

10. Να βρεθούν τα σημεία της περιφέρειας^(60H)
κύκλου κέντρου $(0,2)$ και ακτίνας 1 που
απέχουν από το σημείο $(3,2)$ ελάχιστη
και μέγιστη απόσταση

Λύση: Η εξίσωση κύκλου είναι

$$x^2 + (y-2)^2 = 1. \quad \text{Αν } A(x,y) \text{ τυχαίο σημείο}$$

της περιφέρειας του κύκλου τότε η απόστα-
ση του A από το σημείο $M(3,2)$ είναι

$$AM = d(A, M) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$$

Θέλουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτη-
σης με τύπο $\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}$ που είναι ίδια

με τα ακρότατα της συνάρτησης με τύπο

$$f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 \quad \text{όταν ισχύει η}$$
$$\text{συνθήκη} \quad g(x,y) = x^2 + (y-2)^2 - 1 = 0$$

Σχηματίζουμε την συνάρτηση Lagrange

$$L(x,y,\lambda) = L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) =$$
$$= (x-3)^2 + (y-2)^2 - \lambda (x^2 + (y-2)^2 - 1)$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους
 L_x, L_y, L_λ

$$L_x = 2(x-3) - 2\lambda x = 0 \Leftrightarrow 2(x-\lambda x-3) = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)x-3=0 \quad (1)$$

$$L_y = 2(y-2) - 2 \cdot 2(y-2) = 2(y-2)(1-\lambda) = 0 \quad (2)$$

$$L_\lambda = -(x^2 + (y-2)^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 = 1 \quad (3)$$

Από την επίλυση (2) Αν $\lambda = 1$ τότε από την (1) έχουμε $(1-1)x-3=0 \Leftrightarrow -3=0$ Απογο

Από $\lambda \neq 1$ Έτσι από την επίλυση (2) έχουμε $2(y-2)(1-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \boxed{y=2}$

Τότε από την (3) έχουμε $x^2 + 0^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Αν $x=1$ από την (1) έχουμε $1-\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=-2$

Αρα ένα σταθιμο σημείο είναι $(x, y, \lambda) = (1, 2, -2)$

Αν $x=-1$ από την (1) έχουμε $(1-\lambda)(-1)-3=0 \Leftrightarrow$

$$-1+\lambda-3=0 \Leftrightarrow \lambda=4$$

Από το δεύτερο σταθιμο σημείο είναι

$$(-1, 2, 4)$$

Εδώ $\mu=1$ γιατί έχουμε μια συνθήκη

Προσδιορίζουμε τον πίνακα

$$H_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0_{m \times 2} & P \\ P' & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}$$

$$P = \nabla g = (g_x, g_y) = (2x, 2(y-2))$$

$$Q = \begin{pmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2\lambda & 0 \\ 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\text{Αρα } H_E(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2(y-2) \\ 2x & 2-2\lambda & 0 \\ 2(y-2) & 0 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Για το σημείο $(1, 2, -2)$ έχουμε

$$H_E(1, 2, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Έχουμε $\mu = 1$ αρα υπολογίζουμε την ορίζουσα
 $2 \cdot 1 + 1 = 3$ τάξης. Έδω $\nu = 2$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot (0 \cdot 6 - 2 \cdot 2) = -24$$

+ - +

έχει ίδιο πρόσημο με το $\epsilon_1' = -1 < 0$

Αρα το σημείο $(1, 2)$ είναι σημείο
 ελάχιστου

Για το σημείο $(-1, 2, 4)$ έχουμε

$$H_E(-1, 2, 4) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

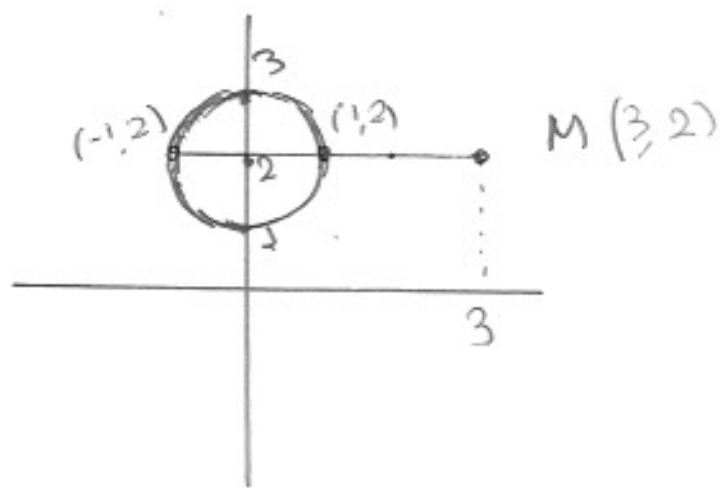
Όπως και πριν υπολογίζουμε την ορίζουσα 3×3 (3ης τάξης)

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -6(0 \cdot (-6) - (-2)(-2)) =$$

$$= -6 \cdot (-4) = 24 > 0 \quad \text{έχει το ίδιο πρόσημο}$$

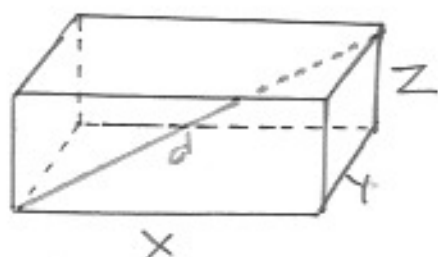
$$\text{με το } (-1)^{\mu+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 = 1 > 0 \quad \text{Αρα το σημείο}$$

$(-1, 2)$ είναι σημείο μέγιστου



11. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα (6ε>21)
με δοσμένη διαχώνιο d να βρεθεί εκείνο το
οποίο μεγιστοποιεί τον όγκο

Λύση



$$\text{ισχύει } x^2 + y^2 + z^2 = d^2$$

Ο όγκος δίνεται από
την συνάρτηση

$V(x, y, z) = x \cdot y \cdot z$ της οποίας θέλουμε
να βρούμε τότε γίνεται μέγιστη

$$\text{Έχουμε } g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - d^2$$

$$\text{Η συνάρτηση } L(x, y, z, \lambda) = V(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) =$$

$$= xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - d^2)$$

$$x > 0, y > 0, z > 0$$

$$L_x = yz - 2\lambda x = 0 \quad (1) \quad yz = 2\lambda x$$

$$L_y = xz - 2\lambda y = 0 \quad (2) \quad xz = 2\lambda y$$

$$L_z = xy - 2\lambda z = 0 \quad (3) \quad xy = 2\lambda z$$

$$L_\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2 - d^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \quad (4)$$

$$\text{Από } \frac{(1)}{(2)} \text{ έχουμε } \frac{yz}{xz} = \frac{2\lambda x}{2\lambda y} \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow$$

$$y^2 = x^2 \text{ Άρα } y = x \text{ για } y, x > 0$$

$$\text{Από } \frac{(2)}{(3)} \text{ έχουμε } \frac{xz}{xy} = \frac{2\lambda y}{2\lambda z} \Leftrightarrow \frac{z}{y} = \frac{y}{z} \Leftrightarrow$$

$$z^2 = y^2 \Leftrightarrow y = z \text{ για } y, z > 0$$

Από $x=y=z$ Από από την (4) έχουμε (6f) 22)

$$x^2 + x^2 + x^2 = d^2 \Leftrightarrow 3x^2 = d^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{d^2}{3} \Leftrightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}d}{3}$$

Από $x=y=z = \frac{\sqrt{3}}{3} d$ και για το λ έχουμε από την

$$(1) \quad \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} d = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \lambda = \frac{\sqrt{3}d}{6}$$

Από το σταθμό βήμιο είναι

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} d, \frac{\sqrt{3}}{3} d, \frac{\sqrt{3}}{3} d, \frac{\sqrt{3}d}{6} \right)$$

Έστω $\mu=1$ και $\nu=3$ Δηλαδή έχουμε μια ανδία g και 3 μεταβλητές.

Προσδιορίζουμε τον πίνακα

$$H_E = \begin{bmatrix} O_{1 \times 1} & P \\ P' & Q \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda & z & y \\ z & -2\lambda & x \\ y & x & -2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{Από } H_E(x, y, z, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & z & y \\ 2y & z & -2\lambda & x \\ 2z & y & x & -2\lambda \end{bmatrix}$$

Προσδιορίζουμε τον πίνακα

$$H_{\varepsilon}\left(\frac{\sqrt{3}d}{3}, \frac{\sqrt{3}d}{3}, \frac{\sqrt{3}d}{3}, \frac{\sqrt{3}d}{6}\right) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{2\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} \end{bmatrix}$$

Αφού $\mu=1$ υπολογίζουμε τις ορίζουσες 3×3 και 4×4 για $V-\mu=3-1=2$

Η 3×3 ορίζουσα είναι

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{2\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} \end{vmatrix} = \frac{2\sqrt{3}d}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}d}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}d}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot d^3 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} d^3 \cdot (-(-2-2) + (2+2)) =$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{9} d^3 \cdot 8 = \frac{16\sqrt{3}}{9} d^3 > 0 \text{ ίδιο πρόσημο με}$$

$$\text{το } (-1)^{\mu+1} = (-1)^{1+1} = (-1)^2 > 0$$

Η 4×4 ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{2\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & \frac{\sqrt{3}d}{3} & -\frac{\sqrt{3}d}{3} \end{vmatrix} = \text{(Από ιδιότητες ορίζουσών έχουμε)}$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}d \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}d \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$(-1) \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad} \xrightarrow{\quad}$

$$\frac{2}{9} \cdot d^4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{9} d^4 \cdot \left(- \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= \frac{2}{9} d^4 \left(- (1 \cdot 8) - 2 \cdot \left(-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{9} d^4 (-8 - 2(-2(-2) + 2(-2))) =$$

$$= \frac{2}{9} d^4 (-8 - 2(4 - 4)) = -\frac{16}{9} d^4 < 0$$

Εχουμε πρόβλημα εναλλαγή. Αρα το παρα-

-> > ενίστεδο με το μέγιστο όγκο έχει

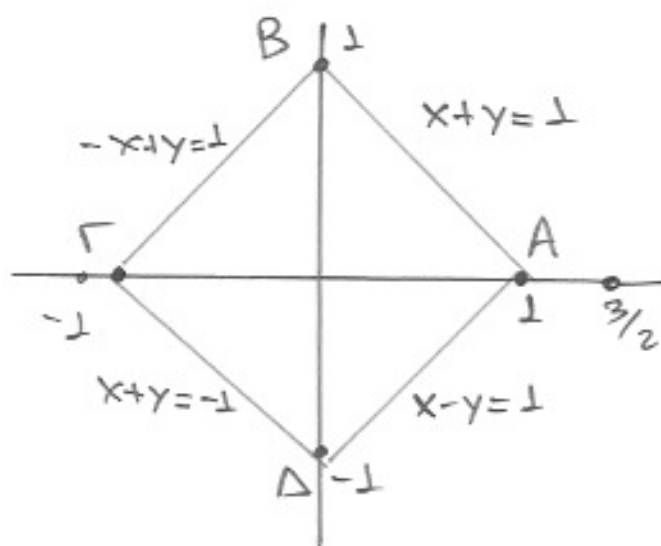
διαστάσεις $x = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, $y = \frac{\sqrt{3}}{3}d$, $z = \frac{\sqrt{3}}{3}d$

και είναι κύβος

12. Βρείτε τα ακρότατα της $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3x$
στο χωρίο $|x| + |y| \leq 1$

Λύση Θέτουμε $|x| + |y| = 1$ και διακρίνουμε

περιπτώσεις $x > 0, y > 0$ $x + y = 1$
 $x > 0, y < 0$ $x - y = 1$
 $x < 0, y > 0$ $-x + y = 1$
 $x < 0, y < 0$ $x + y = -1$



Θέλουμε τα
ακρότατα της
 $f(x,y)$ όταν
 (x,y) ανήκει
στο τετράγωνο
ABΓΔ

$$f_x = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$f_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Το σημείο $(\frac{3}{2}, 0)$

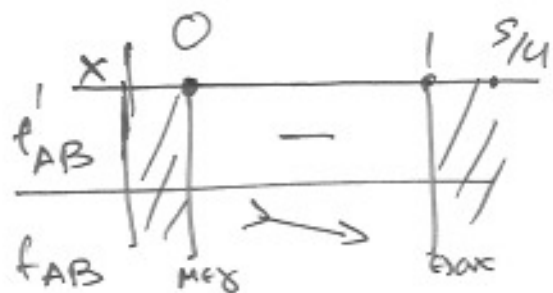
δεν είναι εσωτερικό
στο τετράγωνο ABΓΔ

• Αν κινούμαστε στην ευθεία AB: $x + y = 1 \Leftrightarrow y = -x + 1$
 $x \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \text{Τότε } f_{AB}(x,y) &= x^2 + (-x+1)^2 - 3x = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 3x = \\ &= 2x^2 - 5x + 1 \end{aligned}$$

Αρα $f_{AB}(x) = 2x^2 - 5x + 1$

$f'_{AB}(x) = 4x - 5$



Εχουμε ακρότατα όταν $x=0$ αρα $y=1$ (0,1)

και όταν $x=1$ και $y=-1+1=0$ Αρα (1,0)

•• Αν κινούμαστε στην ευθεία AD: $x-y=1 \Leftrightarrow$
 $y=x-1$ όταν $x \in [0, 1]$

$f_{AD} = x^2 + (x-1)^2 - 3x = x^2 + x^2 - 2x + 1 - 3x = 2x^2 - 5x + 1$

είναι ίδιο με το f_{AB}

Εχουμε ακρότατο όταν $x=0$ τότε $y=-1$ (0,-1)

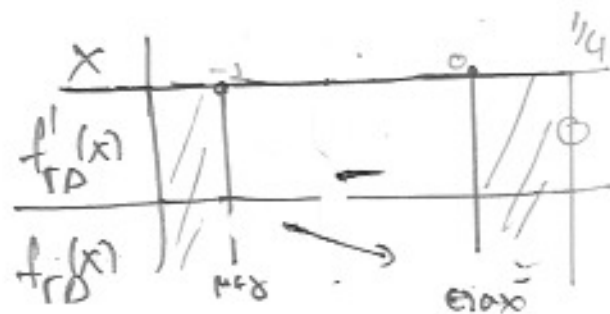
και όταν $x=1$ και $y=0$ αρα πάλι το σημείο (1,0)

••• Αν κινούμαστε στην ευθεία ΓΔ: $x+y=-1 \Leftrightarrow$

$y=-x-1$ με $x \in [-1, 0]$

Τότε $f_{\Gamma D}(x) = x^2 + (-x-1)^2 - 3x = x^2 + x^2 + 2x + 1 - 3x = 2x^2 - x + 1$

$f'_{\Gamma D}(x) = 4x - 1$



Η $f_{\Gamma\Delta}$ παρουσιάζει ακρότατα όταν $x = -1$ τότε

$$y = -(-1-1) = 0 \quad (-1, 0) \quad \text{και} \quad \text{όταν} \quad x = 0$$

$$\text{Αρα} \quad y = -(-0-1) = -1 \quad \text{αρα το σημείο} \quad (0, -1)$$

$\therefore$ Αν κινούμαστε στην ευθεία ΒΓ: $-x+y=1 \Leftrightarrow$

$$y = x+1 \quad x \in [-1, 0]$$

$$f_{\text{ΒΓ}}(x) = x^2 + (x+1)^2 - 3x = 2x^2 - x + 1$$

έχει τον ίδιο πίνακα προσημίων με την $f_{\Gamma\Delta}$

αρα έχει ακρότατο όταν

$$x = -1 \quad \text{και} \quad y = -1+1 = 0 \quad \text{Αρα} \quad (-1, 0)$$

$$x = 0 \quad \text{και} \quad y = 0+1 = 1 \quad \text{Αρα} \quad (0, 1)$$

Αρα οι δέσμες πιθανών ακρότατων για την $f(x, y)$ είναι τα σημεία

$$(0, 1) \quad (1, 0) \quad (0, -1) \quad (-1, 0) \quad .$$

Υπολόγισουμε την f στα σημεία αυτά

$$f(0, 1) = 0^2 + 1^2 - 3 \cdot 0 = 1, \quad f(1, 0) = 1^2 + 0^2 - 3 \cdot 1 = -2$$

$$f(0, -1) = 0^2 + (-1)^2 - 3 \cdot 0 = 1 \quad f(-1, 0) = (-1)^2 + 0^2 - 3 \cdot (-1) = 4$$

Αρα $f_{\max} = 4$ στη θέση $(-1, 0)$ και $f_{\min} = -2$ στο σημείο $(1, 0)$

13. Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη I για το παιχνίδι:

Ο παίκτης II κρύβει στο κέρι 1 ή 2 ή ... ή v νομίσματα και ο παίκτης I δέει "άρτιος" ή "περιττός". Αν ο I μαντέψει σωστά κερδίζει το ποσό που κρύβει ο II αλλιώς πληρώνει το ποσό αυτό στον II.

Λύση

I \ II					
	1	2	3	...	v
Αρτιος	1	2	-3		$(-1)^v v$
Περιττός	1	-2	3	...	$(-1)^v v$

14. Να σχηματίσετε τον πίνακα κερδών του παίκτη I για το παιχνίδι

Δύο αντιπαλές αυτοκινητοβιομηχανίες σκοπεύουν να ιδρύσουν από ένα ερχοστάσιο σε μια χώρα για την κάλυψη των εσωτερικών τους αναγκών σε αυτοκίνητα. Η κάθε βιομηχανία προβληματίζεται αν θα πρέπει να ιδρύσει το ερχοστάσιο στο βόρειο (B) τμήμα της χώρας όπου κατοικεί το 60% του πληθυσμού ή στο νότιο (N) όπου κατοικεί το 40%.

Αν τα ερχοστάγια ιδρυθούν στο ίδιο τμήμα (6^{ος} 2^{ος})
 οι βιομηχανίες θα μοιραστούν ισομερώς την
 εσωτερική αγορά ενώ αν ιδρυθούν σε διαφο-
 ρετικό τμήμα η κάθε μία θα πάρει
 αποκλειστικά και μόνο την αγορά του τμήμα-
 -τος όπου ανήκει

Λύση

I \ II	B	N
B	50%	60%
N	40%	50%

15. Να βρεθούν οι maximin και minimax στρατη-
 -γικές για τους παίκτες I και II αντίστοιχα
 του παιχνιδιού που περιγράφεται από τον
 παρακάτω πίνακα κερδών του παίκτη I

I \ II	G ₁	G ₂	G ₃	G ₄
δ ₁	1	2	0	3
δ ₂	2	3	2	5
δ ₃	3	0	1	4

Λύση: συμπληρώνουμε τον πίνακα με την στήλη
 με τα ελάχιστα των γραμμών και τη γραμμή
 με τα μέγιστα των στηλών

Ε+61 έχουμε

(6Ε30)

	G_1	G_2	G_3	G_4	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
γ_1	1	2	0	3	0
γ_2	2	3	2	5	2 ← maximin
γ_3	3	0	1	4	0
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	3	3	2	5	

↑
minimax

16. Για ποιες τιμές των παραμέτρων a και b το δινόμενο παιχνίδι έχει
 σαν maximin και minimax στρα-
 τηγικές τις γ_2 και G_2 αντίστοιχα

I \ II	G_1	G_2	G_3
γ_1	1	b	3
γ_2	a	5	10
γ_3	6	2	3

Λύση Συμπληρώνουμε τον πίνακα κέρδους
 με τα ελάχιστα των γραμμών και τα μέγ-
 ιστα των στηλών

I \ II	G_1	G_2	G_3	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
γ_1	1	b	3	$b \wedge 1$
γ_2	a	5	10	$a \wedge 5$ ← maximin
γ_3	6	2	3	2
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	$a \vee 6$	$5 \vee b$	10	

↑
minimax

Αφού
 πρέπει $\max_{\min}$ είναι $a \wedge 5$ (όταν $a < 10$)
 $\min \{a, 5\} > \min \{b, 1\}$ (όταν $b < 3$)
 όταν $a < 10$

και ακόμη $\min\{a, 5\} > 2$

(6632)

Κάνουμε τον παρακάτω πίνακα θέσης του a

a	$-\infty$	5	$+\infty$
Θέση a			
	$a < 5$	$5 \leq a$	
	περίπτωση (A)	περίπτωση (B)	

Επίσης δημιουργούμε τον πίνακα θέσης του b

b	$-\infty$	1	$+\infty$
Θέση b			
	$b < 1$	$1 \leq b$	
	περίπτωση (Γ)	περίπτωση (Δ)	

Παίρνουμε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των περιπτώσεων A, B, Γ, Δ

A και Γ : Άρα $a < 5$ και $b < 1$

A και Δ : Άρα $a < 5$ και $b \geq 1$

B και Γ : Άρα $a \geq 5$ και $b < 1$

B και Δ : Άρα $a \geq 5$ και $b \geq 1$

Επίσης πρέπει $\min\{a, 5\} > 2$ άρα
αν ισχύει η A και Γ πρέπει $a > 2$ και
αν ισχύει η A και Δ πρέπει επίσης $a > 2$

Αν ισχύουν οι περιπτώσεις Β και Γ ή Β και Δ (6f32)
 τότε έχουμε $\min\{a, 5\} = 5$ όπου $5 > 2$ άρα ισχύει
 $\min\{a, 5\} > 2$

Ετσι έχουμε τεθείκα τις περιπτώσεις που προκύπτουν από το maximin

①: $2 < a < 5$ και $b < 1$

②: $2 < a < 5$ και $b \geq 1$

③: $a \geq 5$ και $b < 1$

④: $a \geq 5$ και $b \geq 1$

Αν ισχύει η περίπτωση ① τότε ο πίνακας κέρδους γίνεται για το minimax

I \ II				ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
	G ₁	G ₂	G ₃	
γ ₁	1	b	3	b
γ ₂	a	5	10	a ← maximin
γ ₃	6	2	3	2
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	6	5 ↑ minimax	10	

Η G₂ είναι minimax άρα η παραπάνω περίπτωση είναι δεκτή

Αν ισχύει η περίπτωση (2) ο πίνακας κέρδους (6x33)

δίνεται

I \ II	G1	G2	G3	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
γ1	1	b	3	1
γ2	a	5	10	a ← maximin
γ3	6	2	3	2
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	6	b ή 5	10	

↑
minimax

Πρέπει $b \text{ ή } 5 < 6$ Άρα πρέπει $b \leq 6$

Άρα η περίπτωση (2) δίνει $2 < a < 5$ και $1 \leq b \leq 6$

Αν ισχύει η περίπτωση (3) τότε ο πίνακας

κέρδους δίνεται

	G1	G2	G3	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
γ1	1	b	3	b
γ2	a	5	10	5 ← maximin
γ3	6	2	3	2
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	a ή 6	5	10	

↑
minimax

Δεκτή περίπτωση

Αν ισχύει η περίπτωση (4) ο πίνακας κέρδους δίνεται

I \ II	G1	G2	G3	ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΓΡΑΜΜΗΣ
γ1	1	b	3	1
γ2	a	5	10	5 ← maximin
γ3	6	2	3	2
ΜΕΓΙΣΤΟ ΣΤΗΛΗΣ	a ή 6	b ή 5	10	

↑
minimax

Πρέπει

$$\max\{b, 5\} < \max\{a, 6\} \quad a \geq 5$$

$$\text{Αν } b \leq 5 \text{ τότε } \max\{b, 5\} < \max\{a, 6\} \Leftrightarrow$$

$$5 < \max\{a, 6\}$$

Αρα δεκτή η περίπτωση $1 \leq b \leq 5 \text{ και } a \geq 5$

$$\text{Αν } b \geq 5 \text{ τότε } \max\{b, 5\} = b < \max\{a, 6\}$$

$$\text{Αν } a \leq 6 \text{ τότε } \max\{a, 6\} = 6 \text{ και πρέπει } b < 6$$

$$\text{Αρα έχουμε } 5 \leq b < 6 \text{ και } 5 \leq a \leq 6$$

$$\text{Αν } b \geq 5 \text{ και } a \geq 6 \text{ πρέπει } \max\{b, 5\} = b < a = \max\{a, 6\}$$

Αρα πρέπει $b \leq a$ έτσι έχουμε την περίπτωση

$$b \geq 5 \text{ και } a \geq 6 \text{ και } b \leq a$$

Έχουμε τελικά τις περιπτώσεις

$$\bullet \quad 2 < a < 5 \text{ και } b < 1$$

$$\bullet \bullet \quad 2 < a < 5 \text{ και } 1 \leq b \leq 6$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad a \geq 5 \text{ και } b < 1$$

$$\bullet \bullet \quad a \geq 5 \text{ και } 1 \leq b \leq 5$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad 5 \leq a \leq 6 \text{ και } 5 \leq b \leq 6$$

$$\bullet \bullet \bullet \quad b \geq 5 \text{ και } a \geq 6 \text{ και } b \leq a \text{ και } b < 10$$