

ΛΟΓΗ Έστω  $\mu_x$  το μέσο βάρος των χυκισμάτων της μηχανής I και  $\mu_y$  το μέσο βάρος των χυκισμάτων της μηχανής II.

Μυδελική υπόθεση  $H_0: \mu_x = \mu_y$

Εναλλακτική -1L  $H_1: \mu_x \neq \mu_y$

Έχουμε μικρά δείγματα ( $< 30$ ) και οι πηθ-  
-γοί ακολουθούν κανονικές κατανομές με ίσες  
τυπικές αποκλίσεις τότε επιλέγουμε ως

στατιστικό 
$$T = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(n-1) \cdot s_x^2 + (m-1) \cdot s_y^2}{n+m-2}}$$

που ακολουθεί την

t-κατανομή με  $n+m-2$  βαθμούς ελευθερίας

Εδώ έχουμε.

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{(14-1) \cdot 3^2 + (16-1) \cdot 4^2}{14+16-2}} = 3,571$$

$$T = \frac{23 - 25}{3,571 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{16}}} = -1,531$$

$$\alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Παίρνουμε στον πίνακα της t-κατανομής στη στήλη

0,975 με  $14+16-2=28$  βαθμούς ελευθερίας και

έχουμε  $t_{28;0,025} = 2,763$ .

Εξετάζουμε αν ισχύει

$$|T| > t_{28;0,025} \Leftrightarrow |-1,531| > 2,763 \text{ που}$$

δεν ισχύει.

Αρα δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση  
σε στάθμη σημαντικότητας 1%.

Άσκηση Μια βιοτεχνία επιμόρφωσε 7 εργαζόμενους σε  
μια νέα μέθοδο με σκοπό την αύξηση της παραγω-  
γικότητας. Αν οι μονάδες προϊόντος που παράχθηκαν  
ανά ημέρα οι εργαζόμενοι πριν και μετά την επιμόρφω-  
ση ήταν

|      |    |    |    |    |    |    |    |
|------|----|----|----|----|----|----|----|
| πριν | 62 | 71 | 73 | 64 | 68 | 70 | 66 |
| μετά | 57 | 66 | 63 | 60 | 66 | 62 | 69 |

να ελεγχθεί σε στάθμη σημαντικότητας 5%

αν η νέα μέθοδος αλλάζει την απόδοση των  
εργαζομένων. Δίνεται ότι οι πηλυσκοί ακολουθούν  
την κανονική κατανομή.

Λύση Αι Χ και Υ οι μονάδες προϊόντος που παρήχθησαν πριν και μετά οι εργασίες

$$D = X - Y$$

Μηδενική υπόθεση:  $H_0: \mu_D = 0$  (ίση μέση τιμή)

Εναλλακτική υπόθεση:  $H_1: \mu_D \neq 0$  (δηλαδή  $\mu_X \neq \mu_Y$ )

$$\text{Οπότε } d_i = x_i - y_i$$

$$\text{Τότε } d_i = 5, 5, 10, 4, 2, 8, -3$$

$$\text{Αρα } \bar{D} = \frac{5+5+10+4+2+8-3}{7} = 4,43$$

$$\text{Ενδεχόμε το στατιστικό } T = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}}$$

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{D})^2} = \sqrt{\frac{1}{7-1} [(5-4,43)^2 + (5-4,43)^2 + (10-4,43)^2 +$$

$$+ (4-4,43)^2 + (2-4,43)^2 + (8-4,43)^2 + (-3-4,43)^2]} = 4,198$$

Το  $T$  ακολουθεί την  $t$  κατανομή με  $n-1 = 7-1 = 6$  βαθμούς ελευθερίας

$$T = \frac{4,43}{4,198/\sqrt{7}} = 2,791$$

Έχουμε επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha = 5\% = 0,05$

Τότε  $\frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975$

Πιχαίνουμε στη στήλη 0,975 στον 6 βαθμούς  
ελευθερίας τότε  $t_{6;0,025} = 2,447$

Εξετάζουμε αν ισχύει  $|T| > t_{6;0,025} \leftrightarrow$

$|2,791| > 2,447$  ισχύει. Άρα απορρίπτεται

η μηδενική υπόθεση άρα ισχύει η εναλλακ-  
τική υπόθεση δηλαδή η νέα μέθοδος  
επηρεάζει την απόδοση των εργατών.

Άσκηση : Σε μια ποδοσφαιρική ομάδα επιλέχθη-  
καν 6 αθλητές για να υποβληθούν σε νέο  
προπονητικό σύστημα απόκτησης φυσικής κατάστα-  
σης. Οι χρόνοι που έκαναν οι αθλητές  
σε μια συγκεκριμένη απόσταση πριν και μετά  
την εφαρμογή της μεθόδου ήταν

πριν: 18 24 24 14 19 20

μετά: 12 18 25 9 14 16

Να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας  
5%, αν ο μέσος χρόνος των αθλητών

μετα των εφαρμογών της νέας μεθόδου (8ε)21)  
είναι μικρότερος από πριν. Να υποθέσει ότι οι  
χρόνοι των αθλητών ακολουθούν την κανονική  
κατανομή

Λύση: Αν  $X$  και  $Y$  οι χρόνοι των αθλητών πριν  
και μετά τότε  $D = X - Y$

Μηδενική υπόθεση:  $H_0: \mu_D = 0$  (ίσες μέσες τιμές)

$H_1: \mu_D > 0$  (Δηλαδή  $\mu_X > \mu_Y$ )

$d_i = X_i - Y_i$     6, 6 -1 5 5 4

$$\bar{D} = \frac{6+6-1+5+5+4}{6} = 4,17$$

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{6-5} [(6-4,17)^2 + (6-4,17)^2 + (-1-4,17)^2 + (5-4,17)^2 +$$

$$+ (5-4,17)^2 + (4-4,17)^2] = 2,639$$

$$\text{Το στατιστικό } T = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{5}} = \frac{4,17}{2,639/\sqrt{5}} = 3,87$$

$\alpha = 0,05 \rightarrow 1-\alpha = 0,95$  πηχαινουμε στη στιλν  
0,95 της t κατανομης με 6-1=5 βαθμους  
ελευθεριας  $t_{5; 0,05} = 2,015$

Εχουμε δέφια μονόπλευρο έλεγχο  
 Εξετάζουμε αν  $T > t_{5;0,05} \Leftrightarrow$

$$3,87 > 2,015 \text{ που ισχύει}$$

Αρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση  
 και δεχόμαστε την εναλλακτική. Δηλαδή  
 η νέα μέθοδος μειώνει τους μέσους χρόνους.

Αδυνα Σε Λύκειο της Λαμίας τα 6 τελευταία

χρόνια οι επιτυχόντες  $Y$  σε ΑΕΙ μαθητές της Γ Λυκείου ως προς το πλῆθος  $X$  των μαθητών της Γ' Λυκείου δίνονται στον παρακάτω πίνακα

| Ετος            | 2020 | 2021 | 2022 | 2023 | 2024 | 2025 |
|-----------------|------|------|------|------|------|------|
| Επιτυχόντες $Y$ | 55   | 70   | 42   | 60   | 75   | 50   |
| Υποψήφιοι $X$   | 155  | 170  | 150  | 130  | 150  | 120  |

Να προσδιορίσετε την ευθεία παλινδρόμησης και να εκτιμήσετε πόσοι θα επιτύχουν το 2026 την εισαγωγή τους σε ΑΕΙ αν συνολικά υπάρχουν 130 υποψήφιοι.

Λύση Καταγράψουμε τον πίνακα

| $X$              | $Y$              | $X_i \cdot Y_i$              | $X_i^2$               |
|------------------|------------------|------------------------------|-----------------------|
| 155              | 55               | 8525                         | 24025                 |
| 170              | 70               | 11900                        | 28900                 |
| 150              | 42               | 6300                         | 22500                 |
| 130              | 60               | 7800                         | 16900                 |
| 150              | 75               | 11250                        | 22500                 |
| 120              | 50               | 6000                         | 14400                 |
| $\sum X_i = 875$ | $\sum Y_i = 352$ | $\sum X_i \cdot Y_i = 51775$ | $\sum X_i^2 = 129255$ |

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{6} = \frac{875}{6} = 145,833$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{352}{6} = 58,667$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \hat{\beta} &= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{6 \cdot 51775 - 875 \cdot 352}{6 \cdot 129225 - (875)^2} = \\ &= \frac{2650}{9725} \cong 0,272 \end{aligned}$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta} \cdot \bar{x} = 58,667 - 0,272 \cdot 145,833 = 18,928$$

Η ευθεία παλινδρόμησης είναι

$$\hat{y} = 18,928 + 0,272 \cdot x$$

Επομένως το έτος 2026 εκτιμάτε ότι

θα επιτύχουν

$$\hat{y} = 18,928 + 0,272 \cdot 130 = 54,288 \cong 54 \text{ υποψήφιοι}$$

Άσκηση: Σε έρευνα για το πως μεταβάλλεται το

βάρος των μαθητών ενός Λυκείου σε σχέση με το ύψος τους, παρατήρησαν ότι αν το ύψος μεταβληθεί κατά μια μονάδα, τότε το βάρος μεταβάλλεται κατά 1,28 Kgr. Αν η μέση τιμή των υψών των μαθητών είναι 175cm και το μέσο βάρος είναι 78 Kgr να εκτιμήσετε σύμφωνα με την ευθεία παλινδρόμησης το βάρος ενός μαθητή με ύψος 180cm

Εστω  $Y$  η μεταβλητή που συμβολίζει το βάρος των παιδιών και  $X$  η μεταβλητή που συμβολίζει το ύψος των μαθητών.

Γνωρίζουμε ότι όταν η μεταβλητή  $x$  αυξάνεται (δηλαδή  $x$ ) αυξάνει κατά μια μονάδα τότε η εξαρτημένη μεταβλητή (δηλαδή  $y$ ) ποικίλλει με τον συντελεστή  $\hat{b}$

Αρα εδώ  $\hat{b} = 1,28$ .

Επίσης ισχύει  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 78 - 1,28 \cdot 175 = -146$

Αρα η ευθεία παλινδρόμησης είναι

$$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b} \cdot x = -146 + 1,28 \cdot x$$

Επομένως ένας μαθητής με ύψος 180 cm εκτιμάται ότι έχει βάρος

$$\hat{y} = -146 + 1,28 \cdot 180 = 84,4 \text{ kg}$$

Άσκηση Σε μία πόλη λειτουργούν δύο γενικά

Λύκεια το 1ο και το 2ο. Στο 1ο Λύκειο ο αριθμός των επιτυχόντων  $Y$  μαθητών σε ΑΕΙ

ως προς το πλήθος  $X$  των μαθητών της Γ Λυκείου εκτιμάται από την ευθεία παλινδρόμησης

$$\hat{y} = -60 + x, \quad x \in [70, 120]. \quad \text{Αντίστοιχα στο}$$

2ο Λύκειο εκτιμάται από την ευθεία  $\hat{y} = -50 + 2 \cdot x$   
χ $\in [20, 50]$ . Το 2025 η πόλη είχε 130 μαθητές  
στη Γ Λυκείου. Το 1ο Λύκειο εκτίμησε ότι θα  
έχει επιτυχία 40%. Να υπολογίσετε την εκτι-  
μηση για το ποσοστό επιτυχίας του 2ου Λυκείου

Λύση

Εστω A οι μαθητές του 1ου Λυκείου και B οι  
μαθητές του Β Λυκείου

Αρα  $A + B = 130$

Οι επιτυχόντες μαθητές του 1ου Λυκείου εκτι-  
μούνται  $\hat{y}_1 = -60 + A$

Αντίστοιχα οι επιτυχόντες του 2ου Λυκείου  
εκτιμούνται  $\hat{y}_2 = 2B - 50$

Ομως  $\frac{\hat{y}_1}{A} = 40\% = \frac{40}{100} \Leftrightarrow \frac{-60 + A}{A} = \frac{40}{100} \Leftrightarrow$

$10(-60 + A) = 4A \Leftrightarrow -600 + 10A = 4A \Leftrightarrow$

$6A = 600 \Leftrightarrow A = 100$

Αρα από  $A + B = 130 \Leftrightarrow B = 30$

Συνεπώς η εκτίμηση για τους επιτυχόντες  
από το 2ο Λύκειο είναι

$\hat{y}_2 = 2 \cdot 30 - 50 \Leftrightarrow \hat{y}_2 = 10$ . Το ποσοστό  
επιτυχίας για το 2ο Λύκειο είναι  $\frac{10}{30} = 0,33$  δηλ 33%.

Άσκηση Στους παρακάτω πίνακες αναγράφεται <sup>(6ε) 27)</sup>

η διαφημιστική δαπάνη  $X$  και τα κέρδη  $Y$  σε  
χιλιάδες ευρώ για οκτώ μήνες

Επιχείρηση Α

|     |     |   |   |     |   |     |     |   |
|-----|-----|---|---|-----|---|-----|-----|---|
| $X$ | 1   | 1 | 2 | 3   | 3 | 4   | 5   | 5 |
| $Y$ | 2,5 | 4 | 3 | 4,5 | 4 | 3,5 | 5,5 | 5 |

Επιχείρηση Β

|     |     |     |   |     |   |     |     |     |
|-----|-----|-----|---|-----|---|-----|-----|-----|
| $X$ | 1   | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 4   | 4,5 | 5,5 |
| $Y$ | 2,5 | 1   | 4 | 5,5 | 6 | 3,5 | 6   | 3,5 |

- ι) Να προσδιορίσετε τις ευθείες παλινδρόμους  
των δύο επιχειρήσεων
- ii) Σε ποια από τις δύο επιχειρήσεις υπάρχει  
πιο ισχυρή γραμμική σχέση μεταξύ των  
μεταβλητών

Λύση i) Για την Επιχείρηση Α έχουμε

| $x_i$    | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|----------|-------|---------|---------|-----------------|
| 1        | 2,5   | 1       | 6,25    | 2,5             |
| 1        | 4     | 1       | 16      | 4               |
| 2        | 3     | 4       | 9       | 6               |
| 3        | 4,5   | 9       | 20,25   | 13,5            |
| 3        | 4     | 9       | 16      | 12              |
| 4        | 3,5   | 16      | 12,25   | 14              |
| 5        | 5,5   | 25      | 30,25   | 27,5            |
| 5        | 5     | 25      | 25      | 25              |
| $\Sigma$ | 24    | 90      | 135     | 104,5           |

Για την επιχείρηση Β έχουμε

| $x_i$       | $y_i$ | $x_i^2$ | $y_i^2$ | $x_i \cdot y_i$ |
|-------------|-------|---------|---------|-----------------|
| 1           | 2,5   | 1       | 6,25    | 2,5             |
| 1,5         | 1     | 2,25    | 1       | 1,5             |
| 2           | 4     | 4       | 16      | 8               |
| 2,5         | 5,5   | 6,25    | 30,25   | 13,75           |
| 3           | 6     | 9       | 36      | 18              |
| 4           | 3,5   | 16      | 12,25   | 14              |
| 4,5         | 6     | 20,25   | 36      | 27              |
| 5,5         | 3,5   | 30,25   | 12,25   | 19,25           |
| $\Sigma$ 24 | 32    | 89      | 150     | 104             |

Για την επιχείρηση Α έχουμε

$$\hat{b} = \frac{8 \cdot \sum_{i=1}^8 x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^8 y_i\right)}{8 \cdot \sum_{i=1}^8 x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^8 x_i\right)^2} =$$

$$\frac{8 \cdot 104,5 - 24 \cdot 32}{8 \cdot 90 - (24)^2} = \frac{68}{144} = \frac{17}{36}$$

$$\text{Επίσης } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = \frac{32}{8} - \frac{17}{36} \cdot \frac{24}{8} = \frac{31}{12}$$

Άρα η ευθεία παλινδρόμησης για την επιχείρηση Α είναι  $\hat{\epsilon}_A: \hat{y} = \frac{31}{12} + \frac{17}{36} \cdot x \approx 2,58 + 0,47x$

Για την επιχείρηση Β

$$\hat{b} = \frac{8 \cdot 104 - 24 \cdot 32}{8 \cdot 89 - (24)^2} = \frac{64}{136} = \frac{8}{17} \approx 0,47$$

και

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = \frac{1}{8} \cdot 32 - \frac{8}{17} \cdot \frac{24}{8} = \frac{44}{17} \approx 2,59$$

Αρα η ευθεία παλινδρόμησης για την επιχείρηση Β είναι:

$$\varepsilon_B \quad \hat{y} = 2,59 + 0,47 \cdot x$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο ευθείες ταυτίζονται  
 σχεδόν

(i) Ο συντελεστής συσχέτισης για την επιχείρηση Α είναι

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{\sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \sqrt{n \cdot \sum_{i=1}^n y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n y_i\right)^2}} = \\ &= \frac{8 \cdot 104,5 - 24 \cdot 32}{\sqrt{8 \cdot 90 - (24)^2} \cdot \sqrt{8 \cdot 135 - (32)^2}} \approx 0,76. \end{aligned}$$

$$r_B = \frac{8 \cdot 104 - 24 \cdot 32}{\sqrt{8 \cdot 89 - (24)^2} \sqrt{8 \cdot 150 - (32)^2}} \approx 0,41$$

Ισχύει  $r_B < r_A$  επομένως στην επιχείρηση

A υπάρχει πιο ισχυρή σχέση μεταξύ των μεταβλητών

Άσκηση: Σε μια έρευνα για την μελέτη φοιτητών καταγράφηκαν για ένα τυχαίο δείγμα 7 ατόμων ο χρόνος μελέτης ( $x$ ) και ο βαθμός στην εξέταση ( $y$ ) ενός μαθήματος βρέθηκε ότι η ευθεία παλινδρόμησης είναι  $\hat{y} = 1,141 + 0,264 \cdot x$  και  $\sum_{i=1}^7 (y_i - \hat{y}_i)^2 = 533$   
 $\sum_{i=1}^7 x_i^2 = 7222$  και  $\sum_{i=1}^7 x_i = 212$

Να βρεθούν για τον συντελεστή παλινδρόμησης του πληθυσμού

- το διάστημα εμπιστοσύνης 95%.
- το μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης για το κάτω φράγμα του 99%.
- το μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το άνω φράγμα

Λύση α) Επειδή το δείγμα είναι μικρό τότε το διάστημα εμπιστοσύνης 95%

για τον συντελεστή παλινδρόμησης είναι (231)

$$\left[ \hat{\beta} - t_{7-2; 0,025} \cdot S_{\hat{\beta}}, \hat{\beta} + t_{7-2; 0,025} \cdot S_{\hat{\beta}} \right]$$

Το 0,025 προέκυψε:  $1-\alpha = \frac{95}{100} \Leftrightarrow \alpha = 0,05$

Αρα  $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ .

Υπολογίζουμε το  $S_{\hat{\beta}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}}{n}}}$

$$\text{Αρα } S_{\hat{\beta}} = \frac{\sqrt{\frac{5,33}{7-2}}}{\sqrt{7222 - \frac{(212)^2}{7}}} = \frac{\sqrt{1,066}}{\sqrt{801,43}} \text{ Α}$$

$$S_{\hat{\beta}} = \frac{1,032}{\sqrt{801,43}} = 0,036$$

Για να βρούμε το  $t_{7-2; 0,025} = t_{5; 0,025}$

πηχαινουμε στον πίνακα της t-κατανομής  
στη στήλη 0,975 για 5 βαθμούς

ελευθερίας Αρα  $t_{5; 0,025} = 2,571$

Αρα το διάστημα εμπιστοσύνης 95%.

$$\text{είναι } [0,264 - 2,571 \cdot 0,036, 0,264 + 2,571 \cdot 0,036]$$

$$\text{Αρα } [0,17], 0,357]$$

(6ε)32)

β) Το μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης 99% για το κάτω φράγμα είναι

$$[\hat{\theta} - t_{7-2; 0,01} \cdot \hat{S}_{\hat{\theta}}, +\infty)$$

$$\text{Το } \hat{\theta} = 0,264 \quad \hat{S}_{\hat{\theta}} = 0,036$$

Το  $t_{7-2; 0,01} = t_{5; 0,01}$  πηχαινουμε στο πίνακα της  $t$  κατανομής στη στήλη 0,99 με 5 βαθμούς ελευθερίας. Αρα  $t_{5; 0,01} = 3,365$

Ετσι έχουμε

$$[0,264 - 3,365 \cdot 0,036, +\infty) = [0,25], +\infty)$$

(Το 0,01 προκύπτει 99% = 1-α Αρα 0,99 = 1-α  $\Leftrightarrow$  α = 0,01

γ) Το μονόπλευρο διάστημα εμπιστοσύνης 95% για το άνω φράγμα

$$(-\infty, \hat{\theta} + t_{7-2; 0,05} \cdot \hat{S}_{\hat{\theta}}] =$$

$$(-\infty, 0,264 + t_{5; 0,05} \cdot 0,036] = (-\infty, 0,319]$$

$$\text{Το } t_{5; 0,05} = 2,015$$

Το διάστημα εμπιστοσύνης της κλίσης  $\beta$  της ευθείας παλινδρόμησης για μικρό δείγμα με επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  είναι

$$\left[ \hat{\beta} - S_{\hat{\beta}} \cdot t_{n-2; \alpha/2} \quad \hat{\beta} + S_{\hat{\beta}} \cdot t_{n-2; \alpha/2} \right] \text{ Διπλόπλευρο}$$

$$\left[ \hat{\beta} - S_{\hat{\beta}} \cdot t_{n-2; \alpha}, +\infty \right) \text{ Αριστερά Μονόπλευρο}$$

$$(-\infty, \hat{\beta} + S_{\hat{\beta}} \cdot t_{n-2; \alpha}] \text{ Δεξιά Μονόπλευρο}$$

όπου

$$S_{\hat{\beta}} = \frac{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right)^2}}}$$

$n$  = μέγεθος δείγματος

Άσκηση Να ελεγχθεί με στάθμη σημαντικότητας 1% αν ο συντελεστής παλινδρόμησης του πηλυσμού (της προηγούμενης άσκησης) είναι θετικός

Λύση Έχουμε δείγμα 7 ατόμων άρα μικρό

θεωρούμε μηδενική υπόθεση  $H_0: \beta = 0$   
εναλλακτική -||-  $H_1: \beta > 0$

Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε είναι  $T = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}} = \frac{0,264}{0,036} = 7,33$

Ελέγχουμε αν ισχύει  $T > t_{7-2; \alpha}$

Εδώ  $\alpha = 0,01$  Άρα  $1 - \alpha = 1 - 0,01 = 0,99$ .

Το  $t_{7-2; 0,01} = t_{5; 0,01}$

Από τον πίνακα της  $t$ -κατανομής στη στήλη 0,99 με 5 βαθμούς ελευθερίας προκύπτει  $t_{5; 0,01} = 3,365$

Άρα  $T > t_{5; 0,01} \Leftrightarrow 7,33 > 3,365$  ισχύει

Αρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση και  
 ισχύει η εναλλακτική υπόθεση  $H_1$ . Δηλαδή  
 δεχόμαστε με στάθμη σημαντικότητας 1%  
 ότι ο συντελεστής παλινδρόμησης του  
 πηλυσμού είναι θετικός

Ασκήση Από ένα δείγμα 100 παρατηρήσεων  
 από ένα πηλυσμό προέκυψε η ευθεία  
 παλινδρόμησης της  $Y$  ως προς την  $X$  μεταβλητή

$$\hat{Y} = 2,28 + 271 \cdot X$$

Επίσης  $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{100} x_i)^2}{100} = 535,27$  και  $\sum_{i=1}^{100} (y_i - \hat{y}_i)^2 = 157,33$

- Να ερευνηθεί σε στάθμη σημαντικότητας  
 2% αν η κλίση της ευθείας παλινδρόμη-  
 -σης του πηλυσμού είναι θετική
- Να ερευνηθεί σε στάθμη σημαντικότητας  
 1% αν η  $Y$  εξαρτάται γραμμικά από την  $X$
- Να ερευνηθεί σε στάθμη σημαντικότητας  
 1% αν η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης  
 του πηλυσμού είναι μικρότερη του 2,8
- Να βρεθεί διάστημα εμπιστοσύνης 95%  
 για την κλίση της ευθείας παλινδρόμησης  
 του πηλυσμού

α) θεωρούμε μηδενική υπόθεση  $H_0: \beta = 0$   
εναλλακτική -11-  $H_1: \beta > 0$

Έχουμε δείγμα  $n=100 > 30$  μεγάλο

άρα χρησιμοποιούμε το στατιστικό

$$Z = \frac{\hat{\beta}}{S_{\hat{\beta}}}$$

που ακολουθεί την κανονική

κατανομή.

Έχουμε μονοπλευρό δεξιό έλεγχο

ετσι εφετάζουμε αν ικύει  $Z > Z_{\alpha}$

$$\alpha = 2\% = 0,02 \rightarrow 1-\alpha = 0,98$$

$$Z_{0,02} = \frac{2 \cdot 2,054 + 3 \cdot 2,06}{5} = 2,056$$

$$\text{Το } S_{\hat{\beta}} = \frac{\sqrt{\frac{153,33}{98}}}{\sqrt{535,27}} = \frac{1,32}{\sqrt{535,27}} = 0,05$$

$$\text{Το } \hat{\beta} = 2,71 \quad \text{Αρα } Z = \frac{2,71}{0,05} = 47,50$$

Εφετάζουμε αν  $Z > Z_{\alpha} \Leftrightarrow 47,5 > 2,056$   
ικύει. Άρα δεν ικύει η μηδενική  
υπόθεση αλλά η εναλλακτική. Δηλαδή  
δεχόμαστε ότι η κλίση της εφείας

παλινδρομους δεχόμαστε να είναι δετική (6639)

β) Η  $Y$  δεν εξαρτάται από την  $X$  γραμμικά  
αν  $b=0$

Θεωρούμε  $H_0: b=0$

$H_1: b \neq 0$

Το στατιστικό είναι  $Z = \frac{\hat{b}}{S_{\hat{b}}} = 47,50$

Εξετάζουμε αν  $|Z| > Z_{\alpha/2}$

Εδώ  $\alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,995$

Αρα  $Z_{\alpha/2} = Z_{0,005} = \frac{2,57 + 2,58}{2} = 2,575$

Ισχύει  $|Z| > Z_{\alpha/2} \Leftrightarrow 47,50 > 2,575$ .

Αρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση  
και γίνεται δεκτή η εναλλακτική συνολικά

$b \neq 0$  άρα υπάρχει γραμμική εξάρτηση  
μεταξύ των μεταβλητών  $Y$  και  $X$  σε στάθ-  
μη σημαντικότητας 1%.

γ) Θεωρούμε  $H_0: b = 2,8$

$H_1: b < 2,8$

Θεωρούμε το στατιστικό  $Z = \frac{\hat{b} - 2,8}{S_{\hat{b}}}$ .

Έχουμε αριστερά μονόπλευρο έλεγχο.

Θα εφετάσουμε αν ισχύει

$$Z < Z_{\alpha}$$

$$\text{Εδώ } Z = \frac{\hat{\beta} - 2,8}{S_{\hat{\beta}}} = \frac{2,71 - 2,8}{0,057} = \frac{-0,09}{0,057} = -2,743$$

Το  $\alpha = 1\% = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha = 0,99$  Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής

$$Z_{0,99} = \frac{2,232 + 2,33}{3} = 2,323$$

Εφετάσουμε αν  $Z < -Z_{0,99} \Leftrightarrow -2,743 < -2,323$  που ισχύει. Άρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση και δεχόμαστε την εναλλακτική Δυσάδην η κλίση της ευθείας παλινδρόμησης είναι μικρότερη τα 2,8 με στάθμη σημαντικότητας 1%.

δ) Το διάστημα εμπιστοσύνης είναι

$$[\hat{\beta} - Z_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}}, \hat{\beta} + Z_{\alpha/2} \cdot S_{\hat{\beta}}]$$

$$\alpha = 5\% = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Από την τυποποιημένη κανονική κατανομή

$$Z_{0,975} = 1,96 \quad \text{ΕΤΟΙ ΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΕΙΝΑΙ } [2,71 - 1,96 \cdot 0,057, 2,71 + 1,96 \cdot 0,057] = [2,598, 2,822]$$