

# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ (6ΕΔ)

1. Να γραφτεί η τετραγωνική που αντιστοιχεί στον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Λύση Άρα η τετραγωνική μορφή είναι

$T(x_1, x_2, x_3) =$  θα προκύψει από την μορφή

του πίνακα  $\frac{1}{2}(A+A')$  που είναι συμμετρικός

$$\frac{1}{2} \cdot (A+A') = \frac{1}{2} \left( \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -5 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$T(x_1, x_2, x_3) = a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + a_{33} \cdot x_3^2 + 2a_{12} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2a_{13} \cdot x_1 \cdot x_3 + 2a_{23} \cdot x_2 \cdot x_3$$

$$\text{Άρα } T(x_1, x_2, x_3) = 4 \cdot x_1^2 + x_2^2 + 3 \cdot x_3^2 - 5 x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + 0 x_2 \cdot x_3$$

2. Να βρεθεί ο πίνακας της τετραγωνικής

$$\text{μορφής } T(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1 \cdot x_2 - 6x_1 \cdot x_3 + 8x_2 \cdot x_3$$

Λύση Ο πίνακας  $\frac{1}{2}(A+A')$  είναι

$$\frac{1}{2}(A+A') = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Γιατί } a_{11} = 1 \\ a_{22} = -3 \\ a_{33} = -5 \end{array}$$

$$a_{12} = a_{21} = \frac{4}{2} = 2, \quad a_{13} = a_{31} = \frac{-6}{2} = -3, \quad a_{23} = a_{32} = \frac{8}{2} = 4 \quad (6 \text{ ε} \cdot 2)$$

$$\text{Αρα } A + A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & -6 & 8 \\ -6 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Αν } A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{Αρα } 2x_{11} = 2 \Leftrightarrow x_{11} = 1$$

$$2 \cdot x_{22} = -6 \text{ Α}$$

$$x_{22} = -3$$

$$A + A' = \begin{pmatrix} 2 \cdot x_{11} & x_{12} + x_{21} & x_{13} + x_{31} \\ x_{21} + x_{12} & 2 \cdot x_{22} & x_{23} + x_{32} \\ x_{31} + x_{13} & x_{32} + x_{23} & 2 \cdot x_{33} \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot x_{33} = -10 \Leftrightarrow$$

$$x_{33} = -5$$

$$x_{12} + x_{21} = 4$$

$$x_{23} + x_{32} = 8$$

$$x_{13} + x_{31} = -6$$

Εδώ έχουμε απροσές επιλογές  
Μια εκδοχή

$$x_{12} = 1, \quad x_{21} = 3$$

$$x_{23} = 6, \quad x_{32} = 2$$

$$x_{13} = 5, \quad x_{31} = -11$$

$$\text{ΕΤΓΙ } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ -11 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Να εφετάβετε ως προς την οριστικότητα  
η τετραγωνική μορφή

$$-6x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_1 \cdot x_3$$

Λύση

Ο πίνακας  $\frac{1}{2}(A+A')$  της τετραγωνικής μορφής <sup>(6.3)</sup>

είναι

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -6-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I_3| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} + (-1-\lambda) \begin{vmatrix} -6-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (1 \cdot 0 - (-1-\lambda) \cdot 2) + (-1-\lambda) ((-6-\lambda)(-1-\lambda) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \cdot (1 + \lambda) \cdot 2 - (1 + \lambda) (6 + 6\lambda + \lambda + \lambda^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1) (4 - 6 - 6\lambda - \lambda - \lambda^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda + 1) \cdot (-\lambda^2 - 7\lambda - 1) = 0 \begin{cases} \rightarrow \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \\ \rightarrow -\lambda^2 - 7\lambda - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-7)^2 - 4(-1)(-1) = 45$$

$$\lambda = \frac{7 + \sqrt{45}}{-2}$$

$$\lambda = \frac{7 - \sqrt{45}}{-2}$$

Έχουμε τις ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -1 < 0$$

$$\lambda_2 = -\frac{7+\sqrt{45}}{2} < 0$$

$$\lambda_3 = -\frac{7-\sqrt{45}}{2} < 0$$

Αφού όλες οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές τότε η τετραγωνική μορφή είναι οριστικά αρνητική

4. Εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα είναι κυρτά

$$i) \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1^2 + 6x_2^2 \leq 6 \right\}$$

$$ii) \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \cdot x_2 \leq 1, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

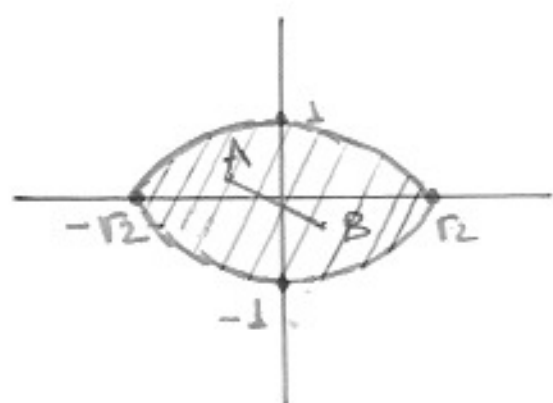
Λύση

$$i) \text{ Έχουμε } 3x_1^2 + 6x_2^2 \leq 6 \Leftrightarrow x_1^2 + 2x_2^2 \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}x_1^2 + x_2^2 \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{1} \leq 1$$

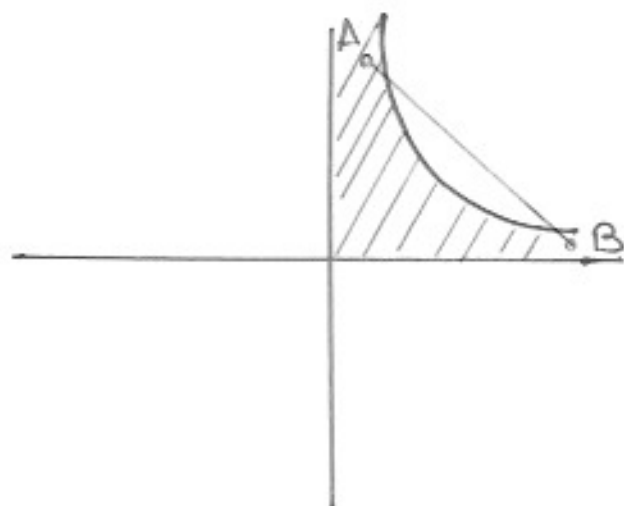
$$\text{Η εξίσωση } \frac{x_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{x_2^2}{1^2} = 1 \text{ είναι έλλειψη}$$

$$\text{Αρα έχουμε τα εσωτερικά σημεία της έλλειψης } \frac{x_1^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{x_2^2}{1^2} = 1$$



Είναι κυρτό

(i) Έχουμε  $x_1 \cdot x_2 \leq 1 \Leftrightarrow x_2 \leq \frac{1}{x_1}$



Οχι κυρτό

5. Εξετάστε ως προς την κυρτότητα τις συναρτήσεις - 6Ε19

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 + 4 \cdot x_3^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_3 + 4 \cdot x_2 \cdot x_3$$

Λύση Η  $f$  είναι τετραγωνική μορφή  
με πίνακα  $\frac{1}{2}(A+A') = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

Βρίσκουμε την οριστικότητα του πίνακα με τον υπολογισμό των ελασσονων ορίσμων

$$\varepsilon_1 = 2 \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det \varepsilon_1 = 2 > 0$$

$$\det \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\det \varepsilon_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{i-1} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) =$$

$$= 2 \cdot (4 - 1) = 2 \cdot 3 = 6 > 0$$

Αρα αφού όλες οι οριζουσες θετικες

ο πίνακας οριστικά θετικός άρα και η

συνάρτηση  $f$  κυρτή

6. Να βρεθούν το  $\vec{\nabla} f$  και ο Εσσιανός πίνακας  $H_f$  της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^2 + 2 \cdot y^2 + 3 \cdot z^2 - x \cdot y - 2yz - 3zx$$

Λύση: Βρίσκουμε τις μερικές παράγωγοι της  $f(x, y, z)$

$$f_x = 2 \cdot x - y - 3z$$

$$f_y = 4y - x - 2z$$

$$f_z = 6z - 2y - 3x$$

$$\text{Αρα } \vec{\nabla} f = (2x - y - 3z, 4y - x - 2z, 6z - 2y - 3x)$$

$$f_{xx} = 2 \quad f_{xy} = -1 \quad f_{xz} = -3$$

$$f_{yy} = 4 \quad f_{yz} = -2, \quad f_{zz} = 6$$

Αρα ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

7. Υποθέτουμε ότι η πίεση σε ένα σημείο

$(x, y, z)$  ενός υγρού δίνεται από τον

$$\text{τύπο } f(x, y, z) = x^2 \cdot y + 2 \cdot y \cdot z^2 + 3x \cdot y \cdot z$$

Να βρεθεί η κατεύθυνση προς την

οποία θα πρέπει να κινηθεί ένας

δύτης που βρίσκεται στη θέση  $q = (1, 1, 2)$

ώστε να ελαττωθεί η πίεση όσο το δυνατόν χειρότερα

Λύση : Η κατεύθυνση ως προς την οποία (688) πρέπει να κινηθεί ώστε να έχουμε χρήση μείωση της πίεσης είναι ίση με

$$-\vec{\nabla} f(\underline{a}) = -\vec{\nabla} f(1,1,2)$$

$$f_x = 2xy + 3yz \quad f_x(1,1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 8$$

$$f_y = x^2 + 2 \cdot z^2 + 3xz \quad f_y(1,1,2) = 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 1 \cdot 2 = 15$$

$$f_z = 2yz - 3xy \quad f_z(1,1,2) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Αρα } -\vec{\nabla} f(1,1,2) = - (f_x(1,1,2), f_y(1,1,2), f_z(1,1,2)) =$$

$$= - (8, 15, 1) = (-8, -15, -1)$$

8. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = e^x \cdot \sin x$$

$$\text{Λύση} \quad f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = -\cos x \Leftrightarrow \sin x = \cos(\pi - x) \Leftrightarrow$$

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi + x\right) \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = 2k\pi + x - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \quad \text{Αδύνατο}$$

$$x = 2k\pi + \pi - (x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow x = 2k\pi + \pi - x + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{4}$$

$$f'(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = e^x(\sin x + \cos x + \cos x - \sin x) \\ = e^x \cdot 2 \cdot \cos x = 2 \cdot \cos x \cdot e^x$$

$$f''(k\pi + \frac{3\pi}{4}) = 2 \cos(k\pi + \frac{3\pi}{4}) \cdot e^{k\pi + \frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Πο } \cos(k\pi + \frac{3\pi}{4}) = (-1)^k \cdot (-\frac{\sqrt{2}}{2}) = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Εποί, } f''(k\pi + \frac{3\pi}{4}) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{k\pi + \frac{3\pi}{4}} \cdot (-1)^{k+1} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot e^{k\pi + \frac{3\pi}{4}} \cdot (-1)^{|k|} \begin{cases} \text{Θετικό όταν } k = \text{περιττός} \\ \text{Αρνητικό όταν } k = \text{άρτιο} \end{cases}$$

Αρα όταν  $k$  άρτιος  $\hookrightarrow f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και όταν  $k$  περιττός  $\hookrightarrow f$  παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο.

9. Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων

$$i) f(x,y) = x^3 + 2xy + 8y^3$$

$$ii) f(x,y) = (x+y)e^{-(x^2+y^2)}$$

$$iii) f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x \cdot y$$

Λύση i)  $f_x = 3x^2 + 2y$

$$f_y = 2x + 24y^2$$

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow 2y = -3x^2 \Leftrightarrow y = -\frac{3}{2}x^2 \quad (66) \cup (0)$$

$$f_y = 0 \Leftrightarrow 2x + 24y^2 = 0 \Leftrightarrow x + 12y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 12 \cdot \left(-\frac{3}{2}x^2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \cancel{12}^3 \cdot \frac{9}{4} x^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x + 27x^4 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (1 + 27x^3) = 0 \begin{cases} x=0 \\ 1 + 27x^3 = 0 \Leftrightarrow \\ x^3 = -\frac{1}{27} \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Αν  $x=0$  τότε  $y = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 = 0$  Άρα  $(0,0)$

Αν  $x = -\frac{1}{3}$  τότε  $y = -\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$  Άρα το

$$\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$$

Έχουμε τα σταθίμα σημεία  $(0,0)$  και  $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$   
στα οποία θα ελέγξουμε το είδος των ακρότα-  
των

Υπολογίζουμε τον Εξισωτικό πίνακα

$$f_{xx} = 6x \quad f_{xy} = 2 \quad f_{yy} = 48y$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2 \\ 2 & 48y \end{pmatrix}$$

Για το σημείο  $(0,0)$  έχουμε

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = 0 \quad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \varepsilon_1 = 0 \quad \det \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4$$

$$\text{Έχουμε } (-1)^1 \cdot \det \varepsilon_1 = 0 \quad \text{και } (-1)^2 \det \varepsilon_2 = -4$$

Ο πίνακας  $H_f(0,0)$  είναι μη οριστικός. Άρα έχουμε βαλυσματικό σημείο.

Για το σημείο  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$  έχουμε

$$H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} 6(-\frac{1}{3}) & 2 \\ 2 & 48(-\frac{1}{6}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Έχουμε } \det \varepsilon_1 = -2$$

$$\det \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = 16 - 4 = 12$$

$$\text{Έχουμε } (-1)^1 \cdot \det \varepsilon_1 = -1 \cdot (-2) > 0$$

$$(-1)^2 \det \varepsilon_2 = 1 \cdot 12 > 0$$

Ο πίνακας  $H_f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$  είναι οριστικά αρνητικός

άρα στο σημείο  $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$  η συνάρτηση  $f$  παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

$$ii) f(x,y) = (x+y) e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_x = e^{-(x^2+y^2)} + (x+y) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) = e^{-(x^2+y^2)} (1 - 2x(x+y)) = e^{-(x^2+y^2)} (1 - 2x^2 - 2xy)$$

$$f_y = e^{-(x^2+y^2)} + (x+y) \cdot e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) = e^{-(x^2+y^2)} (1 - 2y(x+y)) = e^{-(x^2+y^2)} (1 - 2yx - 2y^2)$$

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 1 - 2x^2 - 2xy = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2xy = 1$$

$$f_y = 0 \Leftrightarrow 1 - 2yx - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow 2y^2 + 2xy = 1$$

$$\text{Λύνουμε το σύστημα } 2x^2 + 2xy = 2y^2 + 2xy \Leftrightarrow$$

$$2x^2 = 2y^2 \Leftrightarrow x^2 = y^2 \Leftrightarrow y = \pm x$$

$$\text{Αν } y = x \text{ τότε } 2x^2 + 2x \cdot x = 1 \Leftrightarrow 4x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ ή } -\frac{1}{2} \quad \text{Αρα αν } x = \frac{1}{2} \text{ τότε } y = \frac{1}{2} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Αν } x = -\frac{1}{2} \text{ τότε } y = -\frac{1}{2} \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Αν } y = -x \text{ τότε έχουμε } 2x^2 - 2x^2 = 1 \text{ Απορρ.}$$

Έχουμε τα στάθμα σημεία  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  και  $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ .

Υπολογίζουμε την Εξισών και συνάρτηση +

$$\begin{aligned} f_{xx} &= e^{-(x^2+y^2)} (-2x) \cdot (1-2x^2-2xy) + e^{-(x^2+y^2)} \cdot (-4x-2y) = \\ &= e^{-(x^2+y^2)} (-2x + 4x^3 + 4x^2y - 4x - 2y) = \\ &= e^{-(x^2+y^2)} (4x^3 + 4x^2y - 6x - 2y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy} &= e^{-(x^2+y^2)} (-2y) \cdot (1-2x^2-2xy) + e^{-(x^2+y^2)} (-2x) = \\ &= e^{-(x^2+y^2)} (-2y + 4x^2y + 4xy^2 - 2x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{yy} &= e^{-(x^2+y^2)} (-2y) (1-2yx-2y^2) + e^{-(x^2+y^2)} (-2x-4y) = \\ &= e^{-(x^2+y^2)} (-2y + 4y^2x + 4y^3 - 2x - 4y) = \\ &= e^{-(x^2+y^2)} (4y^3 + 4y^2x - 2x - 6y) \end{aligned}$$

Για το σημείο  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  έχουμε

$$\begin{aligned} f_{xx}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) &= e^{-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})} (4 \cdot (\frac{1}{2})^3 + 4(\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} - 6 \frac{1}{2} - 2 \frac{1}{2}) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}} (\frac{4}{8} + \frac{4}{8} - 3 - 1) = e^{-\frac{1}{2}} (-3) = -3 e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$f_{xy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} (-2 \cdot \frac{1}{2} + 4(\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = -e^{-\frac{1}{2}}$$

$$f_{yy}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}} (4(\frac{1}{2})^3 + 4(\frac{1}{2})^2 \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{2} - 6 \cdot \frac{1}{2}) = -3e^{-\frac{1}{2}} \quad (6f)_{(4)}$$

$$H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} -3e^{-1/2} & -e^{-1/2} \\ -e^{-1/2} & -3e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\det a = -3e^{-1/2} \longrightarrow (-1) \det a = 3e^{-1/2} > 0$$

$$\det \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} -3e^{-1/2} & -e^{-1/2} \\ -e^{-1/2} & -3e^{-1/2} \end{vmatrix} = 9 \cdot e^{-1} - e^{-1} = 8e^{-1} \longrightarrow (-1)^2 \det \varepsilon_2 = 8e^{-1}$$

Ο εγγιστός πίνακας είναι αρνητικά οριστικός  
 έτσι στο σημείο  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  η συνάρτηση παρου-  
 σίζει μέγιστο

Για το σημείο  $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  έχουμε

$$\begin{aligned} f_{xx}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= e^{-1/2} (4(-\frac{1}{2})^3 + 4(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2}) - 6(-\frac{1}{2}) - 2(-\frac{1}{2})) = \\ &= e^{-1/2} (-\frac{4}{8} - \frac{4}{8} + 3 + 1) = 3e^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{xy}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) &= e^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2(-\frac{1}{2}) + 4(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2}) + 4(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})^2 - 2(-\frac{1}{2})) = \\ &= e^{-\frac{1}{2}} (1 - \frac{4}{8} - \frac{4}{8} + 1) = e^{-1/2} \end{aligned}$$

$$f_{yy}(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) = e^{-1/2} \cdot (4(-\frac{1}{2})^3 + 4(-\frac{1}{2})^2(-\frac{1}{2}) - 2(-\frac{1}{2}) - 6(-\frac{1}{2})) = 3e^{-1/2}$$

$$H_f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 3e^{-1/2} & -e^{1/2} \\ -e^{1/2} & 3e^{-1/2} \end{pmatrix}$$

$$\det \varepsilon_1 = 3e^{-1/2} > 0$$

$$\det \varepsilon_2 = \begin{vmatrix} 3e^{-1/2} & -e^{1/2} \\ -e^{1/2} & 3e^{-1/2} \end{vmatrix} = 9e^{-1} - e^1 = 8e^{-1} > 0$$

Αρα ο εγγράσιος πίνακας είναι θετικά  
ορισμένος αρα η συνάρτηση  $f$  στο σημείο  
 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  παρουσιάζει ελάχιστο.

$$(ii) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$$f_x = 3x^2 - 3y$$

$$f_x = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3y = 0 \Leftrightarrow y = x^2$$

και

$$f_y = 3y^2 - 3x$$

$$f_y = 0 \Leftrightarrow 3y^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = y^2$$

$$\text{Αρα έχουμε } x = x^4 \Leftrightarrow x^4 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 0 \text{ ή } x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Αν } x = 0 \text{ τότε } y = 0 \quad (0, 0)$$

$$\text{Αν } x = 1 \text{ τότε } y = 1 \quad (1, 1) \quad \text{στάσιμα σημεία}$$

$$f_{xx} = 6x \quad f_{xy} = -3 \quad f_{yy} = 6y$$

Η εγγραφή είναι

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Για το σημείο  $(0, 0)$  έχουμε

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det e_1 = 0 \quad \rightarrow \quad (-1)^1 \cdot 0 \geq 0$$

$$\det e_2 = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \quad \rightarrow \quad (-1)^2 (-9) < 0$$

Αρα ο πίνακας  $H_f(0, 0)$  είναι μη οριστικός  
αρα το σημείο  $(0, 0)$  είναι σαγματικό ση-  
μείο.

Για το σημείο  $(1, 1)$  έχουμε

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Εδω } \det e_1 = 6 > 0$$

$$\det e_2 = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot 6 - (-3)(-3) = 27 > 0$$

Αρα  $(1, 1)$  ο πίνακας  $\det e_1$  οριστικός εστί το σημείο  
εξ ου  $\det e_2 > 0$  οριστικός