

17. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι βετιγίες (βλ 35)

γνήσιες στρατηγικές για ένα τετραγωνικό
 πινακικό παιχνίδι στο οποίο το κέρδος του
 παίκτη I όταν αυτός διαλέξει την στρατηγική
 γ_i και ο παίκτης II την στρατηγική δ_j
 $(i, j = 1, 2, \dots, \mu)$ είναι ίσο με $a_{ij} = i - j$

Λύση: κατασκευάσουμε τον πίνακα κέρδους του
 παίκτη I

II I						ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
	δ_1	δ_2	...	δ_μ		
γ_1	0	-1	-2	...	$1-\mu$	$1-\mu$
γ_2	1	0	-1	...	$2-\mu$	$2-\mu$
$\vdots$	2	1	0	-1	...	$3-\mu$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
γ_μ	$\mu-1$	$\mu-2$	...	...	0	⊙ ← maximin
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	$\mu-1$	$\mu-2$	...	...	⊙	
					↑ minimax	

18. Δείξτε ότι ενώ τα πινακικά παιχνίδια

$$\text{με } A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και } A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

είναι αυστηρά καθορισμένα δεν ισχύει

το ίδιο για το παιχνίδι που αντιστοι-

-χεί στον πίνακα $A = A_1 + A_2$

Λύση

Για το πινακικό παιχνίδι A_1 έχουμε (6, 3, 6)

I \ II	G ₁	G ₂	
γ ₁	0	3	0
γ ₂	1	2	① ← maximin
	① ↑ minimax	3	

Έχουμε

$$\maximin = \minimax$$

αρα αυστηρά καθορισμένο

Για το παιχνίδι A_2

I \ II	G ₁	G ₂	
γ ₁	2	1	① ← maximin
γ ₂	5	0	0
	5	① ↑ minimax	

Έχουμε

$$\maximin = \minimax$$

αρα αυστηρά καθορισμένο

$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ τότε για το παιχνίδι $A_1 + A_2$

έχουμε

I \ II	G ₁	G ₂	
γ ₁	2	4	2 → maximin
γ ₂	6	2	2
	6	4 ↑ minimax	

Εδώ έχουμε

$$\maximin < \minimax$$

αρα όχι αυστηρά καθορισμένο παιχνίδι

19. Για τον πίνακα κερδών $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{\mu \times \mu}$ (βλ. 37)
 ενός παιχιδιού έχουμε $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i \neq j \\ -1 & \text{αν } i = j \end{cases}$

Δειξτε ότι οι στρατηγικές $x_0 = (\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu})'$ και
 $y_0 = (\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu})$ είναι βέλτιστες και ότι
 η τιμή του παιχιδιού είναι $U = \frac{\mu-2}{\mu}$

Λύση: Ο πίνακας κερδών A είναι

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$E(x_0, n_j) = \left(\frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}\right) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \text{ θέση} =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow j \text{ θέση} = \underbrace{\frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\mu}}_{j-1} - \underbrace{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\mu}}_{\mu-j} =$$

↑
j στήλη του πίνακα A

$$= \underbrace{\frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\mu}}_{\mu-j+j-1 = \mu-1} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-2}{\mu} - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu-2}{\mu}$$

για κάθε $j=1, 2, \dots, \mu$

Έχουμε $E(x_0, n_j) \geq U$

$\forall j=1, 2, \dots, \mu$ Άρα $U \geq \frac{\mu-2}{\mu}$

Ανάλυση ερχόμενοι έχουμε (6+38)

$$E(i, y_0) = (0 \ 0 \ \dots \ \underset{i-\text{θέση}}{1} \ 0 \ \dots \ 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \\ \frac{1}{\mu} \\ \vdots \\ \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} =$$

$$= (1, 1, \dots, 1, \underset{i-\text{θέση}}{-1}, 1, \dots, 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \\ \vdots \\ \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\mu}}_{i-1} - \frac{1}{\mu} + \underbrace{\frac{1}{\mu} + \dots + \frac{1}{\mu}}_{\mu-i} = \frac{\mu-2}{\mu}$$

i γραμμή του πίνακα A

Έχουμε $E(i, y_0) \leq U \quad \forall i = 1, 2, \dots, \mu$ Άρα

$$\frac{\mu-2}{\mu} \leq U$$

Επίσης έχουμε $\frac{\mu-2}{\mu} \leq U \leq \frac{\mu-2}{\mu}$ Άρα $U = \frac{\mu-2}{\mu}$

$$\text{Επίσης } E(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu}, \dots, \frac{1}{\mu}\right) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \\ \vdots \\ \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\mu-2}{\mu}, \frac{\mu-2}{\mu}, \dots, \frac{\mu-2}{\mu}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} \\ \vdots \\ \frac{1}{\mu} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{\mu-2}{\mu^2} + \frac{\mu-2}{\mu^2} + \dots + \frac{\mu-2}{\mu^2}}_{\mu \text{ το ίδιο}} =$$

$$= \frac{\mu(\mu-2)}{\mu^2} = \frac{\mu-2}{\mu} = U$$

20. Δείξτε ότι οι βέλτιστες
στратηγικές του διπλανού
παιχνιδιού είναι οι
 $\tilde{x}_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ και $\tilde{y}_0 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
ενώ η τιμή του είναι 0
Τι θα συμβεί αν σε όλα τα στοιχεία του
πίνακα προσθέσουμε 4 μονάδες

I \ II			
	G ₁	G ₂	G ₃
H ₁	0	1	-2
H ₂	-1	0	1
H ₃	2	-1	0

Λύση: Υπολογίζουμε

$$E(\tilde{x}_0, n_1) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} = 0$$

$$E(\tilde{x}_0, n_2) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$E(\tilde{x}_0, n_3) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ = -\frac{2}{4} + \frac{1}{2} = 0$$

Ισχύει $E(\tilde{x}_0, n_j) \geq 0 \quad \forall j=1,2,3$ Άρα $0 \geq U$

στη συνέχεια υπολογίζουμε τα χιρόμενα πινα-
κων

$$E(\tilde{y}_1, \tilde{y}_0) = (1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (0, 1, -2) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$E(\tilde{y}_2, \tilde{y}_0) = (0 \ 1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (-1 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \\ = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$E(\tilde{x}_3, \tilde{y}_0) = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= (2 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

(6€)40)

Εκουμε $E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_0) \leq U \Leftrightarrow \boxed{0 \leq U}$

$\forall i=1,2,3$

Αρα $U=0$

$$E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = \left(\frac{1}{2} \ \frac{1}{2} \ \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$= (0, 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \end{pmatrix} = 0$$

Αν προσδίδουμε 4 μονάδες ο nivaras A
 γίνεται $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Αν επαναλάβουμε τα χιόμετα

Εκουμε $E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_j) = 4 \quad \forall j=1,2,3$

$E(\tilde{x}_i, \tilde{y}_0) = 4 \quad \forall i=1,2,3$

Αρα $U=4$ και $E(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0) = 4$

23. Δείξτε ότι στο παιχνίδι με πινάκα (6.3.41)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Οι $\underline{x}_0 = \underline{y}_0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ είναι βέλτιστες

στρατηγικές με τιμή $U = 1$

(ii) Η $\underline{y}_0^* = (1, 0)$ δεν είναι βέλτιστη παρόλο

που ισχύει ότι $E(\underline{x}_0, \underline{y}_0^*) = U$

Λύση i)

$$E(\underline{x}_0, u_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = 1$$

$$E(\underline{x}_0, u_2) = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ισχύει } E(\underline{x}_0, u_j) \geq U \Leftrightarrow \boxed{1 \geq U}$$

$$E(u_1, \underline{y}_0) = (1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (2, 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$E(u_2, \underline{y}_0) = (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (0, 2) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{ισχύει } E(u_i, \underline{y}_0) \leq U \Leftrightarrow \boxed{1 \leq U} \\ \forall i=1,2$$

Άρα $U = 1$

(i) Παρατηρούμε ότι

$$E(\underline{x}_0, \underline{y}_0^*) = (\frac{1}{2} \ \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\text{Όμως } E(u_1, \underline{y}_0^*) = (1, 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

$$E(u_2, \underline{y}_0^*) = (0, 1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Εδω το maximum} = \max E(\pi_i, \underline{y}_0^x) = 2 = U > 1$$

(6.42)

$$\text{Δεν ισχύει } E(\pi_0, u_j) \geq U \geq E(\pi_i, \underline{y}_0^x)$$

Αρα το $\underline{y}_0^x$ δεν είναι βέλτιστη στρατηγική

22. Να λυθεί το παιχνίδι με πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 19 & 15 & 16 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

Λύση: Αρχικά θεωρούμε τον πίνακα που αντιστοιχεί στην 1η και 2η στήλη

$$A_1 = \begin{pmatrix} 19 & 15 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\text{έχουμε } \det A_1 = 19 \cdot 20 = 380$$

$$A_1^{-1} = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 & -15 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \text{ και } (A_1^{-1})' = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -15 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(A_1^{-1})' \cdot \underline{1} = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ -15 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A_1^{-1} \cdot \underline{1} = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 & -15 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Ολες οι συντεταγμένες έχουν το ίδιο

πρόσημο. Αρα οι βέλτιστες στρατηγικές

για τον πίνακα A_1 είναι

$$\underline{x}_0 = \frac{(A_1^{-1})' \cdot \underline{1}}{\underline{1}' (A_1^{-1})' \underline{1}} = \frac{\frac{1}{380} \begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}}{(1,1) \cdot \frac{1}{380} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 20 \\ 4 \end{pmatrix}}{5+19} = \begin{pmatrix} \frac{20}{24} \\ \frac{4}{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\underline{y}_0 = \frac{(A^{-1}) \underline{1}}{\underline{1}' A^{-1} \underline{1}} = \frac{\frac{1}{380} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}}{(1,1) \cdot \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{1}{380} \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}}{\frac{1}{380} (1,1) \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix}}{24} = (6E43)$$

$$= \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \end{pmatrix}$$

Άρα $\underline{y}_0 = \left(\frac{5}{24}, \frac{19}{24}, 0 \right)$

Βάζουμε στην τρίτη στήλη του $\underline{y}_0$ μηδέν γιατί ο πίνακας A_1 δημιουργήθηκε από τις στήλες 1 και 2

Τώρα αν επιλέξουμε τον υποπίνακα τα A που προκύπτει από την 2η και 3η στήλη

$$A_2 = \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} \text{ έχουμε}$$

$$\det A_2 = 15 \cdot 5 - 16 \cdot 20 = -245$$

$$A_2^{-1} = \frac{-1}{245} \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \text{ και } (A_2^{-1})' = -\frac{1}{245} \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -16 & 15 \end{pmatrix}$$

Έχουμε

$$(A_2^{-1})' \underline{1} = -\frac{1}{245} \begin{pmatrix} 5 & -20 \\ -16 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{245} \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{15}{245} \\ \frac{1}{245} \end{pmatrix}$$

$$A_2^{-1} \cdot \underline{1} = -\frac{1}{245} \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ -20 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{245} \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{245} \\ \frac{5}{245} \end{pmatrix}$$

Οι συντεταγμένες έχουν όλες το ίδιο πρόσημο άρα οι βέλτεστες στρατηγικές για τον

πίνακα A_2 είναι:

(66)44)

$$x_0 = \frac{(A_2^{-1})' \cdot \underline{1}}{\underline{1}' \cdot A_2^{-1} \cdot \underline{1}} = \frac{-\frac{1}{245} \begin{pmatrix} -15 \\ -1 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{245} (1 \ 1) \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -15 \\ -1 \end{pmatrix}}{-16} = \begin{pmatrix} \frac{15}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

$$y_0 = \frac{A_2^{-1} \cdot \underline{1}'}{\underline{1}' \cdot A_2^{-1} \cdot \underline{1}} = \frac{-\frac{1}{245} \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix}}{-\frac{1}{245} (1 \ 1) \begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} -11 \\ -5 \end{pmatrix}}{-16} = \begin{pmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix}$$

Τότε $y_0 = (0, \frac{11}{16}, \frac{5}{16})$ (μυδέν στη 1η στήλη

γιατί ο πίνακας A_2 δημιουργήθηκε από
τις 2η και 3η στήλες.

Αν επιδείξουμε 1η και 3η στήλη έχουμε

$$A_3 = \begin{pmatrix} 19 & 16 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \text{ τότε } \det A_3 = 19 \cdot 5 = 95$$

$$A_3^{-1} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \text{ και } (A_3^{-1})' = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -16 & 19 \end{pmatrix}$$

$$(A_3^{-1})' \cdot \underline{1} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -16 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{95} \\ \frac{3}{95} \end{pmatrix}$$

$$A_3^{-1} \cdot \underline{1}' = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} 5 & -16 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{95} \begin{pmatrix} -11 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{95} \\ \frac{19}{95} \end{pmatrix}$$

Οι συντεταγμένες δεν έχουν το ίδιο
πρόσημο. Άρα για την βέλτιστη λύση
έχουμε τις δύο προηγούμενες περιπτώσεις

$$\underline{x}_0 = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \text{ και } \underline{y}_0 = \left(\frac{5}{24}, \frac{19}{24}, 0 \right) \quad \textcircled{A}$$

$$\underline{x}_0 = \left(\frac{15}{16}, \frac{1}{16} \right) \text{ και } \underline{y}_0 = \left(0, \frac{11}{16}, \frac{5}{16} \right) \quad \textcircled{B}$$

Αρχικά για την περίπτωση $\textcircled{A}$ υπολογίζουμε
τα $E(\underline{x}_0, n_j) \quad j=1, 2, 3$

$$E(\underline{x}_0, n_1) = \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{16} \right) \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 19}{6} = \frac{95}{6}$$

$$E(\underline{x}_0, n_2) = \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{16} \right) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 15 + 20}{6} = \frac{95}{6}$$

$$E(\underline{x}_0, n_3) = \left(\frac{5}{16}, \frac{1}{16} \right) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6} \right) \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{5 \cdot 16 + 5}{6} = \frac{85}{6}$$

$$\text{Έχουμε } E(\underline{x}_0, n_j) \geq \frac{85}{6} \quad \forall j=1, 2, 3$$

Υπολογίζουμε τώρα $E(\pi_i, \underline{y}_0) \quad i=1, 2$

$$E(\pi_1, \underline{y}_0) = (1 \ 0) \cdot A \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \\ 0 \end{pmatrix} = (19 \ 15 \ 16) \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{19 \cdot 5 + 15 \cdot 19}{24} = \frac{19 \cdot 20}{24} = \frac{95}{6}$$

$$E(\pi_2, \underline{y}_0) = (0 \ 1) \cdot A \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \ 20 \ 5) \begin{pmatrix} 5/24 \\ 19/24 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{20 \cdot 19}{24} = \frac{95}{6}$$

$$E(\pi_i, \underline{y}_0) \leq \frac{95}{6} \quad \Leftrightarrow \quad E(\underline{x}_0, n_j) \geq \frac{85}{6}$$

Αρα η περίπτωση (A) δεν έχει βέλτιστη λύση

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για την περίπτωση B

$$E(\tilde{x}_0, n_1) = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) \begin{pmatrix} 19 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15 \cdot 19}{16} = \frac{285}{16}$$

$$E(\tilde{x}_0, n_2) = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{15 \cdot 15 + 20}{16} = \frac{245}{16}$$

$$E(\tilde{x}_0, n_3) = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{15}{16} \quad \frac{1}{16} \right) \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{15 \cdot 16 + 5}{16} = \frac{245}{16}$$

$$\text{Έχουμε } E(\tilde{x}_0, n_j) \geq \frac{245}{16} \quad \forall j=1,2,3$$

$$E(n_1, \tilde{y}_0) = (1 \ 0) A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} = (19 \ 15 \ 16) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{15 \cdot 11}{16} + \frac{16 \cdot 5}{16} = \frac{245}{16}$$

$$E(n_2, \tilde{y}_0) = (0 \ 1) A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} = (0 \ 20 \ 5) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{20 \cdot 11}{16} + \frac{5 \cdot 5}{16} = \frac{245}{16}$$

Αρα για την περίπτωση B έχουμε

$$\left. \begin{array}{l} \min_j E(\tilde{x}_0, n_j) \geq U \Leftrightarrow \frac{245}{16} \geq U \\ \max_i E(i, \tilde{y}_0) \leq U \Leftrightarrow \frac{245}{16} \leq U \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Αρα } U = \frac{245}{16}$$

Αρα η βέλτιστη λύση είναι

$$\underline{x}_0 = \left(\frac{15}{16}, \frac{1}{16} \right) \quad \underline{y}_0 = \left(0, \frac{11}{16}, \frac{5}{16} \right)$$

Μπορούμε στο ίδιο πρόβλημα να κάνουμε γραφική λύση γιατί έχουμε 2 γραμμές

Ερχόμαστε ως εξής

$$(x \quad 1-x) \begin{pmatrix} 19 & 15 & 16 \\ 0 & 20 & 5 \end{pmatrix} = (19x, 15x+20-20x, \frac{16x+5}{-5})$$

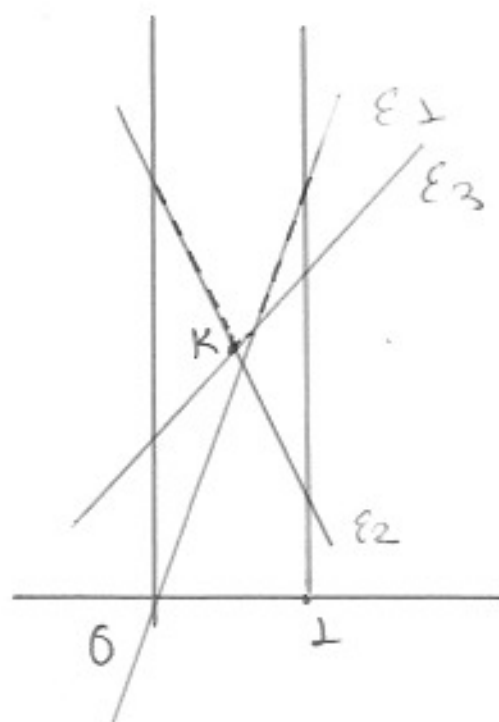
$$= (19x, -5x+20, 11x+5)$$

Σχεδιάζουμε τις ευθείες

$$E_1: y = 19x$$

$$E_2: y = -5x + 20$$

$$E_3: y = 11x + 5$$



Το σημείο K όπου τέμνεται οι δυο ευθείες με διαφορετικό πρόσημο στους συντελεστές διεύθυνσης και έχει την πιο μικρή τεταγμένη (δηλαδή y) είναι

το σημείο τομής των ευθειών E2 και E3
Αρα για το K έχουμε $-5x+20=11x+5 \Leftrightarrow 16x=15 \Leftrightarrow x=\frac{15}{16}$

Αρα $\tilde{x}_0 = \left(\frac{15}{16}, 1 - \frac{15}{16}\right) = \left(\frac{15}{16}, \frac{1}{16}\right)$ (6f) (8)

Αν $x = \frac{15}{16}$ τότε αντιπροσώπευσε στην ευθεία ε_2 ή ε_3 έχουμε

$$y = -5 \frac{15}{16} + 20 = \frac{-75 + 320}{16} = \frac{245}{16} = 0$$

Για το $\tilde{y}_0$ επιλέχουμε τον πίνακα $\begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 5 \end{pmatrix}$

γιατί έχουμε 2η και 3η ευθεία άρα 2η και 3η γνήσι του πίνακα A

ΕΤΕ,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = 15y + 16 - 16y =$$

$$= 16 - y$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & 16 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ 1-y \end{pmatrix} =$$

$$= 20y + 5 - 5y = 15y + 5$$

Εφιστώνουμε $16 - y = 15y + 5 \Leftrightarrow -16y = -11 \Leftrightarrow$

$y = \frac{11}{16}$ Αρα

$$\tilde{y}_0 = (0, y, 1-y) = \left(0, \frac{11}{16}, 1 - \frac{11}{16}\right) = \left(0, \frac{11}{16}, \frac{5}{16}\right)$$