ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2

Πολυπλοκότητες – Αναδρομικές Διαδικασίες

Να επιλύσετε τις ακόλουθες αναδρομικές σχέσεις και να αποτυπώσετε την τελική πολυπλοκότητα αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Α. Εφαρμογή του Θεωρήματος της Κυριαρχίας

Άσκηση

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Λύση

a=3

b=2

$n^{log_2 3} = n^{1.58}$

Συνεπώς: f(n)= $n^2 = \Omega(n^{1.58})$

Υπολογίζουμε: $3f(n/2) = 3\frac{n^2}{4} \leq \frac{3}{4}n^2$

Ισχύει η 3η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας με c=3/4

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=Θ(f(n))=Θ(n^2)

Άσκηση

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Λύση

a=4

b=2

$n^{log_2 4} = n^2$

Συνεπώς: f(n)= $n^2 = \Theta(n^2)$

Ισχύει η 2η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n) =Θ($n^2 logn$)

Άσκηση

$T(n) = 16T\left(\frac{n}{4}\right) + n$

Λύση

a=16
b=4
$n^{log_4 16} = n^2$
Συνεπώς: f(n)= $n \quad = O(n^2)$
Ισχύει η 1η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας
Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n) =Θ(n^2)

Άσκηση

$T(n) = 2^n T\left(\frac{n}{2}\right) + n^n$

Λύση

Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα της Κυριαρχίας διότι το a δεν είναι σταθερό.

Άσκηση

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + n^{0.51}$

Λύση

a=2

b=4

$n^{log_4 2} = n^{0.5}$

Συνεπώς: f(n)= $n^{0.51} = \Omega(n^{0.5})$

Υπολογίζουμε: $2f(n/4) = 2\frac{n^{0.51}}{4^{0.51}} \leq \frac{2}{4^{0.51}} n^{0.51}$

Ισχύει η 3η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας με c=$\frac{2}{4^{0.51}}$.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=$\Theta\big(f(n)\big) = \Theta(n^{0.51})$

Άσκηση

$T(n) = 0.5T\left(\frac{n}{2}\right) + 1/n$

Λύση

Δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα διότι a<1

Άσκηση

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Λύση

a=3

b=2

$n^{log_2 3} = n^{1.58}$

Συνεπώς: f(n)= $n \quad = O(n^{1.58})$

Ισχύει η 1η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=$\Theta(n^{1.58})$

Άσκηση

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \sqrt{n}$

Λύση

a=3

b=3

$n^{log_3 3} = n$

Συνεπώς: f(n)= $\sqrt{n} = O(n)$

Ισχύει η 1η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=$\Theta(n)$

Άσκηση

$T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

Λύση

a=4

b=2

$n^{log_2 4} = n^2$

Συνεπώς: f(n)= $n \quad = O(n^2)$

Ισχύει η 1η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=$\Theta(n^2)$

Άσκηση

$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2}$

Λύση

a=3

b=3

$n^{log_3 3} = n$

Συνεπώς: f(n)= $n/2 = \Theta(n)$

Ισχύει η 2η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)= $\Theta(nlogn)$

Άσκηση

$$T(n) = 64T\left(\frac{n}{8}\right) - n^2 logn$$

Λύση

Δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα διότι η f(n) είναι αρνητική.

Άσκηση

$T(n) = 7T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

Λύση

a=7

b=3

$n^{log_3 7} = n^{1.77}$

Συνεπώς: f(n)= $n^2 = \Omega(n^{1,77})$

Υπολογίζουμε: $7f(n/3) = 7\frac{n^2}{9} \leq \frac{7}{9}n^2$

Ισχύει η 3η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας για c=$\frac{7}{9}$.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)= $\Theta(n^2)$

Άσκηση

$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlogn$

Λύση

a=2

b=2

$n^{log_2 2} = n$

Συνεπώς: f(n)= $nlogn \quad = \Omega(n \quad)$

Υπολογίζουμε: $2f(n/2) = 2\frac{n}{2}log\frac{n}{2} = n(logn - log2) \leq nlogn$

Άλλά: $\frac{f(n)}{n^{log_b a}} = \frac{nlogn}{n} = logn$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση δεν είναι πολυωνυμικά μικρότερη άρα δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε την 3η περίπτωση του Θεωρήματος.

Παρατηρούμε επίσης ότι: $f(n) = \Theta(n^{log_b a} log^k n)$ με k=1>=0.

Ισχύει η 2η περίπτωση (extended case) του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)=$\Theta(n^{log_b a} log^{k+1} n) \quad = \Theta(n \quad log^2 n)$

Απόδειξη για το extended case της 2ης περίπτωσης του Θεωρήματος της Κυριαρχίας:

Assume that $n = b^m$ for some m. Let c_1 and c_2 be such that $c_2 n^{\log_b a} \lg^k n \leq f(n) \leq c_1 n^{\log_b a} \lg^k n$. We'll first prove by strong induction that $T(n) \leq n^{\log_b a} \lg^{k+1} n - dn^{\log_b a} \lg^k n$ for some choice of $d \geq 0$. Equivalently, that $T(b^m) \leq a^m \ln^{k+1}(b^m) - da^m \lg^k(b^m)$.

$$
\begin{aligned}
T(b^m) &= aT(b^m/b) + f(b^m) \\
&\leq a(a^{m-1}\lg^{k+1}(b^{m-1}) - da^{m-1}\lg^k b^{m-1}) + c_1 a^m \lg^k(b^m) \\
&=\leq a^m \lg^{k+1}(b^{m-1}) - da^m \lg^k b^{m-1} + c_1 a^m \lg^k(b^m) \\
&=\leq a^m[\lg(b^m) - \lg b]^{k+1} - da^m[\lg b^m - \lg b]^k + c_1 a^m \lg^k(b^m) \\
&= a^m \lg^{k+1}(b^m) - da^m d \lg^k b^m \\
&\ldots - a^m\left(d\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}\lg^r(b^m)(-\lg b)^{k-r} + \sum_{r=0}^{k}\binom{k+1}{r}\lg^r(b^m)(-\lg(b))^{k+1-r} + c_1\lg^k(b^m)\right) \\
&= a^m \lg^{k+1}(b^m) - da^m \lg^k b^m \\
&\ldots - a^m\left((c_1 - k\lg b)\lg^k(b^m) + \sum_{r=0}^{k-1}\binom{k+1}{r}\lg^r(b^m)(-\lg(b))^{k+1-r} + d\sum_{r=0}^{k-1}\binom{k}{r}\lg^r(b^m)(-\lg b)^{k-r}\right) \\
&\leq a^m \lg^{k+1}(b^m) - da^m \lg^k b^m
\end{aligned}
$$

for $c_1 \geq k \lg b$. Thus $T(n) = O(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$. A similar analysis shows $T(n) = \Omega(n^{\log_b a} \lg^{k+1} n)$.

Άσκηση

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 1000n^2$$

Λύση

a=8

b=2

$n^{log_2 8} = n^3$

Συνεπώς: f(n)= $n^2 = O(n^3)$

Ισχύει η 1η περίπτωση του Θεωρήματος της Κυριαρχίας.

Άρα, η τελική πολυπλοκότητα είναι: T(n)= $\Theta(n^3)$