leq 1$.

A6. Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R \leq 1$.

A7. Αν $a_n > 0$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ συγκλίνει αλλά η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

A8. Έστω (a_n) φθίνουσα και μηδενική ακολουθία θετικών αριθμών. Αν $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι $R = 1$.

B. Ασκήσεις :

B1. Βρείτε την ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n} (x-1)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} (x-2)^{2n}$$

B2. Αν $0 < \lim \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$ δείξτε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$ είναι $R = 1$. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο ρίζας για την σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n^2}$ διακρίνοντας τις περιπτώσεις $|x| < 1$ και $|x| > 1$).

B3. (α) Βρείτε την συνάρτηση $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$, (β) υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ και (γ) υπολογίστε την $f^{(2021)}(0)$. (Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$).

B4. (α) Βρείτε την συνάρτηση $g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n$, (β) υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2^n}$ και (γ) υπολογίστε την $g^{(2021)}(0)$.

B5. (α) Βρείτε την συνάρτηση $h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, (β) υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ και (γ) υπολογίστε την $h^{(2021)}(0)$. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιείτε τις Ασκήσεις B3 και B4).

B6. Θεωρώντας γνωστό ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης δείξτε ότι τα (1) και (2) του Θεωρήματος 2.5 συνεπάγονται το (3).

(Υπόδειξη: Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Από το (1) του Θεωρήματος 2.5 έχουμε ότι η $g(x)$ είναι συνεχής άρα ολοκληρώσιμη. Εφαρμόζοντας το (2) για την δυναμοσειρά $g(x)$ παίρνουμε $\int_{x_0}^x g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = f(x) - a_0$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού έχουμε ότι $(f(x) - a_0)' = g(x)$ δηλαδή $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$).

B7. Θεωρώντας γνωστό ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης δείξτε ότι τα (1) και (3) του Θεωρήματος 2.5 συνεπάγονται το (2).

(Υπόδειξη: Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ και $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$, $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. Εφαρμόζοντας το (3) για την δυναμοσειρά $F(x)$ παίρνουμε $F'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(n+1)(x-x_0)^n = f(x)$. Άρα, $\int_{x_0}^x f(t) dt = \int_{x_0}^x F'(t) dt = F(x) - F(x_0) = F(x)$, όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.)

B8. Δείξτε ότι $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ θεωρώντας γνωστό ότι η διαφορική εξίσωση $f''(x) = -f(x)$ με αρχικές συνθήκες $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ έχει μοναδική λύση την $f(x) = \cos x$.

Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$

1. Βασικές έννοιες.

1.1. Ο Ευκλείδειος χώρος $\mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο όλων των σημείων (ή διανυσμάτων)

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

(όπου $x_i \in \mathbb{R}$ για κάθε $1 \leq i \leq n$), εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

για κάθε $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Τα διανύσματα $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ αποτελούν την λεγόμενη *συνήθη βάση* του $\mathbb{R}^n$. Παρατηρείστε ότι τα διανύσματα ότι τα $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ είναι όντως μία βάση του $\mathbb{R}^n$ αφού είναι γραμμικά ανεξάρτητα και επίσης αν $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ είναι ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i.$$

1.2. Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, και $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Το $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ καλείται (το συνήθες) *εσωτερικό γινόμενο των $\mathbf{x}$ και $\mathbf{y}$* . Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις εξής ιδιότητες:

$$(1) \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0 \text{ και άρα } \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \text{ αν και μόνο αν } \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

$$(2) \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}.$$

$$(3) \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}.$$

$$(4) (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

Αν $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$ τότε τα $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ καλούνται *ορθογώνια*. Παρατηρείστε ότι $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$ για κάθε $i \neq j$ δηλαδή οποιαδήποτε δύο διαφορετικά διανύσματα της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια.

1.3. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε το μέτρο (ή την νόρμα) του $\mathbf{x}$ να είναι η ποσότητα

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Κατά αναλογία της ιδιότητας $|x| = \sqrt{x^2}$ για $x \in \mathbb{R}$, παρατηρούμε ότι

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}.$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.1. (Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Αν $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|.$$

ή ισοδύναμα

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

αν $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Επίσης είναι εύκολο να διαπιστώσουμε τις παρακάτω ιδιότητες (ανάλογες της απώλυτου τιμής του $\mathbb{R}$):

1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ και $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. $\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|$.
3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Τέλος, όπως και στον $\mathbb{R}$ η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών είναι η απόλυτη τιμή της διαφοράς τους, η ποσότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

ορίζεται να είναι η απόσταση των $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$. Παρατηρείστε ότι

1. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$.
2. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ και
3. $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$.

2. Ανοικτές και κλειστές μπάλες

2.1. Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Το σύνολο

$$B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$$

καλείται ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε . Με άλλα λόγια το $B_r(\mathbf{x}_0)$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία του $\mathbb{R}^n$ που απέχουν από το $\mathbf{x}_0$ απόσταση γνήσια μικρότερη του ε . Οι ανοικτές μπάλες $B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ καλούνται και (βασικές ανοικτές) περιοχές του $\mathbf{x}_0$. Το σύνολο

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon\}$$

καλείται **κλειστή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε και τέλος το σύνολο

$$S_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$$

καλείται **κλειστή σφαίρα** του $\mathbb{R}^n$ κέντρου $\mathbf{x}_0$ και ακτίνας ε . Προφανώς

$$\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0) = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \cup S_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$$

2.2. Δίνουμε παρακάτω κάποιους χαρακτηρισμούς σημείων και υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.2. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **απομονωμένο σημείο** του X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $X \cap B_\delta(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}\}$. Ισοδύναμα, η απόσταση κάθε άλλου σημείου του X από το $\mathbf{x}$ είναι τουλάχιστον δ .

(2) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ καλείται **σημείο συσσώρευσης** του X αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{y} \in X$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$. Ισοδύναμα, οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{x}$ υπάρχει σημείο του X διαφορετικό από το $\mathbf{x}$.

(3) Ένα σημείο $\mathbf{x} \in X$ καλείται **εσωτερικό σημείο** του X αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.3. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Το X καλείται **ανοικτό** αν για κάθε σημείο $\mathbf{x}$ του X υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X$ ισοδύναμα κάθε σημείο του X είναι και εσωτερικό του σημείου.

(2) Το X καλείται **κλειστό** αν το $X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ (δηλαδή το συμπλήρωμά του) είναι ανοικτό.

(3) Το X καλείται **φραγμένο** αν υπάρχει $M > 0$ με $\|\mathbf{x}\| \leq M$ (ισοδύναμα το X είναι υποσύνολο της κλειστής μπάλας $\overline{B}_M(\mathbf{0})$ κέντρου $\mathbf{0}$ και ακτίνας M).

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.4. Κάθε μονοσύνολο του $\mathbb{R}^n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Για να δείξουμε ότι το $\{\mathbf{x}\}$ είναι κλειστό πρέπει να δείξουμε ότι το συμπλήρωμά του, δηλαδή το σύνολο $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. Έστω $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Τότε $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$ και άρα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| > 0$. Θέτοντας $\delta = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ έχουμε $\mathbf{x} \notin B_\delta(\mathbf{y})$ και άρα $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$. Άρα για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{y}) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$, δηλαδή το $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}\}$ είναι ανοικτό. $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.5. (α) Κάθε ανοικτή μπάλα είναι ανοικτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. (β) Αντίστοιχα κάθε κλειστή μπάλα του είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $B = B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ μία ανοικτή μπάλα του $\mathbb{R}^n$. (α) Έστω $\mathbf{x} \in B_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$. Θέτουμε

$$\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \quad (3.1)$$

Αφού $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon$ έχουμε ότι $\delta = \varepsilon - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > 0$. Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Πράγματι, έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ και από τριγωνική ανισότητα,

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \stackrel{(3.1)}{=} \varepsilon$$

Συνεπώς $\mathbf{y} \in B$. Επειδή το $\mathbf{y}$ είναι τυχόν σημείο της $B_\delta(\mathbf{x})$, έπεται ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq B$. Επίσης το B είναι φραγμένο αφού για κάθε $\mathbf{x} \in B$ έχουμε

$$\|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| + \|\mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon + \|\mathbf{x}_0\| = M.$$

(β) Έστω $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ και $\mathbf{x} \in C$. Τότε $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ και άρα

$$\delta = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \varepsilon > 0 \quad (3.2)$$

Θα δείξουμε ότι $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq C$ ισοδύναμα $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \varepsilon$ για κάθε $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Πράγματι έστω $\mathbf{y} \in B_\delta(\mathbf{x})$. Τότε απο τριγωνική ανισότητα

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| < \delta + \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\|$$

και συνεπώς

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0\| > \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| - \delta \stackrel{(3.2)}{=} \varepsilon.$$

Επίσης όπως στο (α) δείχνουμε ότι η $\overline{B}_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη. $\square$

Η επόμενη πρόταση δίνει έναν χρήσιμο χαρακτηρισμό των κλειστών συνόλων.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.6. Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το X είναι κλειστό.
- (2) Το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2): Έστω ότι το X είναι κλειστό και έστω $\mathbf{x}$ σημείο συσσώρευσης του X . Υποθέτουμε προς απαγωγή σε άτοπο ότι $\mathbf{x} \notin X$. Τότε $\mathbf{x} \in X^c = \mathbb{R}^n \setminus X$ και επειδή το X^c είναι ανοικτό θα υπάρχει $\delta > 0$ με $B_\delta(\mathbf{x}) \subseteq X^c$. Αλλά τότε $B_\delta(\mathbf{x}) \cap X = \emptyset$, άτοπο απο τον ορισμό του σημείου συσσώρευσης.

(2) $\Rightarrow$ (1): Έστω ότι το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του. Θα δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, ισοδύναμα ότι το X^c είναι ανοικτό, ισοδύναμα κάθε σημείο του X^c είναι εσωτερικό σημείο του X^c . Πράγματι έστω $\mathbf{x} \in X^c$. Επειδή το X περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσής του το $\mathbf{x}$ δεν είναι σημείο συσσώρευσης του X . Άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε οποιοδήποτε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ με $0 < \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < \delta$ δεν ανήκει στο X . Επειδή από υπόθεση και το $\mathbf{x}$ δεν ανήκει στο X έχουμε ότι όλη η ανοικτή μπάλα $B_\delta(\mathbf{x})$ περιέχεται στο X^c , δηλαδή το $\mathbf{x}$ είναι όντως εσωτερικό σημείο του X^c . $\square$

3. Ακολουθίες στον χώρο $\mathbb{R}^n$

3.1. Όπως και στον $\mathbb{R}$ **ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$** είναι κάθε απεικόνιση απο το $\mathbb{N}$ στον $\mathbb{R}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.7. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το **όριο** της $(\mathbf{x}_k)$ είναι το $\mathbf{x}$ (ή ότι η $(\mathbf{x}_k)$ **συγκλίνει** στο $\mathbf{x}$) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$.

Συμβολικά θα γράφουμε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ (ή πιο απλά $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$) ή $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.1. Παρατηρείστε ότι $\lim \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν κάθε ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}$ περιέχει τελικά όλη την $(\mathbf{x}_k)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.8. (Πρώτος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x} &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad d_k < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq k_0 \quad |d_k - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0 \end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.9. (Δεύτερος χαρακτηρισμός σύγκλισης στον $\mathbb{R}^n$) Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία του $\mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Έστω

$$\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k}) \text{ και } \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

Τότε $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$ αν και μόνο αν $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{i,k} = x_i$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $d_k = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\|$ και $d_{i,k} = |x_{i,k} - x_i|$, $k \in \mathbb{N}$. Απο τον ορισμό της απόστασης στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$d_k = \sqrt{d_{1,k}^2 + \dots + d_{n,k}^2}. \quad (3.3)$$

Έστω ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$. Τότε απο την Πρόταση 3.8 έχουμε ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = 0$. Έστω $1 \leq i \leq n$. Απο την (3.3) έπεται ότι

$$0 \leq d_{i,k} \leq d_k$$

οπότε απο το θεώρημα των ισοσυγκλινουσών ακολουθιών στον $\mathbb{R}$ έπεται ότι και $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{i,k} = 0$.

Αντίστροφα τώρα, έστω ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} d_{i,k} = 0$ για όλα τα $1 \leq i \leq n$. Τότε απο την (3.3) και τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων ακολουθιών στον $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_k = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} d_{1,k}^2 + \dots + \lim_{k \rightarrow \infty} d_{n,k}^2} = 0.$$

Άρα πάλι απο την Πρόταση 3.8 έπεται ότι $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}$.

□

3.2. Ένα βασικό θεώρημα στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών είναι το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass που λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.9 το θεώρημα αυτό επεκτείνεται εύκολα στον $\mathbb{R}^n$. Πριν το διατυπώσουμε θυμίζουμε τους σχετικούς ορισμούς.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.10. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρώντας την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ ως συνάρτηση απο το $\mathbb{N}$ στο $\mathbb{R}^n$, κάθε περιορισμός της σε ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ καλείται υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$.

Κάθε υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι και αυτή ακολουθία του $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, αν

$$M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$$

είναι το άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ όπου περιορίζεται η $(\mathbf{x}_k)$, τότε η αντίστοιχη υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ είναι η ακολουθία $(\mathbf{y}_k)$ με

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$$

για όλα τα $k \in \mathbb{N}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 3.11. *Αν μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει τότε κάθε υπακολουθία της συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτήν.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ συγκλίνουσα ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}$ το όριό της, $M = \{m_1 < m_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$ η υπακολουθία της $(\mathbf{x}_k)$ που ορίζεται από το M . Θα δείξουμε ότι $\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{x}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}$ θα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Ισχυριζόμαστε ότι $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ για όλα τα $k \geq k_0$. Πράγματι έστω $k \geq k_0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $m_k \geq k$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$ και άρα $m_k \geq k \geq k_0$ οπότε $\|\mathbf{x}_{m_k} - \mathbf{x}\| < \varepsilon$ δηλαδή $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}\| < \varepsilon$. $\square$

Στα επόμενα, αν $M = \{m_1 < m_2 < \dots\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ την υπακολουθία $(\mathbf{y}_k)$ με $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_{m_k}$ θα την συμβολίζουμε με $(\mathbf{x}_m)$. Επίσης αν $\lim \mathbf{y}_k = \mathbf{x}$ τότε θα γράφουμε

$$\mathbf{x}_m \xrightarrow{m \in M} \mathbf{x}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.12. (*Bolzano-Weierstrass*) *Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο n . Για $n = 1$ το θεώρημα ως γνωστόν ισχύει. Έστω $n \geq 2$ και ας υποθέσουμε ότι το θεώρημα ισχύει για φραγμένες ακολουθίες στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Έστω $(\mathbf{x}_k)$ φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ και $M > 0$ με $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$ για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\mathbf{x}_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n,k})$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και από υπόθεση έχουμε $\|\mathbf{x}_k\| = \sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n,k}^2} \leq M$. Συνεπώς

$$\sqrt{x_{1,k}^2 + \dots + x_{n-1,k}^2} \leq M \text{ και } |x_{n,k}| \leq M$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Με άλλα λόγια η ακολουθία $\mathbf{x}'_k$ του $\mathbb{R}^{n-1}$ με $\mathbf{x}'_k = (x_{1,k}, \dots, x_{n-1,k})$ καθώς και η ακολουθία $(x_{n,k})$ του $\mathbb{R}$ είναι φραγμένη. Συνεπώς από την επαγωγική μας υπόθεση υπάρχει $M_1 \subseteq \mathbb{N}$ άπειρο και $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ με

$$\mathbf{x}'_m \xrightarrow{m \in M_1} \mathbf{x}' \quad (3.4)$$

Αφού η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(x_{n,k})$ είναι φραγμένη από το M το ίδιο ισχύει και για την υπακολουθία $(x_{n,m})_{m \in M_1}$. Από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass για το $\mathbb{R}$ έπεται ότι υπάρχει $M_2 \subseteq M_1$ άπειρο και $x_n \in \mathbb{R}$ με

$$x_{n,m} \xrightarrow{m \in M_2} x_n \quad (3.5)$$

Επειδή $M_2 \subseteq M_1$ η ακολουθία $(\mathbf{x}'_m)_{m \in M_2}$ είναι υπακολουθία της $(\mathbf{x}'_m)_{m \in M_1}$ και άρα συγκλίνει στο ίδιο όριο με αυτή, δηλαδή $\mathbf{x}'_m \xrightarrow{m \in M_2} \mathbf{x}'$. Αφού $\mathbf{x}'_m = (x_{1,m}, \dots, x_{n-1,m})$, από Πρόταση 3.9 σημαίνει ότι

$$x_{1,m} \xrightarrow{m \in M_2} x_1, \dots, x_{n-1,m} \xrightarrow{m \in M_2} x_{n-1} \quad (3.6)$$

όπου $(x_1, \dots, x_{n-1}) = \mathbf{x}'$.

Από (3.5), (3.6) και την Πρόταση 3.9 έπεται ότι

$$\mathbf{x}_m \xrightarrow{m \in M_2} \mathbf{x}$$

όπου $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$. $\square$

3.3. Οι ακολουθίες Cauchy στον $\mathbb{R}^n$ ορίζονται όπως στο $\mathbb{R}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.13. Μια ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ στον $\mathbb{R}^n$ καλείται **Cauchy** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m\| < \varepsilon$ για όλα τα $k, m \geq k_0$.

Θυμίζουμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στον $\mathbb{R}^n$. Με επαγωγή αποδεικνύεται ότι ο χαρακτηρισμός αυτός ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.14. Μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ είναι συγκλίνουσα αν και μόνο αν είναι Cauchy.

Μια εφαρμογή εδώ είναι το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.15. (Θεώρημα Σταθερού Σημείου του Banach). Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz συνάρτηση με σταθερά $0 < \vartheta < 1$, δηλαδή η f ικανοποιεί την ιδιότητα $\|f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})\| \leq \vartheta \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ του $\mathbb{R}^n$. Τότε η f έχει ένα σταθερό σημείο που επιπλέον είναι και μοναδικό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{x}_0$ ένα σημείο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ αναδρομικά θέτοντας $\mathbf{x}_n = f(\mathbf{x}_{n-1})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy και άρα συγκλίνουσα.

Δείχνουμε πρώτα με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$ ότι

$$\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \leq \vartheta^k \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \quad (3.7)$$

Πράγματι για $k = 1$ η (3.7) ισχύει αφού $\mathbf{x}_2 = f(\mathbf{x}_1)$, $\mathbf{x}_1 = f(\mathbf{x}_0)$ και άρα

$$\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \|f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_0)\| \leq \vartheta \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Έστω ότι η (3.7) ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι τότε ισχύει και για το $k + 1$ στην θέση του k . Πράγματι,

$$\|\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}\| = \|f(\mathbf{x}_{k+1}) - f(\mathbf{x}_k)\| \leq \vartheta \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k\| \stackrel{(3.7)}{\leq} \vartheta^{k+1} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|$$

Άρα η (3.7) ισχύει για όλα τα $k \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k < m$,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| &= \|(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) + (\mathbf{x}_{k+2} - \mathbf{x}_{k+1}) + \cdots + (\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_{m-1})\| \\ &= \left\| \sum_{j=k}^{m-1} (\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=k}^{m-1} \|\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j\| \\ &\stackrel{(3.7)}{\leq} \left(\sum_{j=k}^{m-1} \vartheta^j \right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \left(\sum_{j=k}^{\infty} \vartheta^j \right) \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| = \frac{\vartheta^k}{1 - \vartheta} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|. \end{aligned}$$

Επειδή $0 < \vartheta < 1$ έχουμε ότι $\vartheta^k \rightarrow 0$ και η παραπάνω σχέση δίνει ότι η ακολουθία $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy. (Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\vartheta^k \rightarrow 0$ έπεται και ότι $\frac{\vartheta^k}{1 - \vartheta} \rightarrow 0$.

Συνεπώς για το $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|}$ υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ με $\frac{\vartheta^k}{1 - \vartheta} < \varepsilon'$ για κάθε $k \geq k_0$.

Έστω $m, k > k_0$. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $m \geq k$ και άρα $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \leq \frac{\vartheta^k}{1 - \vartheta} \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\| \leq \varepsilon$.)

Αφού η $(\mathbf{x}_k)$ είναι Cauchy είναι και συγκλίνουσα και έστω $\mathbf{x}$ το όριό της. Τότε

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| &\leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}_{k+1}\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &= \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_k)\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \\ &\leq \vartheta \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| \end{aligned}$$

και άρα

$$0 \leq \|f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| \leq \vartheta \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| + \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}\| = 0$$

δηλαδή $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Η f δεν έχει άλλο σταθερό σημείο. Πράγματι αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ δύο σταθερά σημεία της f τότε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| \leq \vartheta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

άτοπο. □

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2. Παρατηρείστε ότι απο την παραπάνω απόδειξη προκύπτει ότι από οποιοδήποτε $\mathbf{x}_0$ και να ξεκινούσαμε στο ίδιο $\mathbf{x}$ θα καταλήγαμε.

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όρια και συνέχεια

1. Γενικές έννοιες.

1.1. Είδη συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Με τον όρο *συνάρτηση πολλών μεταβλητών* εννοούμε γενικά μια συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ μη κενό (αν $m = n = 1$ τότε έχουμε την κλασική περίπτωση πραγματικής συνάρτησης μιας μεταβλητής). Οι συναρτήσεις αυτές ταξινομούνται ως εξής:

(I) **Πραγματικές (ή βαθμωτές)** Είναι οι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^2 + y^2$.

2) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ όπου

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

είναι ο κλειστός μοναδιαίος δίσκος του $\mathbb{R}^2$.

3) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

4) $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$, όπου

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^3$.

Στην Φυσική συναρτήσεις της μορφής $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ χρησιμοποιούνται για να αντιπροσωπεύουν βαθμωτά φυσικά μεγέθη στα σημεία του χώρου όπως πχ. η θερμοκρασία, η ατμοσφαιρική πίεση.

(II) **Διανυσματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.** Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}$ και $m \geq 2$. Συνήθως το σύνολο X είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Μερικά παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

2) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(t) = (t, t^2)$.

3) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

4) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ με τύπο $f(t) = (t, t^2, \dots, t^m)$.

Οι συναρτήσεις $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $X \subseteq \mathbb{R}$ γράφονται πάντα στην μορφή

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t)), \quad t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

όπου $f_1(t), \dots, f_k(t)$ είναι πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής από το X στο $\mathbb{R}$ (δείτε Πρόταση 4.1 παρακάτω).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 4.1. Αν $X = I$ είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ τότε οι συναρτήσεις $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ μετασχηματίζουν το διάστημα I του $\mathbb{R}$ σε μια m -διάστατη καμπύλη. Πχ. η συνάρτηση $f(t) = (\cos t, \sin t)$, μετασχηματίζει το διάστημα $[0, 2\pi]$ στον μοναδιαίο κύκλο ενώ η $f(t) = (t, t^2)$ μετασχηματίζει την ευθεία στην παραβολή $y = x^2$. Θεωρώντας τη μεταβλητή t ως χρόνο, οι συναρτήσεις της μορφής $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ απεικονίζουν την θέση ενός κινητού την χρονική στιγμή t στον χώρο $\mathbb{R}^n$.

(III) Διανυσματικές Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Είναι συναρτήσεις της μορφής $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ όπου $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $n, m \geq 2$ (αν $n = m$ οι συναρτήσεις αυτές καλούνται πολλές φορές και διανυσματικά πεδία). Παραδείγματα τέτοιων συναρτήσεων είναι τα ακόλουθα:

1) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$f(x, y, z) = \left(-\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \right)$$

2) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$.

3) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $f(x, y) = (-y, x)$.

Τα διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούνται στην Φυσική για να περιγράψουν διανυσματικά πεδία, όπως είναι ένα πεδίο βαρύτητας, ή πεδίο ταχύτητας ρευστού.

1.2. Ανάλυση μιας συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ σε συνιστώσες συναρτήσεις. Η επόμενη πρόταση ουσιαστικά ανάγει την μελέτη όλων των συναρτήσεων πολλών μεταβλητών στις βαθμωτές συναρτήσεις.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $f_1, \dots, f_m$ από το X στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$$

για κάθε $\mathbf{x} \in X$. Συμβολικά γράφουμε

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

και οι $f_1, \dots, f_m$ καλούνται οι συνιστώσες συναρτήσεις της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ έστω $\pi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ η i -προβολή του $\mathbb{R}^m$, δηλαδή η συνάρτηση

$$\pi_i(y_1, \dots, y_m) = y_i.$$

Παρατηρούμε ότι κάθε διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ του $\mathbb{R}^m$ γράφεται ως

$$\mathbf{y} = (\pi_1(\mathbf{y}), \dots, \pi_m(\mathbf{y})). \quad (4.1)$$

Έστω τώρα ένα τυχόν $\mathbf{x} \in X$. Θέτοντας $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ από την (4.1) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (\pi_1(f(\mathbf{x})), \dots, \pi_m(f(\mathbf{x}))) \quad (4.2)$$

Άρα αν θέσουμε $f_i = \pi_i \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$, να είναι η σύνθεση των π_i και f , τότε $f_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x}))$ και άρα απο την (4.2) έχουμε

$$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})). \quad (4.3)$$

Μένει να δειχθεί ότι οι $f_1, \dots, f_m$ είναι και οι μοναδικές συναρτήσεις που ικανοποιούν την (4.3). Πράγματι αν $g_1, \dots, g_m$ συναρτήσεις απο τον X στο $\mathbb{R}$ με

$$f(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x}))$$

τότε αναγκαστικά $g_i(\mathbf{x}) = \pi_i(f(\mathbf{x})) = \pi_i \circ f(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x})$ για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. $\square$

2. Όριο συνάρτησης πολλών μεταβλητών

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την έννοια του ορίου συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Όπως θα δούμε είναι μια απλή γενίκευση της γνωστής αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Όπως και για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής, για να ορίζεται το όριο μιας συνάρτησης $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ σε ένα $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ θα πρέπει το $\mathbf{x}_0$ να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της f .

2.1. Όριο πραγματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.2. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ όριο το L και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ισχύει ότι $|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$.

Το επόμενο θεώρημα είναι πολύ χρήσιμο γιατί μεταφέρει το όριο συνάρτησης σε ακολουθίες. Με βάση το θεώρημα αυτό αποδεικνύονται όλες οι αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων βελτιωμένων συναρτήσεων.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3. (ΑΡΧΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ) Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

(2) Για οποιαδήποτε ακολουθία $(\mathbf{x}_n)$ απο στοιχεία του X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ ισχύει ότι $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\Rightarrow$ (2) : Έστω $(\mathbf{x}_n)$ ακολουθία στο X με $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(f(\mathbf{x}_n))$ (που είναι ακολουθία πραγματικών αριθμών) συγχλίνει στο L , ισοδύναμα για κάθε $\varepsilon > 0$ πρέπει να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με $|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, για το δοθέν ε υπάρχει $\delta > 0$ με

$$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } \mathbf{x} \in X \text{ με } \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta. \quad (4.4)$$

Επειδή τώρα $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < \delta$ για όλα τα $n \geq n_0$. Άρα απο την (4.4) έπεται ότι

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| < \varepsilon \text{ για όλα τα } n \geq n_0$$

Άρα $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow L$.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Έστω προς απαγωγή σε άτοπο ότι δεν ισχύει η (1) ενώ ισχύει η (2). Απο την άρνηση του ορισμού του $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$, έχουμε ότι θα υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\delta > 0$ υπάρχει $\mathbf{x}_\delta \in X$ με $0 < \|\mathbf{x}_\delta - \mathbf{x}_0\| < \delta$ και $|f(\mathbf{x}_\delta) - f(\mathbf{x})| \geq \varepsilon_0$. Άρα για $\delta = 1/n$ υπάρχει $\mathbf{x}_n \in X$ με

$$0 < \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| < 1/n \quad (4.5)$$

και

$$|f(\mathbf{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0. \quad (4.6)$$

Απο την (4.5) έπεται ότι $\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0\| \rightarrow 0$ και άρα απο την Πρόταση 3.8 έχουμε ότι $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x}_0$. Από την υπόθεσή μας έχουμε ότι $f(\mathbf{x}_n) \rightarrow 0$ ή ισοδύναμα $|f(\mathbf{x}_n) - L| \rightarrow 0$, άτοπο απο (4.6). $\square$

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.4. (Κανόνας παρεμβολής) Έστω $g, f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X . Αν $g(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h(\mathbf{x})$, για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = L \in \mathbb{R}$$

τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.5. (Κανόνας παρεμβολής για μηδενικές συναρτήσεις) Έστω $f, h : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X . Αν 1) $h(\mathbf{x}) \geq 0$, 2) $|f(\mathbf{x})| \leq h(\mathbf{x})$ για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ και (3) $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} h(\mathbf{x}) = 0$ τότε $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$.

Η επόμενη πρόταση είναι και αυτή μια Αρχή Μεταφοράς αλλά με καμπύλες αντί για ακολουθίες. Με τον όρο καμπύλη του $\mathbb{R}^n$ θα θεωρούμε μια συνεχή συνάρτηση ¹ $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.6. (Όριο κατά μήκος καμπύλης) Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{x}_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ και $L \in \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

$$(1) \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

(2) Για κάθε καμπύλη $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\mathbf{r}(0) = \mathbf{x}_0$ και $\mathbf{r}(t) \neq \mathbf{x}_0$ για κάθε $t \neq 0$ ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = L$.

2.3.1. Όριο γενικής διανυσματικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών. Η έννοια του ορίου μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι μια απλή γενίκευση της αντίστοιχης έννοιας για πραγματικές συναρτήσεις που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

¹Για τον ορισμό της συνέχειας δείτε την επόμενη παράγραφο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.7. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X και $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^m$. Λέμε ότι η f έχει στο $\mathbf{x}_0$ όριο το $\mathbf{L}$ και γράφουμε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{L}$$

αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\mathbf{x} \in X$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - \mathbf{L}\| < \varepsilon$.

Το όριο μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στο όριο των πραγματικών συναρτήσεων που αποτελούν την ανάλυση της f . Συγκεκριμένα έχουμε την εξής πρόταση που προκύπτει εύκολα από την Πρόταση 3.9 και την Αρχή Μεταφοράς (Θεώρημα 4.3).

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.8. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Το όριο $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ υπάρχει.
- (2) Αν $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f τότε τα όρια $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x})$ υπάρχουν για όλα τα $i = 1, \dots, m$ και ισχύει ότι

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \left(\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_1(\mathbf{x}), \dots, \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f_m(\mathbf{x}) \right)$$

3. Συνέχεια συνάρτησης πολλών μεταβλητών

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.9. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\mathbf{x} \in X$ με $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ να ισχύει ότι $\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$. Η f καλείται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του X .

Όπως και για τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής κάθε συνάρτηση $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι αυτομάτως συνεχής στα απομονωμένα σημεία του X . Άρα για να δούμε αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής αρκεί να ελέγξουμε τα σημεία του X που είναι σημεία συσσώρευσής του. Ισχύει και εδώ το ανάλογο θεώρημα με τα όρια.

ΠΡΟΤΑΣΗ 4.10. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Ισχύει ότι $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Η συνέχεια μιας διανυσματικής συνάρτησης ανάγεται στην συνέχεια των συνιστωσών συναρτήσεών της. Συγκεκριμένα από την προτάσεις 4.8 και 4.10 έχουμε το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 4.11. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{x}_0 \in X$ σημείο συσσώρευσης του X . Έστω επίσης $f = (f_1, \dots, f_m)$ η ανάλυση της f . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα.

- (α) Η f είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.
- (β) Για κάθε $i = 1, \dots, m$ η $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0$.

Ένα απο τα πλέον κλασικά θεωρήματα για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής είναι ότι κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Η ιδιότητα αυτή γενικεύεται για συνεχείς πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.12. Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό και φραγμένο. Τότε κάθε συνεχής συνάρτηση $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο K , δηλαδή υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ με

$$f(\mathbf{x}_1) = \min \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \quad \text{και} \quad f(\mathbf{x}_2) = \max \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in K\} \quad (4.7)$$

4. Λυμένες Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 4.1. Χρησιμοποιώντας την Αρχή Μεταφοράς δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

δεν υπάρχει.

Λύση: Έστω $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Παρατηρούμε ότι το $(0,0)$ είναι ένα σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X . Απο την Αρχή Μεταφοράς για να δείξουμε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει αρκεί να βρούμε δύο ακολουθίες (x_n, y_n) και (x'_n, y'_n) του X (άρα και $(x_n, y_n), (x'_n, y'_n) \neq (0,0)$) με $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x'_n, y'_n) = (0,0)$ αλλά $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n, y'_n)$.

Πράγματι, για την ακολουθία $(1/n, 0)$, έχουμε $(1/n, 0) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 0) \rightarrow (0,0)$ (Πρόταση 3.9) και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2} + 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

Ομοίως για την ακολουθία $(1/n, 1/n)$, έχουμε πάλι $(1/n, 1/n) \in X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $(1/n, 1/n) \rightarrow (0,0)$, αλλά

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$.

Λύση: Παρατηρούμε ότι για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$ έχουμε

$$\left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| + \left| \frac{y^3}{x^2 + y^2} \right| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |x| + \left| \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right| \cdot |y| \leq |x| + |y|$$

Άρα αν θέσουμε $f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ και $h(x,y) = |x| + |y|$, τότε

$$|f(x,y)| \leq h(x,y)$$

Επιπλέον $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x,y) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.3. Δείξτε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \sin\left(\frac{1}{y}\right) = 0$.

Λύση: Έστω $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ και $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x \sin(\frac{1}{y})$. Παρατηρούμε ότι το $(0, 0)$ είναι σημείο συσσώρευσης του X που δεν ανήκει στο X . Έστω (x_n, y_n) ακολουθία στο X (οπότε $y_n \neq 0$ και άρα $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) και $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Έχουμε $x_n \rightarrow 0$ (Πρόταση 3.9) και $|\sin(\frac{1}{y_n})| \leq 1$. Άρα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{y_n}\right) \right] = 0$$

(μηδενική $\times$ φραγμένη). Άρα από την Αρχή Μεταφοράς $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4.4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$.

(1) Βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε ευθείας $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(2) Βρείτε το όριο της f στο $(0, 0)$ κατά μήκος κάθε παραβολής $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2)$, $t \in \mathbb{R}$.

(3) Δείξτε ότι το όριο της f στο $(0, 0)$ δεν υπάρχει.

Λύση: (1) Έχουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \lambda t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \lambda t}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t^3}{t^4 + \lambda^2 t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t}{t^2 + \lambda^2} = 0$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι ανεξάρτητο του συντελεστή διεύθυνσης λ της ευθείας.

(2) Ομοίως

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\mathbf{r}(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, \lambda t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \lambda t^2}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda t^4}{t^4 + \lambda^2 t^4} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda}{1 + \lambda^2}$$

και άρα το όριο εξαρτάται από τον συντελεστή λ της παραβολής.

(3) Από το (2) και την Πρόταση 4.9. το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ δεν υπάρχει.

Παραγωγήιση πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

1. Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. (Μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς x στο σημείο (x_0, y_0) αν το όριο

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό καλείται **μερική παράγωγος ως προς x της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)** και συμβολίζεται με

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Ομοίως θα λέμε ότι η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη ως προς y στο σημείο (x_0, y_0) αν το όριο

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Το όριο αυτό καλείται **μερική παράγωγος ως προς y της συνάρτησης f στο σημείο (x_0, y_0)** και συμβολίζεται με

$$f_y(x_0, y_0) \quad \text{ή} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Έστω $A_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων (x, y) του A στα οποία η $f_x(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη. Η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_x(x, y)$, $(x, y) \in A_1$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς x** και συμβολίζεται με f_x ή $\frac{\partial f}{\partial x}$. Ομοίως αν $A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι το σύνολο όλων των εσωτερικών σημείων του A στα οποία η $f_y(x, y)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένη τότε η συνάρτηση $(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$, $(x, y) \in A_2$ καλείται **μερική παράγωγος της f ως προς y** και συμβολίζεται με f_y ή $\frac{\partial f}{\partial y}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = |x| + |y|.$$

Ισχυριζόμαστε ότι οι $f_x(0, 0)$ και $f_y(0, 0)$ δεν υπάρχουν. Πράγματι,

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

που ως γνωστόν δεν υπάρχει (αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά). Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}$$

που πάλι δεν υπάρχει.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2. Ομοίως για την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ δεν υπάρχουν, αφού όπως παραπάνω

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

και

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|y|^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|y|}{y}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Τότε

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x \cdot 0|} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|0 \cdot y|} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων σε ένα σημείο (x_0, y_0) δεν συνεπάγεται την συνέχεια της f στο (x_0, y_0) .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.4. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$. Τότε οι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ υπάρχουν ενώ η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Πράγματι, όπως είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο (δες Ασκήσεις) το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει και άρα η f δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0,0)$. Όμως

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

και ομοίως

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

2. Παράγωγος κατά κατεύθυνση

Κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ θα καλείται κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.2. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Το όριο (αν υπάρχει)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2) - f(x_0, y_0)}{t}$$

καλείται **παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$** . Το όριο αυτό συμβολίζεται με

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0)$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ είναι στην ουσία η παράγωγος του περιορισμού της f στην τομή της ευθείας $L = \{\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} : t \in \mathbb{R}\}$ με το A . Πιο συγκεκριμένα έστω $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$. Ορίζουμε $g : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}), \quad t \in (-\delta, \delta)$$

τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η g είναι καλά ορισμένη¹ και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0)$$

Επίσης αν $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ είναι η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)$$

και ομοίως

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0).$$

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει ότι η ύπαρξη των κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση παραγώγων μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο δεν εξασφαλίζει την συνέχεια της f στο σημείο αυτό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Δείξτε ότι

- (1) Η f δεν έχει όριο στο $(0, 0)$.
- (2) Όλες οι κατά κατεύθυνση παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ υπάρχουν.

Λύση: (1) Δείτε Άσκηση 4.4 (Κεφάλαιο 4).

¹διότι $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \subseteq A$, αφού $\|(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - \mathbf{x}_0\| = \|t\mathbf{u}\| = |t| \cdot \|\mathbf{u}\| = |t| < \delta$

(2) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = 1$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0 + tu_1, 0 + tu_2) - f(0, 0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tu_1, tu_2)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^5 u_1^4 + t^3 u_2^2}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 u_1^2 u_2}{t^3(t^2 u_1^4 + u_2^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι δεν μπορεί να συμβεί $u_1 = u_2 = 0$ αφού $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

- (α) $u_2 = 0$. Τότε $u_1^2 = 1$ και $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} 0 = 0$.
- (β) $u_2 \neq 0$. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^2 u_2}{t^2 u_1^4 + u_2^2} = \frac{u_1^2 u_2}{u_2^2} = \frac{u_1^2}{u_2}$.

3. Παράγωγος και διαφορικό

Θυμίζουμε ότι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται *παραγωγίσιμη* στο $x_0 \in \mathbb{R}$, αν το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Ισοδύναμα, η $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathbb{R}$ αν υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{h} = 0.$$

Γενικεύουμε τώρα τον παραπάνω ορισμό για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών ως εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Λέμε ότι η f είναι *παραγωγίσιμη* (ή *διαφορίσιμη*) στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|} = 0. \quad (5.1)$$

όπου $\|(h, k)\| = \sqrt{h^2 + k^2}$ η Ευκλείδεια νόρμα του (h, k) .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γραμμική² αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$T(h, k) = ah + bk$$

ο Ορισμός 5.3 αναδιατυπώνεται ως εξής.

²Θυμηθείτε ότι μια συνάρτηση $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ καλείται *γραμμική*, αν $T(\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v}) = \lambda T\mathbf{u} + \mu T\mathbf{v}$, για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.4. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Η f θα καλείται παραγωγίσιμη (ή διαφορίσιμη) στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν υπάρχει $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ γραμμική συνάρτηση τέτοια ώστε

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0. \quad (5.2)$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω T η γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την (5.2). Θέτουμε

$$R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h}) \quad (5.3)$$

για κάθε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} \in A$. Συνεπώς,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h}). \quad (5.4)$$

Επίσης, από την (5.2), $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$ και άρα³

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = 0.$$

Επιπλέον είναι εύκολο να δούμε ότι $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} T(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (ax+by) = 0$ και άρα

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} T(\mathbf{h}) = 0$$

Απο τα παραπάνω και την (5.4) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} (f(\mathbf{x}_0) + T(\mathbf{h}) + R(\mathbf{h})) \\ &= f(\mathbf{x}_0) + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} T(\mathbf{h}) + \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0). \end{aligned}$$

□

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ τότε υπάρχουν οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο την (5.1) για $k = 0$ έχουμε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{|h|} = 0$$

Άρα

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{h} = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} - a \right) = 0$$

³Είναι $\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0$, οπότε

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} R(\mathbf{h}) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left(\frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \|\mathbf{h}\| \right) = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} \cdot \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \|\mathbf{h}\| = 0.$$

που σημαίνει ότι

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι $f_y(x_0, y_0) = b$. $\square$

Από τα παραπάνω έχουμε τον εξής χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.7. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(1) Η f είναι παραγωγισιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

(2) Υπάρχουν οι $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0) \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0. \quad (5.5)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.6. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και $f(0, 0) = 0$. Τότε,

- (1) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (2) Ισχύει ότι $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.
- (3) Η f δεν είναι $(0, 0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Παρατηρούμε ότι

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot |y| \leq |y|$$

και άρα από τον κανόνα παρεμβολής $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(2) Έχουμε

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

(3) Αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\|(x, y)\|} &= 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0. \end{aligned}$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει. Πράγματι, για την ακολουθία $(x_n, y_n) = (1/n, 1/n) \rightarrow (0, 0)$ έχουμε $f(1/n, 1/n) = 1/2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, οπότε και $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = 1/2$. Όμως για την ακολουθία $(x_n, y_n) = (1/n, 0) \rightarrow (0, 0)$, έχουμε $f(1/n, 0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, και άρα $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n) = 0$. $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$.

Η γραμμική απεικόνιση

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

με τύπο

$$T(x, y) = f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, θα καλείται **διαφορικό της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $D_{\mathbf{x}_0}f$.

Ο πίνακας γραμμής

$$[f_x(x_0, y_0) \quad f_y(x_0, y_0)]$$

θα καλείται **παράγωγος της f στο σημείο $\mathbf{x}_0$** και θα συμβολίζεται με $f'(x_0, y_0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax + by$ μια γραμμική συνάρτηση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}$. Τότε

$$D_{\mathbf{x}_0}f = f \quad \text{και} \quad f'(x_0, y_0) = [a \quad b]$$

για κάθε $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Πράγματι, έστω τυχαίο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Τότε για οποιοδήποτε $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h} - \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{h})$$

(λόγω γραμμικότητας της f). Άρα θέτοντας $T = f$ στον τύπο (5.2) παίρνουμε

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - T(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{|f(\mathbf{h}) - f(\mathbf{h})|}{\|\mathbf{h}\|} = \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} 0 = 0. \quad (5.6)$$

Απο την (5.6) έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με διαφορικό τον εαυτό της σε κάθε σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης $f_x(x_0, y_0) = a$ και $f_y(x_0, y_0) = b$ οπότε $f'(x_0, y_0) = [a \quad b]$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.9. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι **μερικώς παραγωγίσιμη** στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, το διάνυσμα $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$ θα καλείται **κλίση ή ανάδελτα της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$** και θα συμβολίζεται με $\nabla f(x_0, y_0)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.1. Παρατηρείστε ότι σύμφωνα με τα παραπάνω το διαφορικό $D_{\mathbf{x}_0}f$ της f στο (x_0, y_0) μπορεί να γραφεί με τις εξής μορφές:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{x}_0}f(x, y) &= f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)y \\ &= f'(x_0, y_0) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{γινόμενο πινάκων}) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x, y) \quad (\text{εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης από το Πρόρισμα 5.7 έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν είναι μερικώς παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ και

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (5.8)$$

4. Εφαπτόμενο επίπεδο

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Το γράφημα $Gr(f)$ είναι μια *επιφάνεια* του $\mathbb{R}^3$ που περιγράφεται από την σχέση

$$Gr(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ και } z = f(x, y)\} \subseteq \mathbb{R}^3. \quad (5.9)$$

Έστω $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$. Το επίπεδο π του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την εξίσωση

$$(x, y, z) \in \pi \Leftrightarrow z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (5.10)$$

θα καλείται **εφαπτόμενο επίπεδο** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Το διάνυσμα

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1) \quad (5.11)$$

θα καλείται **κάθετο διάνυσμα** της f στο σημείο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. Παρατηρείστε ότι ένα σημείο $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ περιέχεται στο εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ αν και μόνο αν το διάνυσμα $\mathbf{n}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $(x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0))$.

5. Σχέση παραγώγου και κατά κατεύθυνση παραγώγου

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.10. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = D_{\mathbf{x}_0} f(\mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u} = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \quad (5.12)$$

για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ μια κατεύθυνση στο $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ και $\|\mathbf{u}\| = 1$). Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ από την (5.8) για $\mathbf{h} = t\mathbf{u}$, $t \in \mathbb{R}$, παίρνουμε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} = 0 \quad (5.13)$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \neq 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{\|t\mathbf{u}\|} &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t| \cdot \|\mathbf{u}\|} \\ &= \frac{|f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (t\mathbf{u})|}{|t|} \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0) - t(\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u})}{t} \right| \\ &= \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| \end{aligned}$$

και άρα η (5.13) γράφεται

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right| = 0$$

Οπότε

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} - (\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}) \right) = 0$$

δηλαδή

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}.$$

Επειδή εξ ορισμού $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$, έπεται το ζητούμενο. $\square$

Η Πρόταση 5.10 θέλει προσοχή στην εφαρμογή της γιατί δεν ισχύει αν η f δεν είναι παραγωγίσιμο στο (x_0, y_0) . Παραθέτουμε σχετικά το επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.8. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$. Δείξτε τα εξής.

- (i) Η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.
- (ii) Για κάθε κατεύθυνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ η παράγωγος της f στο $(0, 0)$ κατά την $\mathbf{u}$ υπάρχει.
- (iii) Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (i) Για κάθε $(x, y) \neq (0, 0)$ έχουμε

$$|f(x, y)| = \left| \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{|x|^3}{x^2 + y^2} + \frac{|y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{|x|^3}{x^2} + \frac{|y|^3}{y^2} = |x| + |y|$$

Άρα $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

(ii) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^3 u_1^3 + t^3 u_2^3}{t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2}}{t} = \frac{u_1^3 + u_2^3}{u_1^2 + u_2^2} = u_1^3 + u_2^3.$$

αφού $\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 = 1$ ($\mathbf{u}$ μοναδιαίο).

(iii) Από το (ii) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και αντίστοιχα για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 1.$$

Θα δείξουμε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμο στο $(0, 0)$ με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Από το Πρόσλημα 5.7 γνωρίζουμε ότι f είναι παραγωγίσιμο στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

ισοδύναμα,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = - \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y + x y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$$

Αλλά τότε αν $x = y = t$ θα πρέπει

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t^3}{\sqrt{2}|t|^3} = 0 \text{ ή } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{|t|} = 0,$$

που βέβαια δεν ισχύει.

2ος τρόπος: Από την Πρόταση 5.10 αν η f ήταν παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ τότε θα έπρεπε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 = u_1 + u_2. \quad (5.14)$$

για κάθε κατευθύνση $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Όμως από το (ii) έχουμε ότι $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = u_1^3 + u_2^3$. Άρα θα έπρεπε $u_1^3 + u_2^3 = u_1 + u_2$, για όλα τα $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$ με $u_1^2 + u_2^2 = 1$ που προφανώς δεν ισχύει. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.9. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{x^5}{x^4 + y^6}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $f(0, 0) = 0$.

(α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ μοναδιαίο διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Βρείτε την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$.

(β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (α) Έστω $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t\mathbf{u}) - f(\mathbf{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t^5 u_1^5}{t^4 u_1^4 + t^6 u_2^6}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 u_1^5}{t^5 u_1^4 + t^7 u_2^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u_1^5}{u_1^4 + t^2 u_2^6} = u_1.$$

(β) Από το (α) για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_1 = (1, 0)$,

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(0, 0) = 1,$$

και για $\mathbf{u} = \mathbf{e}_2 = (0, 1)$,

$$f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_2}(0, 0) = 0.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^5}{x^4 + y^6} - x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 \end{aligned}$$

Μετατρέποντας σε πολικές συντεταγμένες ($\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^6}{(x^4 + y^6)\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho \cos \theta \cdot \rho^6 \sin^6 \theta}{(\rho^4 \cos^4 \theta + \rho^6 \sin^6 \theta)\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left(\frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Πράγματι έστω $\epsilon > 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το θ : Αν $|\cos \theta| < \epsilon$ τότε

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| \leq |\cos \theta| < \epsilon$$

για οποιοδήποτε $\rho > 0$, ενώ αν $|\cos \theta| \geq \epsilon$ τότε

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| \leq \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \leq \frac{\rho^2}{\epsilon^4} < \epsilon$$

για $0 < \rho < \epsilon^{5/2}$. Συνεπώς για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \epsilon^{5/2}$ τέτοιο ώστε για $0 < \rho < \epsilon^{5/2}$ και για κάθε $\theta > 0$,

$$\left| \frac{\rho^2 \cdot \sin^6 \theta}{\cos^4 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta \right| < \epsilon$$

δηλαδή η (5.15) όντως ισχύει. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. $\square$

Με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz ($|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$) έχουμε και το εξής πόρισμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.11. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A . Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ τότε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \quad (5.16)$$

για κάθε κατευθύνηση $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Επιπλέον αν $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq (0, 0)$ και

$$\mathbf{u}_1 = \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}, \quad \mathbf{u}_2 = -\frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|}$$

(οπότε $\|\mathbf{u}_1\| = \|\mathbf{u}_2\| = 1$) τότε

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) = \max \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \quad (5.17)$$

και

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_2}(\mathbf{x}_0) = \min \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ με } \|\mathbf{u}\| = 1 \right\} = -\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \quad (5.18)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$ απο την Πρόταση 5.10 έχουμε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| = |\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \cdot \|\mathbf{u}\| = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|. \quad (5.19)$$

Επίσης

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0) &= \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{u}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} \\ &= \frac{\nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \nabla f(\mathbf{x}_0)}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_0)\|} = \|\nabla f(\mathbf{x}_0)\| \end{aligned}$$

Άρα αντικαθιστώντας στην (5.19) παίρνουμε

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) \right| \leq \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}_1}(\mathbf{x}_0)$$

που δίνει την (5.17). Ομοίως για το $\mathbf{u}_2$. $\square$

6. Συνέχεια μερικών παραγώγων και παραγωγισιμότητα

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.12. (Ικανή συνθήκη παραγωγισιμότητας) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε οι f_x, f_y ορίζονται σε μια περιοχή του $\mathbf{x}_0$ και είναι συνεχείς στο $\mathbf{x}_0$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{x}_0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο τον χαρακτηρισμό παραγωγισιμότητας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών (Πόρισμα 5.7) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k|}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0 \quad (5.20)$$

Έστω B μια ανοικτή μπάλα με κέντρο το $\mathbf{x}_0$ τέτοια ώστε $B \subseteq A$ και οι f_x, f_y να ορίζονται στο B . Έστω $\mathbf{x} = (x, y) \in B$ με $(x, y) \neq (x_0, y_0)$. Ας υποθέσουμε ότι $x \neq x_0$ και $y \neq y_0$. (Οι περιπτώσεις $x = x_0$ και $y \neq y_0$ ή $x \neq x_0$ και $y = y_0$ αντιμετωπίζονται ομοίως). Προσθαφαιρόντας τον όρο $f(x_0, y_0 + k)$ η διαφορά

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

γράφεται ως άθροισμα δύο διαφορών όπου στη μία απο αυτές μένει το y σταθερό και στην άλλη το x ως εξής

$$[f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)] + [f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)]$$

Απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) υπάρχουν $\theta_1 = \theta_1(h, k), \theta_2 = \theta_2(h, k) \in (0, 1)$ τέτοια ώστε

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k)h + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k)k$$

Συνεπώς το πηλίκο

$$\frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)h - f_y(x_0, y_0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (5.21)$$

γράφεται ως $R_1(h, k) + R_2(h, k)$ όπου

$$R_1(h, k) = (f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (5.22)$$

και

$$R_2(h, k) = (f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k) - f_y(x_0, y_0)) \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (5.23)$$

Επειδή η f_x είναι συνεχής στο (x_0, y_0) , έπεται

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0, y_0)) = 0. \quad (5.24)$$

Επιπλέον

$$\left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1.$$

Άρα

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R_1(h, k) = 0 \quad (5.25)$$

Ομοίως επειδή η f_y είναι συνεχής στο (x_0, y_0) ,

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k) - f_y(x_0, y_0)) = 0$$

και αφού

$$\left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} R_2(h,k) = 0 \quad (5.26)$$

Απο τις (5.25) και (5.26) έπεται ότι το όριο του πηλίκου στην (5.21) καθώς το $(h,k) \rightarrow (0,0)$ είναι το 0. Συνεπώς η (5.20) ισχύει δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . $\square$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.13. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία οι f_x, f_y ορίζονται σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς καλείται **συνεχώς παραγωγίσιμη** στο A . Το σύνολο όλων των συνεχώς παραγωγίσιμων πραγματικών συναρτήσεων στο A θα συμβολίζεται με $C^1(A)$.

Το επόμενο πόρισμα του Θεωρήματος 5.12 είναι ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο παραγωγισιμότητας.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.14. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^1(A)$. Τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του A .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.2. Παρατηρείστε ότι $f \in C^1(A)$ αν και μόνο αν η συνάρτηση $\nabla f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.10. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = e^x y + x^2 e^y$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Επίσης βρείτε την παράγωγο στο σημείο $(1, 0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε $f_x(x, y) = ye^x + 2xe^y$ και $f_y(x, y) = e^x + x^2 e^y$. Οι f_x, f_y είναι συνεχείς. Πράγματι, έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Τότε $f_x(x_n, y_n) = y_n e^{x_n} + 2x_n e^{y_n} \rightarrow ye^x + 2xe^y$, απο τις αλγεβρικές ιδιότητες των ορίων πραγματικών ακολουθιών. Αφού λοιπόν οι f_x, f_y είναι συνεχείς η f είναι παραγωγίσιμη. Η παράγωγος της f σε ένα οποιοδήποτε σημείο (x, y) εξ ορισμού είναι ο πίνακας γραμμής $f'(x, y) = [f_x(x, y) \ f_y(x, y)]$. Άρα $f'(1, 0) = [2 \ e + 1]$. $\square$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.11. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = e^{x+2y}$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και υπολογίστε το όριο

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι $f_x(x, y) = e^{x+2y}$ και $f_y(x, y) = 2e^{x+2y}$. Άρα η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης και συνεπώς είναι παραγωγίσιμη.

Επίσης

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right)$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - f_x(0, 0)x - f_y(0, 0)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

λόγω παραγωγισιμότητας της f στο $(0, 0)$. Επειδή

$$\left| \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|x| + |y|} \right| \leq 1$$

έπεται ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x+2y} - 1 - x - 2y}{|x| + |y|} = 0.$$

□

7. Ο Κανόνας Αλυσίδας

7.1. Καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$. Με τον όρο **καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$** θα εννοούμε μια συνάρτηση $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

όπου το I είναι ένα διάστημα του $\mathbb{R}$. Το σύνολο τιμών $\{\mathbf{r}(t) : t \in I\} \subseteq \mathbb{R}^2$ θα το καλούμε **ίχνος της καμπύλης**.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.15. Έστω $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ και $t_0 \in I$. Θα λέμε ότι η $\mathbf{r}$ είναι **παραγωγίσιμη** (ή **διαφορίσιμη**) στο σημείο t_0 αν οι $x'(t_0), y'(t_0)$ υπάρχουν. Το διάνυσμα $(x'_1(t_0), y'_1(t_0))$ θα καλείται **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης στο t_0 και θα συμβολίζεται με $\mathbf{r}'(t_0)$.

Παραδείγματα: (1) Έστω $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ δύο διαφορετικά σημεία του $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), \quad t \in [0, 1] \quad (5.27)$$

Αν $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τότε η $\mathbf{r}(t)$ παίρνει την μορφή

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) \quad (5.28)$$

όπου

$$x(t) = a_1 + t(b_1 - a_1) \text{ και } y(t) = a_2 + t(b_2 - a_2) \quad (5.29)$$

Το ίχνος της καμπύλης αυτής καλείται **κλειστό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$** , και συμβολίζεται με $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Άρα,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in [0, 1]\}$$

Παρατηρούμε ότι

$$x'(t) = b_1 - a_1 \text{ και } y'(t) = b_2 - a_2$$

και συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}$ είναι σταθερό για κάθε $t \in [0, 1]$ και δίνεται απο τον τύπο

$$\mathbf{r}'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) = \mathbf{b} - \mathbf{a}. \quad (5.30)$$

(2) Η καμπύλη $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με τύπο $\mathbf{r}(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, $t \in [0, 1]$ έχει ίχνος τον **μοναδιαίο κύκλο του $\mathbb{R}^2$** .

7.2. Κανόνας Αλυσίδας. Το επόμενο θεώρημα αποτελεί την πιο απλή μορφή του κανόνα αλυσίδας για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.16. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$, τέτοια ώστε το ίχνος της περιέχεται στο A . Ορίζουμε $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ να είναι η σύνθεσή τους, δηλαδή

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(x(t), y(t)),$$

για κάθε $t \in I$. Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο t_0 και ισχύει

$$F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) \quad (5.31)$$

όπου $\mathbf{r}'(t_0)$ είναι το **εφαπτόμενο διάνυσμα** της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$ στο t_0 , δηλαδή το $\mathbf{r}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θέτουμε $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0)}{t - t_0} \end{aligned} \quad (5.32)$$

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)(x-x_0) - f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \quad (5.33)$$

Για κάθε $(x, y) \in A$ θέτουμε

$$R(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

οπότε

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + R(x, y) \quad (5.34)$$

Επίσης η (5.33) γράφεται

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0 \quad (5.35)$$

Έχουμε τώρα

$$\begin{aligned} F(t) - F(t_0) &= f(x(t), y(t)) - f(x_0, y_0) \\ &\stackrel{(5.34)}{=} f_x(x_0, y_0)(x(t) - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y(t) - y_0) + R(x(t), y(t)) \\ &= f_x(x_0, y_0)(x(t) - x(t_0)) + f_y(x_0, y_0)(y(t) - y(t_0)) + R(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
 F'(t_0) &= \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} \\
 &= f_x(x_0, y_0) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + f_y(x_0, y_0) \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\
 &\quad + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(x(t), y(t))}{t - t_0} \\
 &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) + \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(x(t), y(t))}{t - t_0}
 \end{aligned}$$

Για να ολοκληρωθεί συνεπώς η απόδειξη αρκεί να δειχθεί ότι

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(x(t), y(t))}{t - t_0} = 0 \quad (5.36)$$

Ευτυχώς αυτό ισχύει! Πράγματι, παρατηρούμε πρώτα ότι το πηλίκο $\frac{R(x(t), y(t))}{t - t_0}$ γράφεται ως γινόμενο

$$\frac{R(x(t), y(t))}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}} \cdot \frac{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}}{t - t_0}.$$

Το όριο στο t_0 του πρώτου παράγοντα είναι το μηδέν αφού

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{R(x(t), y(t))}{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} \frac{R(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} \stackrel{(5.35)}{=} 0.$$

Επίσης το όριο του δεύτερου παράγοντα στο t_0 υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2}}{t - t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \sqrt{\left(\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}\right)^2 + \left(\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}
 \end{aligned}$$

□

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.17. (Ισοσταθμικές καμπύλες) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ μια καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ που το ίχνος της περιέχεται στο A . Η καμπύλη $\mathbf{r}$ θα καλείται **ισοσταθμική καμπύλη της f** αν ο περιορισμός της f στο ίχνος της είναι σταθερή συνάρτηση (δηλαδή $f(\mathbf{r}(t)) = c$ για όλα τα $t \in I$).

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.18. (Καθετότητα του ∇f και των ισοσταθμικών καμπυλών) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{r} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ μια ισοσταθμική καμπύλη της f . Αν η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη στο $t_0 \in I$ και η f παραγωγίσιμη στο $\mathbf{r}(t_0)$ τότε το διάνυσμα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0))$ της κλίσης της f στο σημείο $\mathbf{r}(t_0)$ είναι κάθετο με το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{r}'(t_0)$ της καμπύλης στο t_0 .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$, $t \in I$. Η F είναι σταθερή συνάρτηση και άρα $F'(t) = 0$ για όλα τα $t \in I$. Απο την άλλη μεριά έχουμε ότι $F'(t_0) = \nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0)$ και άρα $\nabla f(\mathbf{r}(t_0)) \cdot \mathbf{r}'(t_0) = 0$. □

Μία άλλη σημαντική εφαρμογή του Θεωρήματος 5.16 είναι το επόμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.19. (Θεώρημα Μέσης Τιμής) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ δύο διαφορετικά σημεία του A τέτοια ώστε το κλειστό ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ να περιέχεται στο A . Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε υπάρχει σημείο $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα⁴ $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ τέτοιο ώστε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (5.37)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ με $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ και έστω $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$F(t) = f(\mathbf{r}(t)) = f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})),$$

για κάθε $t \in [0, 1]$. Επειδή $[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1] \subseteq A$ η F είναι καλά ορισμένη. Επιπλέον όπως είδαμε (σχέση (5.30)) το **εφαπτόμενο διάνυσμα της $\mathbf{r}(t)$** είναι σταθερό με $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, για οποιοδήποτε $t \in [0, 1]$. Άρα, αφού η f είναι παραγωγίσιμη, από τον κανόνα αλυσίδας (Θεώρημα 5.16) έπεται ότι και η F είναι παραγωγίσιμη με

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \nabla f(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (5.38)$$

για κάθε $t \in (0, 1)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) έχουμε

$$F(1) - F(0) = F'(\xi) \quad (5.39)$$

για κάποιο $\xi \in (0, 1)$. Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$ και $F(1) = f(\mathbf{b})$ αντικαθιστώντας στην (5.39) παίρνουμε

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Θέτοντας τώρα $\xi = \mathbf{a} + \xi(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ έχουμε ότι $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ και

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\xi) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.20. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

- (1) Η f είναι σταθερή.
- (2) Για κάθε $(x, y) \in A$, ισχύει ότι $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) $\implies$ (2) Αν η f είναι σταθερή τότε

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

και ομοίως

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

(2) $\implies$ (1) Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ και έστω $c = f(\mathbf{a})$. Έστω $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ τυχόν σημείο του $\mathbb{R}^2$ διαφορετικό του $\mathbf{a}$. Αφού οι f_x, f_y ως σταθερές είναι και συνεχείς

⁴Το **ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα του $\mathbb{R}^2$ με άκρα τα $\mathbf{a}, \mathbf{b}$** ορίζεται να είναι το σύνολο

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) : t \in (0, 1)\}$$

έπεται ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Τώρα απο το Θεώρημα 5.19 έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ με

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = f_x(\xi)(b_1 - a_1) + f_y(\xi)(b_2 - a_2)$$

και άρα αφού $f_x = f_y = 0$ έπεται ότι $f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = 0$ δηλαδή $f(\mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) = c$. $\square$

Σημείωση: Προσοχή το Πρόρισμα 5.20 δεν ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι ένα οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Πχ. έστω $A = D_1 \cup D_2$, όπου D_1, D_2 δύο ξένοι ανοικτοί δίσκοι του $\mathbb{R}^2$ και $f(x, y) = 1$ αν $(x, y) \in D_1$ ενώ $f(x, y) = 2$ αν $(x, y) \in D_2$. Τότε $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ αλλά η f δεν είναι σταθερή. Το πρόβλημα εδώ είναι ότι ένα ευθ. τμήμα που συνδέει ένα σημείο απο τον ένα δίσκο με ένα σημείο απο τον άλλον δεν περιέχεται όλο στο A και έτσι το Θεώρημα 5.19 δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

8. Το Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης

Στην παράγραφο αυτή θα εξετασθεί το πρόβλημα της επίλυσης μιας εξίσωσης δύο μεταβλητών

$$F(x, y) = 0 \quad (5.40)$$

ως προς την μια από τις μεταβλητές συναρτήσει της άλλης. Θέλουμε δηλαδή να δούμε ποτέ, δεδομένης της εξίσωσης (5.40), υπάρχει μία λύση της μορφής

$$y = f(x) \text{ ή } x = g(y) \quad (5.41)$$

Το πρόβλημα αυτό έχει και την εξής γεωμετρική ερμηνεία: Πότε το σύνολο των σημείων $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ που ικανοποιούν την εξίσωση $F(x, y) = 0$, δηλαδή το σύνολο

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}$$

αποτελεί μια “φυσιολογική” καμπύλη του $\mathbb{R}^2$,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\} \text{ ή } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = g(y)\}$$

δηλαδή μια καμπύλη που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης από ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$;

Πχ. αν η $F(x, y) = 0$ είναι η εξίσωση μιας ευθείας του $\mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = ax + by + c = 0 \quad (5.42)$$

τότε εύκολα βλέπουμε ότι αν $b \neq 0$ τότε η (5.42) λύνεται ως προς την μεταβλητή y ($y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$) και ομοίως αν $a \neq 0$ τότε λύνεται ως προς x ($x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}$). Από την άλλη μεριά αν έχουμε την εξίσωση του μοναδιαίου κύκλου

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (5.43)$$

βλέπουμε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά y_1, y_2 με $F(x, y_1) = F(x, y_2) = 0$ και αντίστοιχα για κάθε $y \in (-1, 1)$ υπάρχουν δύο διαφορετικά x_1, x_2 με $F(x_1, y) = F(x_2, y) = 0$. Συνεπώς η εξίσωση $x^2 + y^2 - 1 = 0$ δεν μπορεί να επιλυθεί πλήρως ως προς καμία απο τις μεταβλητές x, y . Όμως αν περιορίσουμε τα (x, y) με

$F(x, y) = 0$ που θεωρούμε τότε μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ ως προς μια μεταβλητή συναρτήσει της άλλης. Πχ. παρατηρούμε ότι ισχύει η εξής ισοδυναμία

$$F(x, y) = 0 \text{ και } y \geq 0 \Leftrightarrow y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$$

Ομοίως

$$F(x, y) = 0 \text{ και } x \leq 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt{1 - y^2}, y \in [-1, 1]$$

Γενικά μπορούμε να δούμε ότι για κάθε (x_0, y_0) με $F(x_0, y_0) = 0$ υπάρχει πάντα ένα διάστημα I_0 που έχει το x_0 στο εσωτερικό του και ένα διάστημα J_0 που έχει το y_0 στο εσωτερικό του όπου μέσα στο ορθογώνιο $I_0 \times J_0 = \{(x, y) : x \in I_0, y \in J_0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ μπορούμε να επιλύσουμε την $F(x, y) = 0$ είτε ως προς y είτε ως προς x . Πχ. Στο σημείο $(0, 1)$ η $F(x, y) = 0$ επιλύεται ως προς y ($y = \sqrt{1 - x^2}$) όταν περιοριστούμε στα (x, y) με $x \in [-1, 1]$ και $y \geq 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.21. (Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης I) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό, $F \in C^1(A)$ και $(x_0, y_0) \in A$. Αν

$$F(x_0, y_0) = 0 \text{ και } F_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad (5.44)$$

τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 και ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ η εξίσωση $F(x, y) = 0$ έχει μία μοναδική λύση ως προς y .

Με άλλα λόγια υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ και κάθε $y \in Y$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \quad (5.45)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση f είναι C^1 (δηλαδή έχει συνεχή παράγωγο στο X) και ισχύει ο τύπος

$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad (5.46)$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα

$$f'(x_0) = -\frac{F_x(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)} \quad (5.47)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η απόδειξη χωρίζεται σε τρία βήματα. Πρώτα προσδιορίζουμε τα ανοικτά διαστήματα κατά σειρά πρώτα το Y και ύστερα το X , έτσι ώστε για κάθε $x \in X$ να υπάρχει μοναδικό $y \in Y$ τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$ και ταυτόχρονα αν $y', y'' \in Y$ τότε

$$y' < y < y'' \Leftrightarrow F(x, y') < 0 < F(x, y'')$$

Άρα αν $f : X \rightarrow Y$ είναι η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$ τότε θα έχουμε ότι η γραφική παράσταση C της f θα χωρίζει το ορθογώνιο $X \times Y$ σε δύο μέρη έτσι ώστε η $F(x, y)$ να είναι γνήσια αρνητική κάτω από την C , μηδέν επί της C και γνήσια θετική πάνω από την C . Στο δεύτερο βήμα δείχνουμε ότι αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και στο τρίτο και τελευταίο βήμα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής δείχνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο που δίνεται από τον τύπο (5.46).

Βήμα 1. Έστω $F_y(x_0, y_0) > 0$ (αν $F_y(x_0, y_0) < 0$ η απόδειξη προχωρά ανάλογα). Επειδή η $F_y : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F_y(x, y) > 0$ για κάθε $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_2 = \delta/2, \quad y_0^- = y_0 - \delta_2, \quad y_0^+ = y_0 + \delta_2, \quad \text{και } Y = (y_0^-, y_0^+).$$

Περιορίζουμε τώρα την F στο ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) , δηλαδή θεωρούμε την συνάρτηση $g_0 : Y \rightarrow \mathbb{R}$ με $g_0(y) = F(x_0, y)$ για κάθε $y \in Y$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $g'_0(y) = F_y(x_0, y)$ και συνεπώς $g'_0(y) > 0$ για κάθε $y \in Y$. Αυτό σημαίνει ότι η g_0 είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση. Επειδή $g_0(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$ θα πρέπει $g_0(y) < 0 < g_0(y')$ για κάθε $y < y_0 < y'$ στο Y . Ειδικότερα,

$$F(x_0, y_0^-) < 0 < F(x_0, y_0^+)$$

Επειδή η F είναι συνεχής στα (x_0, y_0^-) και (x_0, y_0^+) θα υπάρχει ένα $\delta' > 0$ τέτοιο ώστε

$$F(x, y) < 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^-) \text{ και } F(x, y) > 0 \text{ αν } (x, y) \in B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$$

Μπορούμε να υποθέσουμε (μικραίνοντας το δ' αν χρειάζεται) ότι το δ' είναι αρκετά μικρό ώστε οι δίσκοι $B_{\delta'}(x_0, y_0^-)$ και $B_{\delta'}(x_0, y_0^+)$ περιέχονται στον αρχικό $B_\delta(x_0, y_0)$. Θέτουμε

$$\delta_1 = \delta', \quad x_0^- = x_0 - \delta_1, \quad x_0^+ = x_0 + \delta_1, \quad \text{και } X = (x_0^-, x_0^+).$$

Τότε

$$F(x, y_0^-) < 0, \quad F(x, y_0^+) > 0$$

για κάθε $x \in X$. Επιπλέον $X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ και άρα αν σταθεροποιήσουμε ένα $x \in X$ και θεωρήσουμε όπως προηγουμένως την συνάρτηση $g(y) = F(x, y)$, $y \in Y$, θα έχουμε ότι $g'(y) = F_y(x, y) > 0$ δηλαδή η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής. Επειδή $g(y_0^-) = F(x, y_0^-) < 0$ και $h(y_0^+) = F(x, y_0^+) > 0$ θα υπάρχει ένα μοναδικό $y \in Y$ με $h(y) = F(x, y) = 0$. Έστω $f : X \rightarrow Y$ η συνάρτηση που στέλνει κάθε $x \in X$ στο μοναδικό $y \in Y$ με $F(x, y) = 0$.

Βήμα 2. Δείχνουμε τώρα ότι η f είναι συνεχής. Επιλέγουμε ένα σημείο $a \in X$ και έστω $\epsilon > 0$. Από την επιλογή των X και Y παραπάνω το $b = f(a)$ θα είναι το μοναδικό σημείο του διαστήματος Y με τις ιδιότητες $F(a, b) = 0$ και $F(a, y) < 0 < F(a, y')$ αν και μόνο αν $y < b < y'$. Περνώντας σε μικρότερο $\epsilon > 0$ αν χρειάζεται μπορούμε να υποθέσουμε ότι $(b - \epsilon, b + \epsilon) \subseteq Y$. Επειδή $F(a, b - \epsilon) < 0 < F(a, b + \epsilon)$ και η F είναι συνεχής, μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $F(x, y) < 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a, b - \epsilon)$ και $F(x, y) > 0$ αν $(x, y) \in B_\delta(a, b + \epsilon)$. Ειδικότερα, για κάθε $x \in X \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε $F(x, b - \epsilon) < 0 < F(x, b + \epsilon)$, πράγμα που σημαίνει ότι $b - \epsilon < f(x) < b + \epsilon$, αφού, από την επιλογή των Y , X και τον ορισμό της f στο Βήμα 1, το $f(x)$ είναι το μοναδικό σημείο y στο Y με την ιδιότητα $F(x, y') < 0 < F(x, y'') \Leftrightarrow y' < y < y''$.

Βήμα 3. Έστω $a \in X$ και έστω $x \in X$ με $x \neq a$. Παρατηρείστε ότι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a, f(a))$ και $\mathbf{x} = (x, f(x))$ είναι όλο εντός του $X \times Y$ και άρα εντός του A . Επειδή η F είναι C^1 είναι και παραγωγίσιμη και άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, θα υπάρχει $\xi \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$F(x, f(x)) - F(a, f(a)) = F_x(\xi)(x - a) + F_y(\xi)(f(x) - f(a))$$

Επειδή $F(x, f(x)) = F(a, f(a)) = 0$ έπεται ότι

$$F_x(\xi)(x - a) + F_y(\xi)(f(x) - f(a)) = 0$$

Επειδή $\xi \in X \times Y \subseteq B_\delta(x_0, y_0)$ (δες Βήμα 1), $F_y(\xi) > 0$. Ειδικότερα, $F_y(\xi) \neq 0$ και άρα

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)}$$

Λόγω συνέχειας της f , $\lim_{x \rightarrow a}(x, f(x)) = (a, f(a))$. Επειδή $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ με $0 < |\xi_1 - a| < |x - a|$ και $0 < |\xi_2 - f(a)| < |f(x) - f(a)|$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow a} \xi = (a, f(a))$ και άρα

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\lim_{x \rightarrow a} \frac{F_x(\xi)}{F_y(\xi)} = -\frac{F_x(a, f(a))}{F_y(a, f(a))}.$$

□

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.1. (1) Ένα απλό παράδειγμα που επιβεβαιώνει την συνθήκη $F_y(x, y) \neq 0$ για να λύνεται η F ως προς y συναρτήσει του x , είναι η εξίσωση $F(x, y) = ax + by + c = 0$, που είδαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου. Πράγματι, η F λύνεται ως προς y συναρτήσει του x αν $b = F_y(x, y) \neq 0$.

(2) Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο Θεώρημα 5.21 είναι μοναδική. Η επίλυση $y = f(x)$ είναι τοπική στο (x_0, y_0) δηλαδή υπάρχει μια περιοχή X του x_0 και μια περιοχή Y του y_0 , όπου η $F(x, y) = 0$ λύνεται ως προς y συναρτήσει του x . Εν γένει όμως μπορεί για κάποια ή και για όλα τα $x \in X$ να υπάρχουν και άλλα y που δεν ανήκουν στο Y αλλά είναι τέτοια ώστε $F(x, y) = 0$. Πχ. αν $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ τότε για $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $X = (-1, 1)$ και $Y = (0, 2)$ έχουμε $F(x, +\sqrt{1-x^2}) = 0$ για κάθε $x \in X$ (εδώ $f(x) = +\sqrt{1-x^2}$), ενώ για $Y = (-2, 0)$, $F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$, πάλι για κάθε $x \in X$ (και άρα $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$).

(3) Η συνάρτηση $f : X \rightarrow Y$ συνήθως δεν δίνεται από κάποιον κλειστό τύπο. Αυτό που γνωρίζουμε για την f είναι ότι είναι⁵ κλάσης C^1 και επιπλέον η $f'(x)$ δίνεται από τον τύπο (5.46).

Άμεση είναι η παρακάτω σημαντική γεωμετρική συνέπεια.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.22. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Θέτουμε

$$C = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (5.48)$$

Τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in C$ με $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 και ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 τέτοια ώστε αν $\Pi = X \times Y$ είναι το ανοικτό ορθογώνιο με κέντρο το (x_0, y_0) και με πλευρές παράλληλες και ίσες με τα X και Y τότε το $C \cap \Pi$ είναι η γραφική παράσταση μιας μοναδικής C^1 συνάρτησης $f : X \rightarrow Y$.

Ισχύουν ανάλογα αποτελέσματα αν υποθέσουμε ότι $F_x(x_0, y_0) \neq 0$. Πιο συγκεκριμένα, από το Θεώρημα 5.23 και με εναλλαγή των x και y έχουμε το εξής.

⁵Γενικότερα, αποδεικνύεται ότι αν $F \in C^k(A)$ τότε και η f είναι $C^k(X)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.23. (Θεώρημα της Πεπλεγμένης Συνάρτησης II) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό, $F \in C^1(A)$ και $(x_0, y_0) \in A$. Αν

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{και} \quad F_x(x_0, y_0) \neq 0 \quad (5.49)$$

τότε υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 και ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 τέτοια ώστε για κάθε $y \in Y$ η εξίσωση $F(x, y) = 0$ έχει μία μοναδική λύση ως προς x .

Με άλλα λόγια υπάρχει μια μοναδική συνάρτηση $g : Y \rightarrow X$ τέτοια ώστε για κάθε $y \in Y$ και κάθε $x \in X$:

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \quad (5.50)$$

Επιπλέον, η συνάρτηση g είναι C^1 (δηλαδή έχει συνεχή παράγωγο στο X) και ισχύει ο τύπος

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad (5.51)$$

για κάθε $x \in X$. Ειδικότερα

$$g'(y_0) = -\frac{F_y(x_0, y_0)}{F_x(x_0, y_0)} \quad (5.52)$$

Ανάλογο εδώ είναι και το γεωμετρικό συμπέρασμα.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.24. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Θέτουμε

$$C = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (5.53)$$

Τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in C$ με $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 και ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 τέτοια ώστε αν $\Pi = X \times Y$ είναι το ανοικτό ορθογώνιο με κέντρο το (x_0, y_0) και με πλευρές παράλληλες και ίσες με τα X και Y τότε το $C \cap \Pi$ είναι η γραφική παράσταση μιας μοναδικής C^1 συνάρτησης $g : Y \rightarrow X$.

Τα πορίσματα 5.22 και 5.24 δίνουν άμεσα το εξής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.25. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, ανοικτό και $F \in C^1(A)$. Θέτουμε

$$C = \{(x, y) \in A : F(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2 \quad (5.54)$$

Τότε για κάθε $(x_0, y_0) \in C$ με $\nabla F(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ υπάρχουν (α) ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 και (β) ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το y_0 , τέτοια ώστε αν $\Pi = X \times Y$ είναι το ανοικτό ορθογώνιο με κέντρο το (x_0, y_0) και με πλευρές παράλληλες και ίσες με τα X και Y , τότε το $C \cap \Pi$ είναι η γραφική παράσταση μιας C^1 συνάρτησης από το X στο Y ή από το Y στο X .

Μια άλλη συνέπεια του Θεωρήματος 5.23 είναι και το επόμενο θεώρημα γνωστό από την Ανάλυση πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.26. (Θεώρημα Αντίστροφης Συνάρτησης) Έστω μια C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $x_0 \in I$ με $f'(x_0) \neq 0$ τότε υπάρχουν (α) ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 (β) ένα ανοικτό διάστημα $Y =$

$(y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το $y_0 = f(x_0)$ και (γ) μια C^1 συνάρτηση $g : Y \rightarrow X$ με την ιδιότητα για κάθε $y \in Y$ και κάθε $x \in X$

$$y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x.$$

Με άλλα λόγια η $g : Y \rightarrow X$ είναι η αντίστροφη του περιορισμού της f στο X . Επιπλέον η g είναι και αυτή C^1 και για κάθε $y \in Y$ αν x είναι το μοναδικό στοιχείο του X με $x = g(y)$ (ισοδύναμα $y = f(x)$) τότε

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (5.55)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση δύο μεταβλητών με τύπο

$$F(x, y) = f(x) - y$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Παρατηρήστε ότι $F(x_0, y_0) = 0$ και $F_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$. Άρα από το Θεώρημα 5.23, υπάρχουν (α) ένα ανοικτό διάστημα $X = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1)$ με κέντρο το x_0 και (β) ένα ανοικτό διάστημα $Y = (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$ με κέντρο το $y_0 = f(x_0)$ και (γ) μια C^1 συνάρτηση $g : Y \rightarrow X$ με την ιδιότητα για κάθε $y \in Y$ και κάθε $x \in X$

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = x$$

ή ισοδύναμα (από τον ορισμό της F),

$$y = f(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

Άρα η $g : Y \rightarrow X$ είναι η αντίστροφη της $f : X \rightarrow Y$. Επιπλέον, από την (5.52), για κάθε $y \in Y$ έχουμε

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} = -\frac{-1}{f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}.$$

□

9. Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης και το Θεώρημα Schwarz

Προχωρούμε τώρα στον ορισμό των δεύτερης τάξης μερικών παραγώγων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.27. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A με την ιδιότητα οι f_x, f_y να υπάρχουν τουλάχιστον σε μια περιοχή του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων f_x, f_y ως προς x και y στο σημείο (x_0, y_0) (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0)** .

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x_0, y_0) &= (f_x)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_x(x, y_0) - f_x(x_0, y_0)}{x - x_0}, \\ f_{xy}(x_0, y_0) &= (f_x)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_x(x_0, y) - f_x(x_0, y_0)}{y - y_0} \\ f_{yx}(x_0, y_0) &= (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_y(x, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

$$f_{yy}(x_0, y_0) = (f_y)_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f_y(x_0, y) - f_y(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

Επίσης χρησιμοποιούνται και οι επόμενοι συμβολισμοί

$$f_{xx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0), \quad f_{xy}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0), \quad f_{yy}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yx}(x_0, y_0)$ και $f_{yy}(x_0, y_0)$ είναι οι μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0) δεύτερης τάξης. Ειδικότερα, οι $f_{xy}(x_0, y_0)$ και $f_{yx}(x_0, y_0)$ καλούνται **μεικτές** μερικές παράγωγοι της f στο σημείο (x_0, y_0) δεύτερης τάξης.

Με τον παραπάνω τρόπο ορίζονται οι συναρτήσεις f_{xx} , f_{xy} , f_{yx} , f_{yy} στα κατάλληλα σύνολα των σημείων (x, y) του A όπου οι τιμές $f_{xx}(x, y)$, $f_{xy}(x, y)$, $f_{yx}(x, y)$, $f_{yy}(x, y)$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.12. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$. Για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε $f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy + y^2$, $f_y(x, y) = 3y^2 + x^2 + 2xy$ και

$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= (f_x)_x(x, y) = 6x + 2y, & f_{xy}(x, y) &= (f_x)_y(x, y) = 2x + 2y, \\ f_{yx}(x, y) &= (f_y)_x(x, y) = 2x + 2y & f_{yy}(x, y) &= (f_y)_y(x, y) = 6y + 2x. \end{aligned}$$

Στο παραπάνω παράδειγμα οι μεικτές μερικές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} είναι ίσες. Αυτό δεν είναι τυχαίο διότι για την συνάρτηση του παραπάνω παραδείγματος ισχύουν οι υποθέσεις του ακόλουθου θεωρήματος του Schwarz.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.28. (Schwarz) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι οι μερικές παράγωγοι f_x , f_y και f_{xy} υπάρχουν σε μια περιοχή του (x_0, y_0) και η f_{xy} είναι συνεχής στο (x_0, y_0) . Τότε υπάρχει και η $f_{yx}(x_0, y_0)$ και ισχύει ότι $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Απο τους ορισμούς των μικτών παραγώγων έχουμε

$$f_{yx}(x_0, y_0) = (f_y)_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} \quad (5.56)$$

Επειδή για κάθε $h \neq 0$,

$$f_y(x_0 + h, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} \quad (5.57)$$

και

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad (5.58)$$

αντικαθιστώντας τις (5.57) και (5.58) στην (5.56), παίρνουμε ότι η $f_{yx}(x_0, y_0)$ ισούται με το παρακάτω διπλό όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{hk} \right) \quad (5.59)$$

Για κάθε $h, k \neq 0$ ορίζουμε τώρα το κλειστό ορθογώνιο

$$R(h, k) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_0 \leq x \leq x_0 + h, y_0 \leq y \leq y_0 + k\}$$

με κορυφές τα σημεία $(x_0, y_0), (x_0, y_0 + k), (x_0 + h, y_0), (x_0 + h, y_0 + k)$ και έστω

$$\Delta(f, R(h, k)) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.59) έχουμε ότι

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} \right). \quad (5.60)$$

Ο επόμενος ισχυρισμός αποτελεί μια διδιάστατη εκδοχή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ 5.29. Έστω $h, k \neq 0$. Αν οι μερικές παράγωγοι f_x και f_{xy} υπάρχουν σε κάθε σημείο (εσωτερικό και συνοριακό) του $R(h, k)$ τότε υπάρχουν $\eta = \eta(h, k)$ και $\xi = \xi(h, k)$ με $x_0 < \eta < x_0 + h$ και $y_0 < \xi < y_0 + k$ τέτοια ώστε

$$\frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} = f_{xy}(\eta(h, k), \xi(h, k)). \quad (5.61)$$

Δεχόμενοι τον παραπάνω Ισχυρισμό 5.29 ως δούμε πως προκύπτει η ζητούμενη σχέση $f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Απο την συνέχεια της f_{xy} στο (x_0, y_0) έχουμε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για οποιοδήποτε $(x, y) \in A$

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f_{xy}(x, y) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon/2$$

Συνεπώς απο την (5.61) παίρνουμε ότι για h, k με $|h|, |k| < \delta/2$ ισχύει ότι ⁶

$$\left| \frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| = |f_{xy}(\eta(h, k), \xi(h, k)) - f_{xy}(x_0, y_0)| < \varepsilon/2. \quad (5.62)$$

Από την ύπαρξη της $f_y(x, y)$ για σημεία (x, y) αρκετά κοντά στο (x_0, y_0) και απο τον ορισμό του $\Delta(f, R(h, k))$ έπεται ότι για κάθε $h \neq 0$, το $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk}$ ισούται με

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)}{k} \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0)}{k} - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \right) \\ &= \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Απο την (5.62) έχουμε τώρα ότι για κάθε $h \neq 0$ με $|h| < \delta/2$

$$\left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\Delta(f, R(h, k))}{hk} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon \quad (5.64)$$

που απο την (5.63) σημαίνει ότι,

$$\left| \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} - f_{xy}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon. \quad (5.65)$$

⁶αφού $x_0 < \eta < x_0 + h$ και $y_0 < \xi < y_0 + k$ και άρα αν $x = \eta(h, k)$ και $y = \xi(h, k)$ τότε $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \|x - x_0, y - y_0\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \sqrt{h^2 + k^2} < \delta$.

Απο τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta' = \delta/2 > 0$ ώστε να ισχύει η (5.65) για κάθε $h \neq 0$ με $|h| < \delta'$. Με άλλα λόγια

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(x_0 + h, y_0) - f_y(x_0, y_0)}{h} = f_{xy}(x_0, y_0)$$

ή ισοδύναμα

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0).$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ 5.29. Ορίζουμε την συνάρτηση $\Delta(x) : [x_0, x_0 + h] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\Delta(x) = f(x, y_0 + k) - f(x, y_0).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Delta(f, R) = \Delta(x_0 + h) - \Delta(x_0). \quad (5.66)$$

Επίσης η συνάρτηση Δ είναι παραγωγίσιμη με⁷

$$\Delta'(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0) \quad \text{για κάθε } x \in [x_0, x_0 + h]. \quad (5.67)$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση $\Delta(x)$ έχουμε ότι

$$\Delta(f, R) = \Delta(x_0 + h) - \Delta(x_0) = h\Delta'(\eta) \stackrel{(5.67)}{=} h(f_x(\eta, y_0 + k) - f_x(\eta, y_0)) \quad (5.68)$$

για κάποιο $\eta \in (x_0, x_0 + h)$.

Ορίζουμε τώρα $g : [y_0, y_0 + k] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(y) = f_x(\eta, y)$$

. Παρατηρούμε ότι η g είναι παραγωγίσιμη με⁸

$$g'(y) = f_{xy}(\eta, y) \quad \text{για κάθε } y \in [y_0, y_0 + k] \quad (5.69)$$

Άρα απο το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την συνάρτηση g , έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (y_0, y_0 + k)$ τέτοιο ώστε

$$f_x(\eta, y_0 + k) - f_x(\eta, y_0) = g(y_0 + k) - g(y_0) = kg'(\xi) \stackrel{(5.69)}{=} kf_{xy}(\eta, \xi). \quad (5.70)$$

Αντικαθιστώντας στην (5.68) προκύπτει το ζητούμενο του Ισχυρισμού. $\square$

Η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Συνήθως το Θεώρημα 5.28 εφαρμόζεται με την παρακάτω (ασθενέστερη) μορφή.

⁷Πράγματι, θέτουμε $g_1(x) = f(x, y_0 + k)$ και $g_2(x) = f(x, y_0)$, $x \in [x_0, x_0 + h]$. Τότε $\Delta(x) = g_1(x) - g_2(x)$. Είναι

$$g'_1(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_1(x+t) - g_1(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y_0+k) - f(x, y_0+k)}{t} = f_x(x, y_0+k)$$

και ομοίως

$$g'_2(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_2(x+t) - g_2(x)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t, y_0) - f(x, y_0)}{t} = f_x(x, y_0).$$

Άρα $\Delta'(x) = g'_1(x) - g'_2(x) = f_x(x, y_0 + k) - f_x(x, y_0)$.

⁸Πράγματι

$$g'(y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(y+t) - g(y)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_x(\eta, y+t) - f_x(\eta, y)}{t} = (f_x)_y(\eta, y) = f_{xy}(\eta, y).$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.30. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς. Τότε οι μεικτές παράγωγοι f_{xy} και f_{yx} της f ταυτίζονται.

Όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου οι υποθέσεις του Θεωρήματος Schwarz δεν ικανοποιούνται.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.13. (**Παράδειγμα συνάρτησης για την οποία $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$**) Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0,0) = 0$ και

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

αν $(x,y) \neq (0,0)$. Δείξτε ότι $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Λύση: Έχουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f_x(0,y) - f_x(0,0)}{y} \quad (5.71)$$

και

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_y(x,0) - f_y(0,0)}{x}. \quad (5.72)$$

Πρέπει συνεπώς να υπολογίσουμε τις $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_x(0,y)$ και $f_y(x,0)$. Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε

$$f_x(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

Για το σημείο $(0,y)$, με $y \neq 0$,

$$f_x(0,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = -y$$

και τέλος για το $(x,0)$ με $x \neq 0$,

$$f_y(x,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x,y) - f(x,0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} - 0}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} = x$$

Αντικαθιστώντας στις (5.71) και (5.72) παίρνουμε

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y - 0}{y} = -1$$

ενώ

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0}{x} = 1.$$

10. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) εσωτερικό σημείο του A και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και δεύτερης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) . Οι μερικές παράγωγοι $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Ακολουθώντας αντίστοιχο συμβολισμό με αυτόν των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης, συμβολίζουμε τις τρίτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο (x_0, y_0) ως εξής:

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} (x_0, y_0) \\ f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} (x_0, y_0) \\ f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} (x_0, y_0) \\ f_{yxx}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{yxy}(x_0, y_0) &= (f_{yx})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} (x_0, y_0) \\ f_{yyx}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_x(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} (x_0, y_0) \\ f_{yyy}(x_0, y_0) &= (f_{yy})_y(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} (x_0, y_0) \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.3. Παρατηρείστε ότι

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_x)_{xx}(x_0, y_0) & f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_x)_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_x)_{yx}(x_0, y_0) & f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_x)_{yy}(x_0, y_0) \\ f_{yxx}(x_0, y_0) &= (f_y)_{xx}(x_0, y_0) & f_{yxxy}(x_0, y_0) &= (f_y)_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yyx}(x_0, y_0) &= (f_y)_{yx}(x_0, y_0) & f_{yyy}(x_0, y_0) &= (f_y)_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} f_{xxx}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_x(x_0, y_0) = ((f_x)_x)_x(x_0, y_0) = (f_x)_{xx}(x_0, y_0) \\ f_{xxy}(x_0, y_0) &= (f_{xx})_y(x_0, y_0) = ((f_x)_x)_y(x_0, y_0) = (f_x)_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xyx}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_x(x_0, y_0) = ((f_x)_y)_x(x_0, y_0) = (f_x)_{yx}(x_0, y_0) \\ f_{xyy}(x_0, y_0) &= (f_{xy})_y(x_0, y_0) = ((f_x)_y)_y(x_0, y_0) = (f_x)_{yy}(x_0, y_0) \dots \kappa.ο.κ. \end{aligned}$$

Αν τώρα οι μερικές παράγωγοι της f έως και τρίτης τάξης υπάρχουν στα σημεία μιας περιοχής του (x_0, y_0) τότε οι μερικές τους παράγωγοι στο σημείο (x_0, y_0) ως προς x και y (εφόσον υπάρχουν) καλούνται **τέταρτης τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο (x_0, y_0)** . Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να ορίσουμε τις n -τάξης μερικές παραγώγους της f στο σημείο (x_0, y_0) .

Το Πόρισμα 5.30 γενικεύεται ως εξής.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.31. Έστω $n \geq 2$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε οι μερικές παράγωγοι της f έως και n -τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του A και είναι συνεχείς (συμβολικά $f \in C^n(A)$). Τότε όλες οι μεικτές παράγωγοι που περιέχουν τις ίδιες παραγωγίσεις με διαφορετική σειρά είναι ίσες.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για $n = 2$ το θεώρημα ταυτίζεται με το Πόρισμα 5.30. Για $n = 3$, έχουμε

$$f_{xyx} = (f_x)_{yx} = (f_x)_{xy} = f_{xxy}$$

$$f_{yxx} = (f_{yx})_x = (f_{xy})_x = f_{xyx}$$

$$f_{yxy} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}$$

$$f_{yyx} = (f_y)_{yx} = (f_y)_{xy} = f_{yyx} = (f_{yx})_y = (f_{xy})_y = f_{xyy}$$

Γενικά έστω ότι το θεώρημα ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$. Έστω $f_{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}}$, όπου $x_i \in \{x, y\}$ μια μεικτή μερική παράγωγος της f τάξης $n+1$. Θέτουμε r να είναι το πλήθος των $i \in \{1, \dots, n+1\}$ με $x_i = x$ και s το πλήθος των $i \in \{1, \dots, n+1\}$ με $x_i = y$. Έχουμε $r, s \neq 0$ και $r + s = n + 1$. Θα δείξουμε ότι

$$f_{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}} = \underbrace{f_{x \dots x}}_r \underbrace{y \dots y}_s.$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για το x_{n+1} .

Περίπτωση 1: $x_{n+1} = x$. Τότε

$$\begin{aligned} f_{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}} &= f_{x_1 x_2 \dots x_n x} = (f_{x_1 x_2 \dots x_n})_x \stackrel{(*)}{=} (\underbrace{f_{x \dots x}}_{r-1} \underbrace{y \dots y}_s)_x \\ &= (\underbrace{f_{x \dots x}}_{r-1} \underbrace{y \dots y}_{s-1})_{yx} \\ &= (\underbrace{f_{x \dots x}}_{r-1} \underbrace{y \dots y}_{s-1})_{xy} \\ &= (\underbrace{f_{x \dots x}}_{r-1} \underbrace{y \dots y x}_{s-1})_y \\ &\stackrel{(*)}{=} (\underbrace{f_{x \dots x}}_r \underbrace{y \dots y}_{s-1})_y = \underbrace{f_{x \dots x}}_r \underbrace{y \dots y}_s \end{aligned}$$

όπου η $(*)$ ισχύει από την επαγωγική μας υπόθεση.

Περίπτωση 2: $x_{n+1} = y$. Τότε ομοίως

$$f_{x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1}} = f_{x_1 x_2 \dots x_n y} = (f_{x_1 x_2 \dots x_n})_y = (\underbrace{f_{x \dots x}}_r \underbrace{y \dots y}_{s-1})_y = (\underbrace{f_{x \dots x}}_r \underbrace{y \dots y}_s)$$

Απο τα παραπάνω η απόδειξη του θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί. $\square$

11. Τα Θεωρήματα Taylor για δύο μεταβλητές

11.1. Θεωρήματα Taylor για μια μεταβλητή. Ας θυμηθούμε εδώ τα δύο θεωρήματα Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής πριν προχωρήσουμε στην γενίκευσή τους.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.32. (Τύπος Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $m \geq 0$ ακέραιος και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ (I διάστημα του $\mathbb{R}$) $m+1$ -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω επίσης $a \in I$. Τότε για κάθε $h \neq 0$ με $a + h \in I$ υπάρχει σημείο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και $a + h$ τέτοιο ώστε

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} h^{m+1}. \quad (5.73)$$

Το πολυώνυμο

$$T_m(x) = f(a) + \sum_{k=1}^m \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k \quad (5.74)$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το a** . Ο τύπος (5.73) γράφεται και ως εξής: Για κάθε $x \in I$,

$$f(x) = T_m(x) + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - a)^{m+1} \quad (5.75)$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x .

Προφανώς, $T_m(a) = f(a)$. Αν $x \in I$ ένα διαφορετικό από το a σημείο του I , τότε η εξίσωση (5.75) μας λέει ότι η διαφορά $f(x) - T_m(x)$ γράφεται

$$f(x) - T_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x - a)^{m+1} \quad (5.76)$$

για κάποιο ξ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x .

Θα ήταν πολύ χρήσιμο να ξέραμε αν η διαφορά $f(x) - T_m(x)$ για τα $x \in I$ είναι σε απόλυτη τιμή μεγάλη ή μικρή. Όπως φαίνεται από τον τύπο (5.76) η διαφορά αυτή μπορεί να είναι μεγάλη κατά απόλυτη τιμή όταν το x είναι μακριά από το a . Τι γίνεται όμως όταν το x είναι κοντά στο a ; Από τον τύπο (5.76) δεν μπορούμε να βγάλουμε εύκολα συμπέρασμα για το μέγεθος του $|f(x) - T_m(x)|$ λόγω του ότι το ξ εξαρτάται με έναν άγνωστο τρόπο από το x και εν γένει η $f^{(m+1)}$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα a και x μπορεί να παίρνει πολύ μεγάλες τιμές. Το δεύτερο Θεώρημα Taylor απαντά ακριβώς σε αυτό το ερώτημα και λέει ότι όντως το $f(x)$ θα είναι περίπου το $T_m(x)$ όταν το x είναι αρκετά κοντά στο κέντρο a του πολυωνύμου. Μάλιστα λέει κάτι πολύ ισχυρότερο και συγκεκριμενόμενο, ότι δηλαδή αν η f είναι m -φορές παραγωγίσιμη τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$|x - a| < \delta \implies |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon |x - a|^m. \quad (5.77)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.33. (Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $m \geq 1$ ακέραιος και $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ m -φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ και έστω $T_m(x)$ το πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το a . Τότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_m(x)}{(x - a)^m} = 0. \quad (5.78)$$

Με άλλα λόγια αν θέσουμε

$$R_m(x) = f(x) - T_m(x) \quad (5.79)$$

τότε

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0. \quad (5.80)$$

11.2. Το διώνυμο του Νεύτωνα. Πριν προχωρήσουμε καλό είναι να θυμηθούμε στο σημείο αυτό και τα εξής.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.34. Έστω $k \geq 0$ ακέραιος και $j = 0, \dots, k$. Θέτουμε

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!} \quad (5.81)$$

Πχ.

$$\binom{k}{0} = 1, \binom{k}{k} = 1, \binom{k}{1} = k, \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.4. Μπορεί ναδειχθεί ότι ο αριθμός $\binom{k}{j}$ ισούται με το πλήθος όλων των “ j -συνδυασμών από k -στοιχεία” με άλλα λόγια ισούται με το πλήθος όλων των j -υποσυνόλων⁹ του $\{1, \dots, k\}$.

Με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$ αποδεικνύεται η παρακάτω διάσημη ταυτότητα.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.35. (**Διώνυμο του Νεύτωνα**) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ και $k \geq 0$ ακέραιος. Τότε

$$(a+b)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} \quad (5.82)$$

Πχ. οι ταυτότητες

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

είναι ειδικές μορφές του διωνύμου του Νεύτωνα για $k=2$ και $k=3$ αντίστοιχα.

Παρατηρείστε επίσης ότι για $a=b=1$ η (5.82) δίνει ότι

$$\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} = 2^k \quad (5.83)$$

που ως γνωστόν είναι το πλήθος όλων των υποσυνόλων του $\{1, \dots, k\}$.

⁹(δηλαδή αυτών των υποσυνόλων του $\{1, \dots, k\}$ που αποτελούνται από j στοιχεία.

11.3. Βασικά εργαλεία. Στην παράγραφο αυτή θα παρουσιάσουμε τα εργαλεία που χρειάζονται για την επέκταση των Θεωρημάτων Taylor σε πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.36. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ (όχι αναγκαστικά μοναδιαίο) τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + t\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A . Για κάθε $t \in [0, 1]$, ορίζουμε

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2). \quad (5.84)$$

Αν η $f \in C^2(A)$ τότε η F είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$F'(t) = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2 \quad (5.85)$$

και

$$F''(t) = f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2^2. \quad (5.86)$$

για όλα τα $t \in [0, 1]$. Ειδικότερα για $t = 0$ έχουμε

$$F'(0) = f_x(\mathbf{a})h_1 + f_y(\mathbf{a})h_2 \quad (5.87)$$

και

$$F''(0) = f_{xx}(\mathbf{a})h_1^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})h_1h_2 + f_{yy}(\mathbf{a})h_2^2. \quad (5.88)$$

για όλα τα $m = 1, \dots, k$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θετούμε $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{h} = (a_1 + th_1, a_2 + th_2)$, $t \in [0, 1]$. Όπως έχουμε δει η $\mathbf{r}$ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $t \in [0, 1]$ και το εφαπτόμενο διάνυσμα της σε κάθε $t \in [0, 1]$ είναι το $\mathbf{r}'(t) = (h_1, h_2) = \mathbf{h}$.

(i) Απο τον κανόνα αλυσίδας έχουμε

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 = f_x(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_y(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2$$

(ii) Έχουμε

$$\begin{aligned} F''(t) &= (F')'(t) = \left(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 + f_y(\mathbf{r}(t))h_2 \right)' \\ &= \left(f_x(\mathbf{r}(t))h_1 \right)' + \left(f_y(\mathbf{r}(t))h_2 \right)' \\ &= \left(f_x(\mathbf{r}(t)) \right)' h_1 + \left(f_y(\mathbf{r}(t)) \right)' h_2 \end{aligned} \quad (5.89)$$

Εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_x(x, y)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left(f_x(\mathbf{r}(t)) \right)' &= \nabla f_x(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\ &= (f_x)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_x)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\ &= f_{xx}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2 \end{aligned}$$

Ομοίως εφαρμόζοντας τον κανόνα αλυσίδας για την συνάρτηση $f_y(x, y)$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $f_{xy} = f_{yx}$ (λόγω συνέχειας των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης),

έχουμε

$$\begin{aligned}
 \left(f_y(\mathbf{r}(t)) \right)' &= \nabla f_y(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) \\
 &= (f_y)_x(\mathbf{r}(t))h_1 + (f_y)_y(\mathbf{r}(t))h_2 \\
 &= f_{yx}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\
 &= f_{xy}(\mathbf{r}(t))h_1 + f_{yy}(\mathbf{r}(t))h_2 \\
 &= f_{xy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_1 + f_{yy}(\mathbf{a} + t\mathbf{h})h_2.
 \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (5.89) προκύπτει άμεσα η (5.86). $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.5. Όταν το διάνυσμα $\mathbf{h}$ είναι μοναδιαίο τότε από τις (5.85) και (5.12) βλέπουμε ότι η $F'(0)$ ισούται με την $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}}(\mathbf{a})$ της f στο $\mathbf{a}$ δηλαδή την παράγωγο της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$. Υπο αυτή την σκοπιά η δεύτερη παράγωγος $F''(0)$ μπορεί να θεωρηθεί ως **δεύτερης τάξης παράγωγος της f στο $\mathbf{a}$ κατά την κατεύθυνση $\mathbf{h}$** . Πχ. θυμηθείτε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{a})$$

και από την (5.88) για $\mathbf{h} = \mathbf{e}_1$ παίρνουμε ότι

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}).$$

Η Πρόταση 5.36 γενικεύεται και για ανώτερης τάξης παραγώγους. Για να διατυπώσουμε την γενική μορφή της είναι χρήσιμο να εισάγουμε τον παρακάτω συμβολισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.37. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $k \geq 1$, $f \in C^k(A)$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
 \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)}(x, y) &= \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x, y) h_1^j h_2^{k-j} \\
 &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} \frac{\partial^k f}{\partial x^j \partial y^{k-j}}(x, y) h_1^j h_2^{k-j}
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

για κάθε $(x, y) \in A$.

Παρατηρείστε ότι για $k = 1, 2, 3$ η (5.90) παίρνει αντίστοιχα τις μορφές

$$\begin{aligned}
 \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right](x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) h_2 \\
 \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(2)}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) h_2^2 \\
 \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(3)}(x, y) &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y) h_1^3 \\
 &\quad + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) h_1^2 h_2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y) h_1 h_2^2 \\
 &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y) h_2^3.
 \end{aligned}$$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να διατυπώσουμε την γενική μορφή της Πρότασης 5.36.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.38. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ εσωτερικό σημείο του A και $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε το ευθύγραμμο τμήμα $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + t\mathbf{h}]$ να περιέχεται στο A . Για κάθε $t \in [0, 1]$, ορίζουμε

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2). \quad (5.91)$$

Αν $f \in C^m(A)$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$ τότε η F είναι m -φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι

$$F^{(k)}(t) = \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)} (\mathbf{a} + t\mathbf{h}) \quad (5.92)$$

για όλα τα $t \in [0, 1]$ και όλα τα $k = 1, \dots, m$. Ειδικότερα για $t = 0$ έχουμε

$$F^{(k)}(0) = \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)} (\mathbf{a}) \quad (5.93)$$

για όλα τα $k = 1, \dots, m$.

Η απόδειξη της Πρότασης 5.38 γίνεται με επαγωγή και ανάλογα με απόδειξη της Πρότασης 5.36.

5.4.5. Τα Θεωρήματα Taylor για δύο μεταβλητές.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.39. (Τύπος Taylor για δύο μεταβλητές) Έστω $m \geq 0$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^{m+1}(A)$ (δηλαδή $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και $m+1$ -τάξης). Έστω $\mathbf{a} \in A$ και $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{h}] \subseteq A$. Τότε υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{a}) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)} (\mathbf{a}) \\ &\quad + \frac{1}{(m+1)!} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m+1)} (\mathbf{a} + \xi\mathbf{h}). \end{aligned} \quad (5.94)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}), \quad t \in [0, 1]$$

Αφού $f \in C^{m+1}(A)$ από την Πρόταση 5.38 έχουμε ότι η F είναι $m+1$ -φορές παραγωγίσιμη. Από τον Τύπο του Taylor για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής (Θεώρημα 5.32 για $a = 0$) έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^m \frac{F^{(k)}(0)}{k!} + \frac{F^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \quad (5.95)$$

Επειδή $F(0) = f(\mathbf{a})$, $F(1) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h})$,

$$F^{(k)}(0) \stackrel{(5.93)}{=} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)} (\mathbf{a})$$

και

$$F^{(m+1)}(\xi) \stackrel{(5.92)}{=} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m+1)} (\mathbf{a} + \xi\mathbf{h})$$

η εξίσωση (5.95) ταυτίζεται με την (5.94). □

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.40. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^m(A)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $m \geq 1$ ακέραιος. Το πολυώνυμο

$$T_m(x, y) = f(a_1, a_2) + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(k)} (a_1, a_2) \quad (5.96)$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$** .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.6. Το Θεώρημα 5.39 λέει ότι για κάθε $\mathbf{x} = (x, y) \in A$ με $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] \subseteq A$ υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in (\mathbf{a}, \mathbf{x})$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_m(x, y) + \frac{1}{(m+1)!} \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m+1)} (\xi_1, \xi_2) \quad (5.97)$$

Παρατηρείστε επίσης ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$T_1(x, y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2).$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2) \\ &+ \frac{1}{2!} [f_{xx}(\mathbf{a})(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(\mathbf{a})(y - a_2)^2]. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{3x+2y}$. Για $m = 1, 2$ υπολογίστε τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$.

Λύση: Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$f_x(x, y) = 3e^{3x+2y}, \quad f_y(x, y) = 2e^{3x+2y}$$

και

$$f_{xx}(x, y) = (f_x)_x(x, y) = 9e^{3x+2y}, \quad f_{xy}(x, y) = (f_x)_y(x, y) = 6e^{3x+2y}$$

$$f_{yx}(x, y) = (f_y)_x(x, y) = 6e^{3x+2y}, \quad f_{yy}(x, y) = (f_y)_y(x, y) = 4e^{3x+2y}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Επίσης βλέπουμε ότι

$$f_x(0, 1) = 3e^2, \quad f_y(0, 1) = 2e^2$$

και

$$f_{xx}(0, 1) = 9e^2, \quad f_{xy}(0, 1) = f_{yx}(0, 1) = 6e^2, \quad f_{yy}(0, 1) = 4e^2.$$

Άρα το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f με κέντρο το $(a_1, a_2) = (0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &= -e^2 + 3e^2x + 2e^2y. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα το πολυώνυμο Taylor δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 1)$ είναι το

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 1) + f_x(0, 1)x + f_y(0, 1)(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 1)x^2 + 2f_{xy}(0, 1)x(y - 1) + f_{yy}(0, 1)(y - 1)^2] \\ &= e^2 + 3e^2x + 2e^2(y - 1) \\ &\quad + \frac{1}{2!} [9e^2x^2 + 12e^2x(y - 1) + 4e^2(y - 1)^2] \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.15. Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = f_{xy}(x, y) = 2$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, δείξτε ότι η f είναι η συνάρτηση $f(x, y) = (x + y)^2$.

Λύση: Έστω $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x, y) \neq (0, 0)$. Από τον Τύπο του Taylor, για $m = 1$ και $(a_1, a_2) = (0, 0)$ έχουμε ότι υπάρχει (ξ_1, ξ_2) στο ανοικτό ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0, 0)$ και (x, y) τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2} (f_{xx}(\xi_1, \xi_2)x^2 + 2f_{xy}(\xi_1, \xi_2)xy + f_{yy}(\xi_1, \xi_2)y^2) \end{aligned} \quad (5.98)$$

Τώρα από τις υποθέσεις μας έπεται άμεσα ότι

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

Επειδή, για $(x, y) = (0, 0)$ ο παραπάνω τύπος δίνει ότι $f(0, 0) = 0$ έπεται ότι $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.41. (Θεώρημα Taylor για συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^m(A)$ (δηλαδή $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και m -τάξης). Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ και $T_m(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor m -τάξης της f με κέντρο το $\mathbf{a}$. Τότε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{\|(x, y) - (a_1, a_2)\|^m} = 0 \quad (5.99)$$

Με άλλα λόγια για κάθε $(x, y) \in A$, αν θέσουμε

$$R_m(x, y) = f(x, y) - T_m(x, y) \quad (5.100)$$

τότε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{R_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} = 0 \quad (5.101)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.7. Παρατηρείστε ότι για $m = 1$ παίρνουμε

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0 \quad (5.102)$$

όπου

$$T_1(x, y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2)$$

και για $m = 2$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2} = 0 \quad (5.103)$$

όπου

$$T_2(x, y) = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x - a_1) + f_y(\mathbf{a})(y - a_2) + \frac{1}{2!} [f_{xx}(\mathbf{a})(x - a_1)^2 + 2f_{xy}(\mathbf{a})(x - a_1)(y - a_2) + f_{yy}(\mathbf{a})(y - a_2)^2].$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.41 θα χρειαστούμε το εξής λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 5.42. Έστω $m \geq 1$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $\mathbf{h} = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ και $f \in C^m(A)$. Για κάθε $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{x}' = (x', y') \in A$, ορίζουμε

$$\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)}(x', y') - \left[h_1 \frac{\partial f}{\partial x} + h_2 \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)}(x, y) \quad (5.104)$$

και

$$M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y) \right| : 0 \leq j \leq m \right\} \quad (5.105)$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$ ισχύει ότι

$$\left| \Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right| \leq 2^{m/2} M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \|(h_1, h_2)\|^m. \quad (5.106)$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in A$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \left| \Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \right| &= \left| \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') h_1^j h_2^{m-j} - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y) h_1^j h_2^{m-j} \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x', y') - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}}(x, y) \right| |h_1|^j |h_2|^{m-j} \\ &\leq M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} |h_1|^j |h_2|^{m-j} \\ &= M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) (|h_1| + |h_2|)^m \quad (\text{Διώνυμο του Νεύτωνα}) \\ &\leq 2^{m/2} M(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \|(h_1, h_2)\|^m \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα *Cauchy-Schwarz*:

$$|h_1| + |h_2| = (1, 1) \cdot (|h_1|, |h_2|) \leq \|(1, 1)\| \cdot \|(|h_1|, |h_2|)\| = 2^{1/2} \|(h_1, h_2)\|$$

□

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.41. Έστω $m = 1$. Τότε $f \in C^1(A)$ και άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Από τον Χαρακτηρισμό της παραγωγισιμότητας της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (Πόρισμα 5.7) έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - f(a_1, a_2) - f_x(a_1, a_2)(x - a_1) - f_y(a_1, a_2)(y - a_2)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0 \quad (5.107)$$

Επειδή $T_1(x, y) = f(a_1, a_2) + f_x(\xi_1, \xi_2)(x - a_1) + f_y(\xi_1, \xi_2)(y - a_2)$ έχουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{(x - a_1)^2 + (y - a_2)^2}} = 0$$

Υποθέτουμε για την συνέχεια ότι $m \geq 2$. Έστω $(x, y) \in A$ αρκετά κοντά στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ ώστε το ευθ. τμήμα με άκρα τα $\mathbf{x}$ και $\mathbf{a}$ να περιέχεται στο A . Απο τον Τύπο Taylor (για “ $m = m - 1$ ”) (σχέση (5.97)) έχουμε ότι υπάρχει $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ στο ανοικτό διάστημα με άκρα τα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ και $\mathbf{x} = (x, y)$ τέτοιο ώστε

$$f(x, y) = T_{m-1}(x, y) + \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (\xi_1, \xi_2).$$

Από τον Ορισμό του πολωνύμου Taylor παρατηρούμε ότι

$$T_{m-1}(x, y) = T_m(x, y) - \frac{1}{m!} \left[(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x} + (x - a_2) \frac{\partial f}{\partial y} \right]^{(m)} (x, y).$$

Θέτουμε $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ με $h_1 = x - a_1$ και $h_2 = y - a_2$. Απο τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του Λήμματος 5.42 συμπεραίνουμε ότι

$$f(x, y) = T_m(x, y) + \frac{1}{m!} \Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$$

Άρα

$$\left| \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} \right| = \frac{1}{m!} \frac{|\Delta_{\mathbf{h}}^{(m)}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})|}{\|(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2)\|^m} \stackrel{(5.106)}{\leq} \frac{2^{m/2}}{m!} M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (5.108)$$

όπου (εξίσωση (5.105)),

$$M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \max \left\{ \left| \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}} (\xi_1, \xi_2) - \frac{\partial^m f}{\partial x^j \partial y^{m-j}} (x, y) \right| : 0 \leq j \leq m \right\}$$

Απο την συνέχεια των μερικών παραγώγων και επειδή το $\boldsymbol{\xi}$ ανήκει στο $[\mathbf{a}, \mathbf{x}]$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} M(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = 0$$

οπότε απο την (5.108) προκύπτει ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a_1, a_2)} \frac{f(x, y) - T_m(x, y)}{((x - a_1)^2 + (y - a_2)^2)^{m/2}} = 0.$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x, y) = e^{x+y}$. Βρίσκοντας πρώτα τα πολωνύμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ υπολογίστε τα όρια

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

και

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2}.$$

Λύση: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όλες οι μερικές παράγωγοι της f οποιοσδήποτε τάξης ταυτίζονται με την f και συνεπώς όλες οι μερικές παράγωγοι της f στο $(0, 0)$ οποιοσδήποτε τάξης είναι ίσες με το $e^0 = 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης της f με κέντρο το $(0, 0)$ είναι αντίστοιχα τα

$$T_1(x, y) = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 1 + x + y$$

και

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ &\quad + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2!} [x^2 + 2xy + y^2]. \end{aligned}$$

Άρα

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - T_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Επίσης

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - T_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - \frac{1}{2!} [x^2 + 2xy + y^2]}{x^2 + y^2} = \\ \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left[\frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} - \frac{1}{2} \right] = 0 \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{x+y} - 1 - x - y - xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}.$$

12. Τοπικά ακρότατα πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών

12.1. Βασικές έννοιες. Στο Κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε κριτήρια για τοπικά ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών με συνεχείς μερικές παραγώγους έως και δεύτερης τάξης. Αρχίζουμε με τον εξής γενικό ορισμό.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.43. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\mathbf{a} \in A$.

(1) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο **τοπικού μεγίστου** της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **αυστηρού τοπικού μεγίστου**. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **ολικού μεγίστου** της f αν $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{a}) > f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **αυστηρού ολικού μεγίστου**.

(2) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο **τοπικού ελαχίστου** της f αν υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$. Αν ειδικότερα $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A \cap B_\delta(\mathbf{a})$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **αυστηρού τοπικού ελαχίστου**. Το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **ολικού ελαχίστου** της f αν $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$

για όλα τα $\mathbf{x} \in A$. Ειδικότερα αν $f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x})$ για όλα τα $\mathbf{x} \in A$ με $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ το $\mathbf{a}$ θα καλείται σημείο **αυστηρού ολικού ελαχίστου**.

(3) Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι σημείο **τοπικού ακροτάτου** της f αν το $\mathbf{a}$ είναι σημείο τοπικού μεγίστου ή τοπικού ελαχίστου για την f . Αντίστοιχα ορίζονται οι έννοιες του σημείου **αυστηρού τοπικού ακροτάτου** και **ολικού τοπικού ακροτάτου**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.8. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} \in A$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f αν και μόνο αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν σημεία $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ τέτοια ώστε

$$\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\| < \delta, \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\| < \delta \text{ και } f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2)$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.44. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση και $\mathbf{a} \in A$. Λέμε ότι το $\mathbf{a}$ είναι **κρίσιμο** (ή **στάσιμο**) σημείο της f αν $f_x(\mathbf{a}) = f_y(\mathbf{a}) = 0$, δηλαδή οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f στο $\mathbf{a}$ είναι όλες ίσες με μηδέν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.9. Ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι

$$z = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)(y - a_2)$$

Συνεπώς, αν το $\mathbf{a}$ είναι κρίσιμο σημείο της f τότε ο τύπος του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ γίνεται $z = f(a_1, a_2)$ και άρα το εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $\mathbf{a}$ είναι παράλληλο προς το xy -επίπεδο.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.45. (**Σχέση τοπικών ακροτάτων και κρίσιμων σημείων**) Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό. Αν όλες οι πρώτης τάξης μερικές παράγωγοι της f ορίζονται σε κάθε σημείο του A τότε κάθε τοπικό ακρότατο της f είναι και κρίσιμο σημείο της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ τοπικό ακρότατο της f . Θυμίζουμε ότι

$$\begin{aligned} f_x(a_1, a_2) &= \frac{\partial f}{\partial \mathbf{e}_1}(a_1, a_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1) - f(\mathbf{a})}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = g'(0) \end{aligned} \quad (5.109)$$

όπου $g(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1)$, με $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ για κατάλληλα μικρό $\epsilon > 0$ ώστε $\mathbf{a} + t\mathbf{e}_1 \in A$. Αφού $g(0) = f(\mathbf{a})$ και το $\mathbf{a}$ είναι τοπικό ακρότατο της f έπεται ότι το $t_0 = 0$ είναι τοπικό ακρότατο της $g(t)$. Άρα απο την γνωστή πρόταση του Fermat για τοπικά ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων μιας μεταβλητής θα πρέπει $g'(0) = 0$ που λόγω της (5.109) σημαίνει ότι $f_x(\mathbf{a}) = 0$. Ανάλογα δείχνουμε ότι $f_y(\mathbf{a}) = 0$. $\square$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.10. Το αντίστροφο της Πρότασης 5.45 δεν ισχύει. Πχ. αν $f(x, y) = x^3$ τότε το $(0, 0)$ είναι κρίσιμο σημείο της f αλλά δεν είναι τοπικό ακρότατο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.46. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση. Ένα κρίσιμο σημείο της f που δεν είναι τοπικό ακρότατο καλείται **σαγματικό** σημείο της f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 5.11. Απο τις Παρατηρήσεις 5.8 και 5.9, συμπεραίνουμε ότι ένα σημείο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι σαγματικό σημείο της f αν και μόνο αν το εφαπτόμενο

επίπεδο της f στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ (το οποίο όπως είδαμε είναι παράλληλο προς το xy -επίπεδο, λόγω του ότι το (a_1, a_2) είναι κρίσιμο σημείο της f) δεν αφήνει το γράφημα της f από την μία μεριά του. Γενικά το γράφημα της $f(x, y)$ γύρω από ένα σαγματικό σημείο μοιάζει με την επιφάνεια μιας σέλας αλόγου εξ ου και το όνομα. Τα σαγματικά σημεία αντιστοιχούν στα σημεία καμπής των συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

12.2. Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται σε ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Στην παράγραφο αυτή θα δούμε μια επέκταση ενός γνωστού κριτηρίου από τις πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Θυμίζουμε ότι το κριτήριο αυτό έλεγε το εξής:

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.47. (Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις μιας μεταβλητής) Έστω $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I ανοικτό διάστημα του $\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη συνάρτηση. Έστω $a \in I$ κρίσιμο σημείο της f (δηλ. $f'(a) = 0$) και τέτοιο ώστε η $f''(a)$ υπάρχει.

(1) Αν $f''(a) > 0$ τότε η f έχει στο a αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $f''(a) < 0$ τότε η f έχει στο a αυστηρό τοπικό μέγιστο.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. (1) Έστω $f''(a) > 0$. Επειδή το a είναι κρίσιμο σημείο έχουμε $f'(a) = 0$. Έχουμε

$$f''(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - f'(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

Άρα μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε

$$x \in I, \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \frac{f'(x)}{x - a} > 0$$

Άρα

$$x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f'(x) < 0 \text{ και } x \in I \cap (a, a + \delta) \Rightarrow f'(x) > 0$$

Συνεπώς η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a - \delta, a]$ και γνησίως αύξουσα στο $[a, a + \delta)$, με άλλα λόγια το a είναι σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου.

(2) Προκύπτει από το (1) θέτοντας $g = -f$. □

Κλασσικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν το παραπάνω κριτήριο είναι οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2$. Πράγματι, η f έχει ολικό ελάχιστο στο 0 και $f''(0) = 2 > 0$, η g έχει ολικό μέγιστο στο 0 και $g''(0) = -2 < 0$. Αν $f''(x_0) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν αποφαίνεται. Πχ. η $h(x) = x^3$ δεν έχει τοπικά ακρότατα (ως γνησίως αύξουσα) και η $\sigma(x) = x^4$ έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0 = 0$ και για τις δύο συναρτήσεις έχουμε $h''(0) = \sigma''(0) = 0$.

Το παραπάνω κριτήριο γενικεύεται και για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών. Πρίν διατυπώσουμε το αντίστοιχο κριτήριο δίνουμε τον εξής ορισμό που επεκτείνει την έννοια της δεύτερης παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.48. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ και $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^n$. Ο Εσσιανός πίνακας της f στο (a_1, a_2) (ή η δεύτερη παράγωγος της f στο (a_1, a_2)) είναι ο πίνακας

$$f''(a_1, a_2) = \begin{bmatrix} f_{xx}(a_1, a_2) & f_{xy}(a_1, a_2) \\ f_{yx}(a_1, a_2) & f_{yy}(a_1, a_2) \end{bmatrix} \quad (5.110)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.49. (Κριτήριο δεύτερης παραγώγου για συναρτήσεις δύο μεταβλητών) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό και $f \in C^2(A)$. Έστω $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in A$ κρίσιμο σημείο της f (δηλαδή $f_x(a_1, a_2) = f_y(a_1, a_2) = 0$). Έστω $f''(a_1, a_2)$ ο Εσσιανός πίνακας της f στο (a_1, a_2) και έστω

$$\Delta(a_1, a_2) = \det f''(a_1, a_2) = f_{xx}(a_1, a_2)f_{yy}(a_1, a_2) - (f_{xy}(a_1, a_2))^2 \quad (5.111)$$

η ορίζουσά του. Υποθέτουμε ότι

$$\Delta(a_1, a_2) \neq 0.$$

Τότε τα επόμενα ισχύουν:

- (1) Αν $f_{xx}(a_1, a_2) > 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.
- (2) Αν $f_{xx}(a_1, a_2) < 0$ και $\Delta(a_1, a_2) > 0$ τότε η f έχει αυστηρό τοπικό μέγιστο στο $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$.
- (3) Αν $\Delta(a_1, a_2) < 0$ τότε το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ είναι σαγματικό σημείο της f .

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.2. (α) Αν $\Delta(a_1, a_2) = 0$ τότε το παραπάνω κριτήριο δεν μπορεί να αποφανθεί αν το (a_1, a_2) είναι τοπικό ακρότατο ή όχι. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της συνάρτησης που μελετούμε και να εξάγουμε πληροφορία για το εν λόγω σημείο (δείτε σχετικά τις Ασκήσεις 5.19, 5.20 παρακάτω). Απο την άλλη μεριά όταν $\Delta(a_1, a_2) \neq 0$ τότε οι τρεις περιπτώσεις (1)-(3) του θεωρήματος είναι όλες οι δυνατές περιπτώσεις που μπορούν να συμβούν. Πράγματι, η εναπομείνουσα περίπτωση $\Delta(a_1, a_2) > 0$ και $f_{xx}(a_1, a_2) = 0$ είναι αδύνατον να συμβαίνει αφού τότε από τον ορισμό του $\Delta(a_1, a_2)$ (εξίσωση (5.111)) θα είχαμε $f_{xy}^2(a_1, a_2) < 0$ που φυσικά είναι αδύνατον.

(β) Επίσης υπάρχουν κάποιες λίγες περιπτώσεις (ειδικά αν η συνάρτηση που μελετούμε έχει πολύ απλό τύπο) όπου το κριτήριο δεν χρειάζεται να εφαρμοστεί. Πχ. μπορούμε να δούμε εύκολα ότι το $(0, 0)$ είναι το μοναδικό τοπικό ακρότατο που έχει η $f(x, y) = x^2 + y^2$. Πράγματι, για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$ και άρα η f έχει στο $(0, 0)$ ολικό ελάχιστο. Αν τώρα υπήρχε και άλλο τοπικό ακρότατο τότε θα έπρεπε αυτό να ήταν κρίσιμο σημείο ισοδύναμα θα ήταν λύση του συστήματος

$$f_x(x, y) = 2x = 0$$

$$f_y(x, y) = 2y = 0$$

Επειδή το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(0, 0)$, η f δεν έχει άλλο τοπικό ακρότατο εκτός του $(0, 0)$.

Η απόδειξη του κριτηρίου θα παρουσιασθεί σε επόμενη παράγραφο. Πρώτα θα δώσουμε μερικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.17. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y \\f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x \\f_{xx}(x, y) &= 6x \\f_{yy}(x, y) &= 6y \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 3\end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y = 0 \\f_y(x, y) &= 3y^2 + 3x = 0\end{aligned}$$

Η πρώτη εξίσωση γράφεται $y = -x^2$ και άρα αντικαθιστώντας στην δεύτερη παίρνουμε

$$x^4 + x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1$$

Άρα έχουμε δύο πιθανά τοπικά ακρότατα τα $(0, 0)$ και $(-1, -1)$. Τώρα για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = 36xy - 9$$

Έχουμε $\Delta(0, 0) = -9 < 0$ και άρα $(0, 0)$ είναι σαγματικό. Επίσης $\Delta(-1, -1) = 36 - 9 > 0$ και $f_{xx}(-1, -1) = -6 < 0$. Άρα το $(-1, -1)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.18. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Έχουμε

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x \\f_y(x, y) &= 6xy - 6y \\f_{xx}(x, y) &= 6x - 6 \\f_{yy}(x, y) &= 6x - 6 \\f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = 6y\end{aligned}$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Υπολογίζουμε τώρα τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$\begin{aligned}f_x(x, y) &= 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 \\f_y(x, y) &= 6xy - 6y = 0\end{aligned}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται $6y(x - 1) = 0$ και άρα

$$y = 0 \text{ ή } x = 1 \quad (5.112)$$

Για $y = 0$ από την πρώτη εξίσωση παίρνουμε $3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0$ και άρα $x = 0$ ή $x = 2$. Συνεπώς έχουμε τα σημεία

$$(0, 0) \text{ και } (2, 0).$$

Αντίστοιχα για $x = 1$ η πρώτη εξίσωση δίνει $3 + 3y^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 1 = 0$ και άρα $y = 1$ ή $y = -1$. Οπότε έχουμε και τα σημεία

$$(1, 1) \text{ και } (1, -1).$$

Συνολικά δηλαδή έχουμε τέσσερα πιθανά τοπικά ακρότατα, τα $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$ και $(1, -1)$. Τώρα για κάθε (x, y) είναι

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (6x - 6) \cdot (6x - 6) - 36y^2$$

Έχουμε

(1) $\Delta(0, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(0, 0) = -6 < 0$ και άρα το $(0, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(2) $\Delta(2, 0) = 36 > 0$, $f_{xx}(2, 0) = 6 > 0$ και άρα το $(2, 0)$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(3) $\Delta(1, 1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, 1)$ είναι σαγματικό.

(4) $\Delta(1, -1) = -36 < 0$ και άρα το $(1, -1)$ είναι σαγματικό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.19. Βρείτε (αν υπάρχουν) τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^4$.

Λύση: Έχουμε

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3, \quad f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3,$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 12(x - y)^2, \quad f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 12(x - y)^2$$

και

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 12(x - y)^2$$

και άρα $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία δηλαδή τις λύσεις του συστήματος

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y)^3 = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y)^3 = 0$$

Με πρόσθεση των εξισώσεων, παίρνουμε ότι $x^3 + y^3 = 0$ ή ισοδύναμα

$$y = -x \tag{5.113}$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση έχουμε

$$4x^3 - 4(x - y)^3 = 4x^3 - 4(2x)^3 = 4x^3 - 32x^3 = -28x^3 = 0$$

και άρα $x = 0$. Οπότε από την (5.113) παίρνουμε ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο είναι το $(0, 0)$. Έχουμε $f_{xx}(0, 0) = f_{yy}(0, 0) = f_{xy}(0, 0) = 0$ και άρα $\Delta(0, 0) = 0$. Συνεπώς από το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(1) \quad f(0, 0) = 0,$$

(2) για κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0$ και

(3) για κάθε σημείο της ευθείας $y = -x$ διάφορο του $(0, 0)$, είναι $f(x, y) = f(x, -x) = 2x^4 - 16x^4 < 0$.

Άρα σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία τέτοια ώστε η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι αυστηρά μικρότερη του $f(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι αυστηρά μεγαλύτερη του $f(0, 0)$. Αυτό σημαίνει ότι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f είναι σαγματικό σημείο. Άρα η f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.20. Μελετήστε την συνάρτηση $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ ως προς τα τοπικά ακρότατα.

Λύση: Η $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Πράγματι,

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2 - 4$$

$$f_{yy}(x, y) = 12y^2 - 4$$

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) = 4$$

όλες συνεχείς. Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία λύνοντας το σύστημα

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4(x - y) = 0$$

$$f_y(x, y) = 4y^3 + 4(x - y) = 0$$

με πρόσθεση κατά μέλη δίνει ότι $x^3 = -y^3$ ισοδύναμα

$$y = -x$$

Αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση βρίσκουμε ότι $4x^3 - 8x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$ και άρα

$$x = 0 \text{ ή } x = \sqrt{2} \text{ ή } x = -\sqrt{2}$$

Συνεπώς τα πιθανά τοπικά ακρότατα είναι τα σημεία

$$(0, 0), \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \text{ και } (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Έχουμε

$$\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - (f_{xy}(x, y))^2 = (12x^2 - 4) \cdot (12y^2 - 4) - 16$$

(1) $\Delta(0, 0) = 0$ και άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε από το Κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για το αν το $(0, 0)$ είναι ή όχι τοπικό ακρότατο. Όμως παρατηρούμε ότι

$$(\alpha) \quad f(0, 0) = 0,$$

$$(\beta) \quad \text{για κάθε } 0 < x \leq 1, \text{ είναι } f(x, 0) = x^4 - 2x^2 < 0 \text{ και}$$

$$(\gamma) \quad \text{για κάθε } x = y \neq 0 \text{ είναι } f(x, y) = f(x, x) = 2x^4 > 0.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι σε κάθε περιοχή του $(0, 0)$ μπορούμε να βρούμε δύο σημεία που η τιμή της f στο ένα από αυτά να είναι μικρότερη του $f(0, 0)$ ενώ η τιμή στο άλλο να είναι μεγαλύτερη του $f(0, 0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η F δεν έχει τοπικό ακρότατο στο $(0, 0)$.

(2) Όπως εύκολα βλέπουμε

$$\Delta(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \Delta(\sqrt{2}, \sqrt{2}) > 0$$

και $f_{xx}(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f_{xx}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) > 0$ οπότε στα σημεία $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ η f έχει αυστηρό τοπικό ελάχιστο. Άρα η f έχει ακριβώς δύο τοπικά ακρότατα που είναι και τα δύο αυστηρά τοπικά ελάχιστα.

12.3. Απόδειξη του κριτηρίου Δεύτερης Παραγώγου. Το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου είναι συνέπεια του Θεωρήματος Taylor (Θεώρημα 5.41) και ενός πολύ βασικού θεωρήματος της Γραμμικής Άλγεβρας, του Κριτηρίου Sylvester για Τετραγωνικές Μορφές. Βέβαια εδώ χρειάζονται μόνο οι πολύ απλές μορφές των θεωρημάτων αυτών. Συγκεκριμένα, η περίπτωση $m = 2$ του Θεωρήματος 5.41 και το Κριτήριο Sylvester για τετραγωνικές μορφές δύο μόνο μεταβλητών, δηλαδή της μορφής $F(x, y) = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1 x_2 + a_{22}x_2^2$. (Στην παράγραφο αυτή, για να συμβολίσουμε ένα σημείο του $\mathbb{R}^2$, θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό (x_1, x_2) αντί του (x, y))

Από το Θεώρημα Taylor 5.41 έχουμε ότι

$$f(\mathbf{x}) = T_2(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0, \quad (5.114)$$

όπου $T_2(\mathbf{x})$ είναι το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, δηλαδή το πολυώνυμο

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Παρατηρείστε τώρα ότι αν το $\mathbf{a}$ είναι **κρίσιμο** σημείο της f τότε το δεύτερης τάξης πολυώνυμο Taylor της f με κέντρο το $\mathbf{a}$ γράφεται

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Άρα θέτοντας

$$Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = Q_{\mathbf{a}}(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j) \quad (5.115)$$

η (5.114) γράφεται

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \quad \text{με} \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0. \quad (5.116)$$

Η συνάρτηση $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ θέτοντας $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})$ και κάνοντας μια αλλαγή συντεταγμένων $x'_i = x_i - a_i$ παίρνει την μορφή $\sum_{i,j=1}^2 a_{ij}x'_i x'_j$ και άρα γίνεται μια **τετραγωνική μορφή** δύο μεταβλητών μια κλάση συναρτήσεων πολύ γνωστή ειδικά στην Γραμμική Άλγεβρα. Θα θυμίσουμε στην επόμενη υποπαράγραφο τους σχετικούς ορισμούς, αλλά πριν πάμε σε αυτό ας δούμε πως περίπου σκεπτόμαστε να προχωρίσουμε στην απόδειξη του Κριτηρίου Δεύτερης Μερικής Παραγώγου.

Απλοποιώντας την κατάσταση ως θεωρήσουμε ότι το σφάλμα $R_2(\mathbf{x})$ είναι μηδέν οπότε από την (5.116) βλέπουμε ότι αν το $\mathbf{x}$ είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ τότε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}).$$

Άρα αν για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ είχαμε $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) > 0$ τότε θα είχαμε και ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ και άρα στην περίπτωση αυτή το $\mathbf{a}$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού ελαχίστου. Αντίστοιχα, αν $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$ που είναι αρκετά κοντά στο $\mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα ήταν σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου. Συνεπώς αν η $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ διατηρούσε πρόσημο γύρω από το $\mathbf{a}$ τότε το $\mathbf{a}$ θα ήταν αυστηρό τοπικό γνήσιο ακρότατο. Από την άλλη αυτό είναι και αναγκαίο για να είναι το $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ακρότατο γιατί αν οσοδήποτε κοντά στο $\mathbf{a}$ υπήρχαν και $\mathbf{x}$ με $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) < 0$ και $\mathbf{x}$ με $Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) > 0$ τότε για τα πρώτα θα είχαμε $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < 0$ και για τα δεύτερα $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ και συνεπώς το $\mathbf{a}$ δεν είναι τοπικό ακρότατο.

Θα δείξουμε τώρα ότι τα παραπάνω ισχύουν ακόμη και αν το $R_2(\mathbf{x})$ δεν είναι ίσο με μηδέν. Θα χρειασθούμε πρώτα το εξής.

ΛΗΜΜΑ 5.50. Έστω $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση της μορφής

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j.$$

Τότε για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(\lambda\mathbf{x}) = Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^2 Q(\mathbf{x}) \quad (5.117)$$

Ειδικότερα,

$$Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{Q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} \quad (5.118)$$

για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Έχουμε

$$Q(\lambda\mathbf{x}) = Q(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\lambda x_i \lambda x_j = \lambda^2 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \lambda^2 Q(\mathbf{x})$$

Άρα αν $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε για $\lambda = 1/\|\mathbf{x}\|$,

$$Q\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} Q(\mathbf{x}) = \frac{Q(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

□

ΛΗΜΜΑ 5.51. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $f \in C^2(A)$ και $\mathbf{a} \in A$ κρίσιμο σημείο της f . Έστω η συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) x_i x_j$$

(1) Αν $Q(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η f έχει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Αν $Q(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τότε η f έχει στο $\mathbf{a}$ αυστηρό τοπικό μέγιστο.

(3) Αν υπάρχουν $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $Q(\mathbf{z}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{z}_2) > 0$ τότε το $\mathbf{a}$ είναι σαγματικό σημείο της f .

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου, απο το Θεώρημα Taylor έχουμε

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \text{ με } \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$$

και

$$Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

Παρατηρείστε ότι για κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ έχουμε

$$Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Επίσης για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) &= \frac{1}{2}Q_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2}Q(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + R_2(\mathbf{x}) \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{Q(\mathbf{x} - \mathbf{a})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \\ &\stackrel{(5.118)}{=} \left[\frac{1}{2}Q\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}\right) + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \end{aligned} \quad (5.119)$$

(1) Έστω ότι $Q(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε¹⁰,

$$m = \min \{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} > 0 \quad (5.120)$$

Επειδή $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} < \frac{m}{2} \quad (5.121)$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, απο τις (5.119) και (5.120) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ δηλαδή το $\mathbf{a}$ είναι αυστηρό τοπικό ελάχιστο.

(2) Έστω ότι $Q(\mathbf{x}) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Τότε¹¹

$$M = \max \{Q(\mathbf{y}) : \|\mathbf{y}\| = 1\} < 0 \quad (5.122)$$

Επειδή $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow \frac{|R_2(\mathbf{x})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} < \frac{M}{2} \quad (5.123)$$

Τότε για κάθε $\mathbf{x} \in A$ με $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta$, απο τις (5.119) και (5.122) προκύπτει ότι $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) < 0$ δηλαδή το $\mathbf{a}$ είναι σημείο αυστηρού τοπικού μεγίστου.

¹⁰Το m στην (5.120) ορίζεται γιατί η Q λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στην $S_n = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y}\| = 1\}$, αφού είναι **συνεχής** και η S_n είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

¹¹Ομοίως το M ορίζεται καλώς για τους ίδιους λόγους

(3) Έστω ότι υπάρχουν $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^2$ με $Q(\mathbf{z}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{z}_2) > 0$. Θα δείξουμε ότι τότε το $\mathbf{a}$ δεν είναι τοπικό ακρότατο. Απο την Παρατήρηση 5.8 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{a})$ τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{a}) < f(\mathbf{x}_2)$$

Πράγματι, απο τον ορισμό της συνάρτησης Q έχουμε $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$. Θέτουμε

$$\mathbf{y}_1 = \frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|} \quad \text{και} \quad \mathbf{y}_2 = \frac{\mathbf{z}_2}{\|\mathbf{z}_2\|}$$

Έχουμε $\|\mathbf{y}_1\| = \|\mathbf{y}_2\| = 1$,

$$Q(\mathbf{y}_1) = Q\left(\frac{\mathbf{z}_1}{\|\mathbf{z}_1\|}\right) \stackrel{(5.118)}{=} \frac{Q(\mathbf{z}_1)}{\|\mathbf{z}_1\|^2} < 0$$

και ομοίως $Q(\mathbf{y}_2) > 0$. Πράγματι έστω ένα οποιοδήποτε $\delta > 0$. Επιλέγουμε και ένα $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta_0 \Rightarrow -\frac{Q(\mathbf{y}_2)}{2} < \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} < -\frac{Q(\mathbf{y}_1)}{2} \quad (5.124)$$

Θέτουμε $\delta' = \min\{\delta_0, \delta\}$,

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{a} + \frac{\delta'}{2}\mathbf{y}_1, \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{a} + \frac{\delta'}{2}\mathbf{y}_2$$

Τότε $\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\| = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\| = \delta'/2 < \delta$ και

$$\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}\|} = \mathbf{y}_1, \quad \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}}{\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}\|} = \mathbf{y}_2$$

Συνεπώς $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in B_\delta(\mathbf{a})$,

$$f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{a}) \stackrel{(5.119)}{=} \left[\frac{1}{2}Q(\mathbf{y}_1) + \frac{R_2(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2} \right] \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|^2 \stackrel{(5.124)}{<} 0$$

και ομοίως $f(\mathbf{x}_2) - f(\mathbf{a}) > 0$. □

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του κριτηρίου θα χρειασθούμε κάποια στοιχεία απο την θεωρία των τετραγωνικών μορφών που αναφέρουμε στην συνέχεια.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.52. Μια συνάρτηση $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ της μορφής

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$$

όπου $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \dots, n$ σταθερές, καλείται **τετραγωνική μορφή**.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.3. (1) Οι σταθερές a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ σχηματίζουν έναν $n \times n$ -πίνακα $A = [a_{ij}]$ που χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρούμε ότι είναι **συμμετρικός** (δηλαδή $a_{ij} = a_{ji}$ για όλα τα $i, j = 1, \dots, n$). Πράγματι έστω $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή. Θέτουμε $b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2}$ και $b_{ii} = a_{ii}$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$. Τότε ο πίνακας $B = [b_{ij}]$ είναι συμμετρικός και $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j$, για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

(2) Είναι εύκολο να δούμε ότι μια συνάρτηση $Q(x, y) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τετραγωνική μορφή αν και μόνο αν είναι ένα δευτέρου βαθμού ομογενές πολυώνυμο

n -μεταβλητών. Πχ. οι συναρτήσεις $x^2 + y^2$, xy , $y^2 + xy$ είναι τετραγωνικές μορφές ενώ η $x^2 + y^2 + x$ δεν είναι.

(3) Επειδή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + \sum_{i \neq j} a_{ij}x_i x_j$ μπορεί να δειχθεί εύκολα ότι η Q γράφεται και ως γινόμενο πινάκων.

$$\begin{aligned} Q(x_1, \dots, x_n) &= [x_1 \ \dots \ x_n] \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (5.125)$$

όπου (όπως συνθίζεται στην Γραμμική Άλγεβρα) τα διανύσματα $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τα βλέπουμε ως πίνακες στήλη

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(οπότε $\mathbf{X}^T = [x_1 \ \dots \ x_n]$).

Πχ. το δεύτερης τάξης πολώνυμο Taylor μιας C^2 συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με κέντρο ένα $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ γράφεται και με μορφή πινάκων ως εξής

$$T_2(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}_0) + \nabla f(\mathbf{X}_0)^T \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \cdot H(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0) \quad (5.126)$$

$$\text{όπου } \nabla f(\mathbf{X}_0)^T = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}) \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right] \text{ και } H(\mathbf{a}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) \right]_{i,j=1}^2.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.53. Έστω $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή.

(1) Η Q θα καλείται **θετικά ορισμένη** αν $Q(x_1, \dots, x_n) > 0$ για κάθε μη μηδενικό σημείο $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(2) Η Q θα καλείται **αρνητικά ορισμένη** αν $Q(x_1, \dots, x_n) < 0$ για κάθε μη μηδενικό σημείο $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Απο την (5.125) παρατηρούμε ότι αν $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του πίνακα A με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{x}$ τότε

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \cdot (\mathbf{A} \mathbf{X}) = \mathbf{x} \cdot \lambda \mathbf{x} = \lambda \|\mathbf{x}\|^2 \quad (5.127)$$

Άρα αν η τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη τότε όλες οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ είναι θετικές (αντ. αρνητικές). Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο δηλαδή ισχύει ο επόμενος χαρακτηρισμός των θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένων τετραγωνικών μορφών.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.54. *Μια τετραγωνική μορφή $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ είναι θετικά (αντ. αρνητικά) ορισμένη αν και μόνο αν οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα $A = [a_{ij}]$ είναι όλες θετικές (αντ. αρνητικές).*

Εδώ όμως θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο πολύ πιο άμεσο κριτήριο, που οφείλεται στον Sylvester, και το οποίο είναι ένας αριθμητικός αλγόριθμος που μας επιτρέπει να διακρίνουμε αν μια τετραγωνική μορφή είναι ορισμένη ή όχι, χωρίς να πρέπει να υπολογίσουμε τις ιδιοτιμές του αντίστοιχου πίνακα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.55. *(Κριτήριο του Sylvester) Έστω $A = [a_{ij}]$ ένας $n \times n$ συμμετρικός πίνακας και έστω $Q(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Για κάθε $k = 1, \dots, n$ θέτουμε $A_k = [a_{ij}]_{i,j \leq k}$, δηλαδή A_k είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A αν κρατήσουμε τις πρώτες k γραμμές και τις πρώτες k στήλες του.*

(1) Η τετραγωνική μορφή Q είναι θετικά ορισμένη (δηλαδή $Q(x) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) αν και μόνο αν $\det A_k > 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

(2) Η τετραγωνική μορφή Q είναι αρνητικά ορισμένη (δηλαδή $Q(x) < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) αν και μόνο αν $(-1)^k \det A_k > 0$ για κάθε $k = 1, \dots, n$.

Απο τα Θεωρήματα 5.54 και 5.55 παίρνουμε το εξής.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.56. *Αν δεν ισχύει ούτε ότι (1) $\Delta_k > 0$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$, ούτε ότι (2) $(-1)^k \Delta_k > 0$ για όλα τα $k = 1, \dots, n$ και επιπλέον $\Delta_n \neq 0$ τότε υπάρχουν $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αφού δεν ισχύει η (1), από το Θεώρημα 5.55 έχουμε ότι η Q δεν είναι θετικά ορισμένη και άρα από το Θεώρημα 5.54 ο A θα έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_1 \leq 0$. Ομοίως με τους ίδιους συλλογισμούς αφού δεν ισχύει η (2), ο A θα έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_2 \geq 0$. Επειδή τώρα ως γνωστόν η ορίζουσα ενός συμμετρικού τετραγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των ιδιοτιμών του, εφόσον $\Delta_n \neq 0$ όλες οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές. Άρα $\lambda_1 < 0$ και $\lambda_2 > 0$. Αν τώρα $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ είναι τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, από την (5.127) έχουμε $Q(\mathbf{x}_1) < 0$ και $Q(\mathbf{x}_2) > 0$. $\square$

Η απόδειξη του Κριτηρίου Δεύτερης Παραγώγου προκύπτει τώρα άμεσα από το Λήμμα 5.51, το Θεώρημα 5.55 και το Πόρισμα 5.56.

13. Εφαρμογές

13.1. Ολικά Ακρότατα συναρτήσεων δύο μεταβλητών που ορίζονται σε κλειστά και φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε το κριτήριο Δεύτερης Παραγώγου για τον εντοπισμό των τοπικών ακροτάτων μιας C^2 πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών που είναι ορισμένη σε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$. Στην παράγραφο αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο αυτό για να εντοπίσουμε τα ολικά ακρότατά μιας πραγματικής συνάρτησης $f : K \rightarrow \mathbb{R}$, όπου $K \subseteq \mathbb{R}^2$ κλειστό και φραγμένο. Η γενική μέθοδος που ακολουθούμε για να προσδιορίσουμε τα ολικά ακρότατα εδώ είναι η εξής. Προσδιορίζουμε τα τοπικά ακρότατα του περιορισμού της f στο εσωτερικό του K και τα τοπικά ακρότατα του περιορισμού της f στο σύνορο του K ξεχωριστά και μετά συγκρίνουμε

τις τιμές της f στα σημεία αυτά. Η μεγαλύτερη είναι το ολικό μέγιστο και η μικρότερη το ολικό ελάχιστο της f .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.21. Έστω $f(x, y) = xy(c - x - y) = cxy - x^2y - xy^2$ ορισμένη στο κλειστό τρίγωνο K με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(c, 0)$ και $(0, c)$, όπου $C > 0$ σταθερά. Δείξτε ότι η f λαμβάνει ελάχιστη τιμή (που είναι το 0) σε όλα τα σημεία του συνόρου του K και την μέγιστη τιμή (που είναι το $c^3/27$) στο μοναδικό εσωτερικό σημείο $(c/3, c/3)$.

Λύση: Παρατηρούμε επίσης ότι $f(x, y) \geq 0$ για κάθε $(x, y) \in K$ και ειδικότερα, $f(x, y) = 0$, αν το σημείο (x, y) είναι στο σύνορο του K και $f(x, y) > 0$, αν το (x, y) είναι στο εσωτερικό του K . Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι το 0 και λαμβάνεται σε όλα τα συνοριακά του σημεία και μόνο σε αυτά. Επίσης η μέγιστη τιμή της f αναγκαστικά θα είναι γνήσια θετική και θα λαμβάνεται σε σημεία του εσωτερικού του τριγώνου.

Για να βρούμε τώρα τα σημεία ολικού μεγίστου της f στο εσωτερικό του K , εφαρμόζουμε το κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου. Τα κρίσιμα σημεία της f είναι οι λύσεις του συστήματος $f_x = f_y = 0$, δηλαδή του

$$\begin{cases} c - 2x - y = 0 \\ c - x - 2y = 0 \end{cases}$$

Από το σύστημα αυτό βλέπουμε εύκολα ότι $x = y = c/3$. Επειδή $f_{xx}(x, y) = -2y$, $f_{yy}(x, y) = -2x$, $f_{xy}(x, y) = c - 2x - 2y$, έχουμε $f_{xx}(c/3, c/3) = -2c/3$, $f_{yy}(c/3, c/3) = -2c/3$ και $f_{xy}(c/3, c/3) = -c/3$. Συνεπώς,

$$f_{xx}(c/3, c/3) < 0 \text{ και}$$

$$\Delta(0, 0) = f_{xx}(0, 0)f_{yy}(0, 0) - f_{xy}^2(0, 0) = 4c^2/9 - c^2/9 = c^2/3 > 0$$

και άρα το $(c/3, c/3)$ είναι το μοναδικό σημείο τοπικού μεγίστου της f στο εσωτερικό του K . Άρα το ολικό μέγιστο της $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ λαμβάνεται μοναδικά στο σημείο $(c/3, c/3)$ και είναι το $f(c/3, c/3) = c^3/27$.

13.2. Ολικά Ακρότατα συναρτήσεων τριών μεταβλητών υπό συνθήκες. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε μία μέθοδο για να εντοπίσουμε τα ολικά ακρότατα μιας πραγματικής συνάρτησης $F : X \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το X είναι μια διδιάστατη επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$. Η επιφάνεια X ορίζεται μέσω κάποιων συνθηκών που θα είναι συνήθως εξισώσεις ή και ανισώσεις τριών μεταβλητών. Ο γενικός τρόπος επίλυσης των προβλημάτων αυτών είναι η απαλοιφή της μίας των μεταβλητών μέσω των άλλων δύο. Με τον τρόπο αυτόν επιτυγχάνεται η αναγωγή του προβλήματος στο απλούστερο πρόβλημα του προσδιορισμού των τοπικών ακροτάτων μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.22. (α) Δείξτε ότι η συνάρτηση $F(x, y, z) = xyz$, υπό τις συνθήκες

$$x, y, z \geq 0 \text{ και } x + y + z = c$$

με $c > 0$ σταθερά, παρουσιάζει μοναδικό ολικό μέγιστο στο σημείο $(c/3, c/3, c/3)$.

(β) Δείξτε ότι από όλα τα τρίγωνα με την ίδια περίμετρο το ισόπλευρο είναι εκείνο με το μεγαλύτερο εμβαδό.

Λύση: (α) Λύνοντας την συνθήκη $x + y + z = c$ ως προς z , έχουμε $z = c - x - y$ και αντικαθιστώντας στον τύπο της F παίρνουμε την συνάρτηση

$$f(x, y) = xy(c - x - y) = cxy - x^2y - xy^2$$

όπου τα x, y ικανοποιούν τις σχέσεις $x, y \geq 0$ και $x + y \leq c$. Οι σχέσεις αυτές ορίζουν ένα κλειστό (εσωτερικό και σύνορο μαζί) ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο $K \subseteq \mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία $(0, 0)$, $(c, 0)$ και $(0, c)$. Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 5.21 η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο μοναδικό σημείο $(c/3, c/3)$. Συνεπώς η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο μοναδικό σημείο $(c/3, c/3, c/3)$.

(β) Το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές a, b, γ δίνεται από τον τύπο του Ήρωνα

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$$

όπου $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Θέτουμε

$$x = \tau - \alpha, \quad y = \tau - \beta \quad \text{και} \quad z = \tau - \gamma.$$

Είναι $x = \tau - \alpha = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} > 0$ (από τριγωνική ανισότητα) και ομοίως $y, z > 0$. Επιπλέον, $x + y + z = 3\tau - (\alpha + \beta + \gamma) = 3\tau - 2\tau = \tau$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$E = \sqrt{\tau xyz} = \sqrt{\tau} \sqrt{F(x, y, z)}.$$

Άρα η μεγιστοποίηση του E είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση της F . Από το (α) ερώτημα έχουμε ότι η F παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο μοναδικό σημείο $(\tau/3, \tau/3)$. Άρα $\alpha = \tau - x = 2\tau/3$, $\beta = \tau - y = 2\tau/3$ και $\gamma = x + y = 2\tau/3$, ισοδύναμα το εμβαδό γίνεται μέγιστο όταν και μόνο όταν το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.23. Να βρεθεί το σημείο του επιπέδου $x + y + z = 3$ που έχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων.

Λύση: Θα ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση $d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ υπό την συνθήκη $x + y + z - 3 = 0$. Ισοδύναμα (και για ευκολία στους υπολογισμούς) θα ελαχιστοποιήσουμε την συνάρτηση

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Έχουμε $z = 3 - x - y$ και αντικαθιστώντας στην f παίρνουμε την συνάρτηση

$$f(x, y) = F(x, y, 3 - x - y) = x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2$$

Υπολογίζουμε τα κρίσιμα σημεία της F :

$$f_x(x, y, z) = 2x - 2(3 - x - y) = 2x - 6 + 2x + 2y = 4x + 2y - 6 = 0$$

$$f_y(x, y, z) = 2y - 2(3 - x - y) = 2y - 6 + 2x + 2y = 2x + 4y - 6 = 0$$

Το παραπάνω σύστημα έχει μοναδική λύση την $(1, 1)$.

Έχουμε $f_{xx}(x, y) = f_{yy}(x, y) = 4$ και $f_{xy}(x, y) = 2$. Άρα $\Delta(0, 0) = 4 \cdot 4 - 2^2 = 12 > 0$ και αφού $f_{xx}(1, 1) = 4 > 0$ το σημείο $(1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Συνεπώς το $(1, 1, 1)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου της f υπο την συνθήκη $x+y+z=3$. Άρα το $(1, 1, 1)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

14. Ερωτήσεις και Ασκήσεις

A. Ερωτήσεις: Από τις παρακάτω προτάσεις βρείτε ποιές είναι αληθείς και ποιές είναι ψευδείς δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας:

A1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης $f_x(x_0, y_0)$ και $f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . (Απ. ΛΑΘΟΣ)

A2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν οι $f_x(x, y), f_y(x, y)$, ορίζονται για όλα τα $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις τότε η f είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα σημεία του $\mathbb{R}^2$. (Απ. ΣΩΣΤΟ)

A3. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν σε ένα σημείο (x_0, y_0) του $\mathbb{R}^2$ η f έχει παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$ κατά οποιαδήποτε κατεύθυνση $\mathbf{u}$ του $\mathbb{R}^2$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) . (Απ. ΛΑΘΟΣ)

A4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Έστω ότι σε ένα σημείο (x_0, y_0) του $\mathbb{R}^2$, οι $f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)$ υπάρχουν. Τότε $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$, για κάθε $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ μοναδιαίο. (Απ. ΛΑΘΟΣ)

A5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και $f'(0, 0) = (0, 0)$ τότε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

(Απ. ΣΩΣΤΟ)

A6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ με $f'(0, 0) = 0$. (Απ. ΣΩΣΤΟ)

A6. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση και έστω $T_2(x, y)$ το πολυώνυμο Taylor της f δεύτερης τάξης με κέντρο το $(0, 0)$. Αν υπάρχει το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ (πεπερασμένο ή $\pm\infty$) τότε υπάρχει το $\lim_{x,y \rightarrow (0,0)} \frac{T_2(x, y)}{x^2 + y^2}$ και είναι ίσα. (Απ. ΣΩΣΤΟ)

A7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 συνάρτηση και $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ κρίσιμο σημείο της f .

(α) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{yy}(x_0, y_0) > 0$ τότε η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) . (Απ. ΛΑΘΟΣ)

(β) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) = 0$ και $f(x, y) \neq 0$ τότε το (x_0, y_0) είναι σαγματικό σημείο. (Απ. ΛΑΘΟΣ)

(γ) Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) τότε $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$. (Απ. ΣΩΣΤΟ)

(δ) Αν $f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) \geq 0$ τότε δεν μπορούμε να αποφανθούμε γενικά αν η f έχει ή όχι τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) . (Απ. ΣΩΣΤΟ)

A8. Έστω $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Έστω $Y \subseteq X$ μη κενό και έστω $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ο περιορισμός της f στο Y , δηλαδή $g(y) = f(y)$ για κάθε $y \in Y$.

(α) Κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της g είναι και σημείο τοπικού ακροτάτου της f .
Απ. ΛΑΘΟΣ

(β) Αν Y ανοικτό τότε κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της g είναι και σημείο τοπικού ακροτάτου της f .
Απ. ΣΩΣΤΟ

(γ) Κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f που ανήκει στο Y είναι και σημείο τοπικού ακροτάτου της g .
Απ. ΣΩΣΤΟ

(δ) Έστω $X \setminus Y \neq \emptyset$ και $h : X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$ ο περιορισμός της f στο $X \setminus Y$. Τότε κάθε σημείο τοπικού ακροτάτου της f είτε είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της g είτε είναι σημείο τοπικού ακροτάτου της h .
Απ. ΣΩΣΤΟ

B. Ασκήσεις :

B1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$. Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

B2. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = x^2 + y^2$. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u}$ για το οποίο η παράγωγος της f κατά την κατεύθυνση $\mathbf{u}$ στο σημείο $(1, 2)$ γίνεται ελάχιστη.

B3. Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{a} = (x_0, y_0)$ εσωτερικό σημείο του A τέτοιο ώστε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{a}$. Έστω $S = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{u}\| = 1\}$ ο μοναδιαίος κύκλος του $\mathbb{R}^2$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$\varphi(\mathbf{u}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{a}), \quad \mathbf{u} \in S$$

είναι Lipschitz (δηλαδή υπάρχει σταθερά $C \geq 0$ τέτοια ώστε

$$|\varphi(\mathbf{u}_2) - \varphi(\mathbf{u}_1)| \leq C \|\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1\|$$

για όλα τα $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in S$. Πότε συμβαίνει $C = 0$, ισοδύναμα η φ είναι σταθερή;

B4. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0, 0) = 0$ και $f(x, y) = \frac{2x^3 + 3y^3}{x^2 + y^2}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$.

(i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$. (ii) Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$ η $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0, 0)$ υπάρχει. (iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

B5. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x, y) = \frac{y^2}{x} \sqrt{x^2 + y^2}$ αν $x \neq 0$ και $f(x, y) = 0$ αν $x = 0$. (i) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $(0, 0)$. (ii) Δείξτε ότι για κάθε $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ με $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = 0$. (iii) Δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

B6. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ όχι και τα δύο μηδέν. Θέτουμε $g(x, y) = \frac{ax + by}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ αν $(x, y) \neq (0, 0)$ και $g(0, 0) = 0$. Δείξτε ότι (i) $|g(x, y)| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$ και (ii) το όριο $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y)$ δεν υπάρχει.

(β) Αν $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ και $f'(0, 0) \neq (0, 0)$ δείξτε ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ δεν υπάρχει.

B7. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αν το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ υπάρχει και είναι διάφορο του 0 δείξτε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$. *Εφαρμογή:* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

B8. Βρείτε και ταξινομήστε τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων

(1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

(2) $f(x, y) = x^2 + y^3 - xy$.

(3) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 18xy$.

(4) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

B9. Ναδειχθεί ότι από όλα τα ορθογώνια με την ίδια περίμετρο το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

B10. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της $F(x, y, z) = xyz$ υπό τον περιορισμό $x + y + z = 5$.

B11. Να βρεθεί το σημείο (x, y, z) του επιπέδου $3x + 2y + 3z = 5$ που έχει ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(2, 3, 5)$.