ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΝΑΛΥΣΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ & ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Θέμα 1ον

Οι προδιαγραφές ενός νέου τύπου ηλεκτρονικών λαπτήρων αναγράφουν ως μέση διάρκεια ζωής (λειτουργίας) τις 1600 ώρες και τυπική απόκλιση 120 ώρες. Ο χρόνος ζωής των λαπτήρων ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Η αρμόδια αρχή προστασίας καταναλωτών επέλεξε τυχαίο δείγμα 25 λαπτήρων του νέου τύπου και υπολόγισε ότι ο μέσος χρόνος ζωής τους είναι 1540 ώρες. Σε ποιο στατιστικό συμπέρασμα καταλήγετε με βάση τα παραπάνω δεδομένα όσον αφορά τις προδιαγραφές των λαπτήρων σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01

Θέμα 2ον

Α) Να εξετάσετε ως προς την κυρτότητα την συνάρτηση
$f(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = 3\cdot \mathrm{x}^2+4\cdot y^2+5\cdot z^2+4\cdot x\cdot y+2\cdot x\cdot z+4\cdot y\cdot z$

Β)Αν η συνάρτηση f(x,y,z) του Α ερωτήματος υπολογίζει την πίεση σε μια λίμνη του νερού, να βρεθεί η κατεύθυνση προς την οποία πρέπει να κινηθεί ένας δύτης που βρίσκεται στη θέση (1,-1,-1) ώστε να ελαττωθεί η πίεση όσο το δυνατόν γρηγορότερα

Θέμα 3ον

Α) Να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+4\cdot x\cdot y+y^3$

Β) Να υπολογίσετε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$ στο χωρίο των σημείων (x,y) όπου $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 2$

Θέμα 4ον

Α) Να λυθεί το παιχνίδι με πίνακα $\mathrm{A}=\begin{bmatrix} 19 & 15 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

Β)Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη Ι για το παιχνίδι: Δύο αντίπαλες αυτοκινητοβιομηχανίες σκοπεύουν να ιδρύσουν από ένα εργοστάσιο σε μια χώρα για την κάλυψη των εσωτερικών της αναγκών σε αυτοκίνητα. Η κάθε αυτοκινητοβιομηχανία προβληματίζεται αν θα πρέπει να ιδρύσει το εργοστάσιο στον βορρά όπου κατοικεί το 20% του πληθυσμού ή στο νότο που κατοικεί το 80% του πληθυσμού. Αν τα εργοστάσια ιδρυθούν στην ίδια περιοχή θα μοιραστούν ισομερώς την αγορά ενώ αν ιδρυθούν σε διαφορετικές περιοχές η κάθε μία θα πάρει την αγορά της περιοχής που ανήκει.

Καλή Επιτυχία (όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα)

Λύσεις

ΘΕΜΑ 1ον: Το δείγμα ακολουθεί κανονική κατανομή με γνωστή τυπική απόκλιση $\sigma = 120$

Μηδενική υπόθεση: $H_0: \mu = 1600$

Εναλλακτική -//- $H_1: \mu \neq 1600$

Κάνουμε αμφίπλευρο έλεγχο. Το στατιστικό $Z = \dfrac{\bar{x} - 1600}{\sigma/\sqrt{n}} =$

$$= \frac{1540-1600}{120/\sqrt{25}} = \frac{-60}{\frac{120}{5}} = \frac{-5 \cdot 60}{120} = -\frac{5}{2} = -2,5$$

Το $a = 0,01 \longrightarrow \frac{a}{2} = 0,005 \longrightarrow 1 - a/2 = 0,995$

Έτσι $z_{a/2} = \dfrac{2,57 \cdot 1 + 2,58 \cdot 1}{2} = 2,575$

Η περιοχή απόρριψης $|z| > z_{a/2} \iff |-2,5| > 2,575$ Δεν ισχύει

Άρα η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται, ισχύει $\mu = 1600$

ΘΕΜΑ 2ον

Α) Η f είναι τετραγωνική μορφή με πίνακα

$$\frac{1}{2}(A + A') = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\varepsilon_1 = 3 > 0$

$$\varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8 > 0$$

$$\varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(20-4) - 2(10-2) + (2 \cdot 2 - 4) = 48 - 16 = 32 > 0$$

Αφού όλες οι ορίζουσες είναι θετικές τότε ο πίνακας οριστικά θετικός άρα η συνάρτηση f κυρτή

B) $\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z)$

$f_x = 6x + 4y + 2z \quad f_x(1,-1,-1) = 6 - 4 - 2 = 0$

$f_y = 8y + 4x + 4z \quad f_y(1,-1,-1) = -8 + 4 - 4 = -8$

$f_z = 10z + 2x + 4y \quad f_z(\ \ ) = -10 + 2 - 4 = -12$

Η κατεύθυνση είναι $-\vec{\nabla} f = -(0, -8, -12) = (0, 8, 12)$

<u>ΘΕΜΑ 3ον</u>

A) $f_x = 2x + 4y$ $\qquad f_x = 0 \Leftrightarrow 2x + 4y = 0 \Leftrightarrow x + 2y = 0 \Leftrightarrow x = -2y$

$f_y = 4x + 3y^2$ $\qquad f_y = 0 \Leftrightarrow 4(-2y) + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow$

$y(3y-8) = 0 <$ $y = 0$ τότε $x = 0$, $y = 8/3$ τότε $x = -2 \cdot 8/3 = -16/3$

Τα στάσιμα σημεία είναι

$(0, 0) \qquad (-16/3, 8/3)$

Υπολογίζουμε τον Εσσιανό πίνακα

$f_{xx} = 2 \qquad f_{xy} = 4$

$f_{yy} = 6y$

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6y \end{bmatrix}$

Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε $H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Έχουμε $\det E_1 = 2$

$\det E_2 = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 4 = -16$

Έχουμε $(-1) \cdot \det E_1 = -2 < 0$

$(-1)^2 \det E_2 = -16 < 0$

Μη οριστικός άρα Σαγματικό σημείο

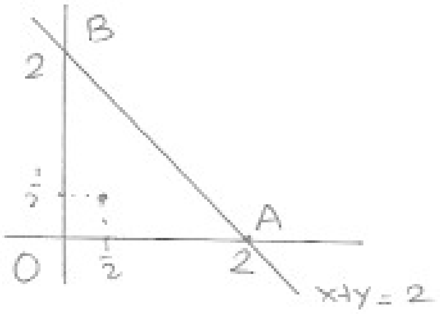
Για το σημείο $(-16/3, 8/3)$ έχουμε

$$H_f(-16/3, 8/3) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$\det E_1 = 2 > 0$ $\quad\quad$ $\det E_2 = 2 \cdot 16 - 4 \cdot 4 = 16 > 0$

Οριστικά θετικός άρα το $(-16/3, 8/3)$ σημείο ελαχίστου

ΘΕΜΑ 3 Β



$f(x,y)=x^2+y^2-x-y$

$f_x = 2x-1 \qquad f_x=0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

$f_y = 2y-1 \qquad f_y=0 \Leftrightarrow 2y-1=0 \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$

Άρα το $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ πιθανή θέση ακροτάτου

Αν κινούμαστε στο ΟΑ: $y=0$ και $x\in[0,2]$ τότε η συνάρτηση

$f(x,0) = x^2-x$. $\qquad f'(x,0)=2x-1$

x	0		$1/2$		2
f'		$-$	0	$+$	
f	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ

Τα σημεία $(0,0)$ $(\frac{1}{2},0)$ $(2,0)$ πιθανά ακρότατα

Αν κινούμαστε στο ΑΒ: $x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x \qquad x\in[0,2]$

$f(x,y)= x^2+(2-x)^2-x-(2-x) = x^2+4+x^2-4x-x-2+x = 2x^2-4x+2$

$f' = 4x-4$

x	0		1		2
f'		$-$	0	$+$	
f	ΤΜ		ΤΕ		ΤΜ

Τα σημεία $x=0 \quad y=2-0=2 \qquad (0,2)$

$x=1 \quad y=2-1=1 \qquad (1,1)$

$x=2 \quad y=2-2=0 \qquad (2,0)$

Αν κινούμαστε στο ΟΒ $\quad x=0 \quad y\in[0,2]$

$f(x,y)= y^2-y \qquad f'(x,y)=2y-1$

$y\in[0,2]$

y	0		$1/2$		2
f'		$-$		$+$	
f	ΤΜ	$\searrow$	ΤΕ	$\nearrow$	ΤΜ

Τα σημεία $(0,0)$ $(0\ \frac{1}{2})$ $(0,2)$ πιθανές θέσεις ακροτάτου

Άρα συνολικά πιθανές θέσεις ακροτάτων είναι

$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $(0,0)$ $(\frac{1}{2},0)$ $(2,0)$ $(0,2)$ $(1,1)$ $(0\ \frac{1}{2})$

Υπολογίζουμε $f(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ $\quad f(0,0)=0,\quad f(\frac{1}{2},0)=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$f(2,0)=2^2-2=2 \qquad f(0,2)=2^2-2=2 \qquad f(1,1)=1^2-1+1^2-1=0$

$f(0,\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

Άρα $f_{min}=-\frac{1}{2}$ στο σημείο $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

$f_{max}=2$ στα σημεία $(2,0)$ και $(0,2)$

ΘΕΜΑ 4

A) $\det A = 19 \cdot 20 - 0 \cdot 15 = 380$

$$A^{-1} = \frac{1}{380}\begin{bmatrix} 20 & -15 \\ 0 & 19 \end{bmatrix} \qquad (A^{-1})' = \frac{1}{380}\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ -15 & 19 \end{bmatrix}$$

$$(A^{-1})'\underset{\sim}{1} = \frac{1}{380}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -15 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{380}\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot\underset{\sim}{1} = \frac{1}{380}\begin{pmatrix} 20 & -15 \\ 0 & 19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{380}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Όλες οι συντεταγμένες έχουν το ίδιο πρόσημο

Άρα οι βέλτιστες στρατηγικές για τον πίνακα A είναι:

$$\underset{\sim}{x_0} = \frac{(A^{-1})'\underset{\sim}{1}}{\underset{\sim}{1}'(A^{-1})\underset{\sim}{1}} = \frac{\cancel{\frac{1}{380}}\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}}{(1,1)\cdot\cancel{\frac{1}{380}}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}}{5+19} = \begin{pmatrix} 20/24 \\ 4/24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{y_0} = \frac{A^{-1}\underset{\sim}{1}}{1'A^{-1}\underset{\sim}{1}} = \frac{\cancel{\frac{1}{380}}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}}{(1\ 1)\cancel{\frac{1}{380}}\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}}{24} = \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \end{pmatrix}$$

B)

I \ II	B	N
B	50%	20%
N	80%	50%