

(66-6)

Εστω X_i $i=1..5$ οι βαθμολογίες του βαθμολογητή 1
 Y_i $i=1..5$ " " " " " " " " " " 2

$$D_i = X_i - Y_i$$

Έχουμε τις υποθέσεις

$$H_0: \mu_D = 0$$

$$H_1: \mu_D \neq 0$$

όπου μ_D η μέση τιμή των διαφορών των παρατηρήσεων

$$\mu_D = \frac{\sum_{i=1}^5 D_i}{5} = \bar{D}$$

Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε είναι το

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_0}{s_D / \sqrt{n}}$$

Εδώ $\mu_0 = 0$ s_D η τυπική απόκλιση του
δείγματος των διαφορών $n = 5$

Το T ακολουθεί την t -κατανομή με $s-1=4$
βαθμούς ελευθερίας

Εδώ έχουμε $D_1 = -3$

$$D_2 = -2$$

$$D_3 = -1$$

$$D_4 = -3$$

$$D_5 = -2$$

$$\bar{D} = \frac{-3-2-1-3-2}{5} = -\frac{11}{5} = -2,2$$

$$S_D = \sqrt{\frac{1}{5} [(D_1 - \bar{D})^2 + (D_2 - \bar{D})^2 + (D_3 - \bar{D})^2 + (D_4 - \bar{D})^2 + (D_5 - \bar{D})^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{5} [(-3+2,2)^2 + (-2+2,2)^2 + (-1+2,2)^2 + (-3+2,2)^2 + (-2+2,2)^2]} =$$

$$= \sqrt{\frac{2,8}{5}} = \sqrt{0,56} = 0,75$$

$$\text{Αρα } T = \frac{-2,2}{0,75/\sqrt{5}} = -\frac{2,2 \cdot \sqrt{5}}{0,75} = -6,56$$

$$\text{Εδω } \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Πηχαινουμε στον πίνακα της t-κατανομής

$$\text{Τότε } t_{4,0,025} = 2,776$$

Κάνουμε αμφίπλευρο έλεγχο.

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται αν

$$|T| > t_{4,0,025} \Leftrightarrow |-6,56| > 2,776 \text{ το } \alpha$$

οποιο έχουμε. Αρα απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση. Δηλαδή οι βαθμοί της δυο βαθμο-

Σοφιστών διαφέρουν. Αρα πρέπει να ελεγχθεί ποιος από τους δύο δεν βαθμολογεί σωστά.

Αν το επίπεδο σημαντικότητας ήταν 1% τότε

$$\alpha = 0,01 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,005 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995 \text{ και}$$

$$t_{4, 0,005} = 4,604$$

$$\text{στον έλεγχο } |T| > t_{4, 0,005} \Leftrightarrow | -6,56 | > 4,604$$

ισχύει. Αρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση

δηλαδή οι βαθμολογητές βαθμολογούν με σημαντική διαφορά και ένας εκ των δύο σφάλλει.

Άσκηση Εφαρμόζονται δύο μέθοδοι αδυνατίσματος σε ισορhythμες ομάδες ατόμων για διάστημα ενός μήνους προκειμένου να διαπιστωθεί

αν υπάρχει διαφορά στην αποτελεσματικότητά τους. Το πρώτο δείγμα αποτελείται από 42 άτομα και

μετά από συγκεκριμένη διαίτα η μέση απώλεια βάρους ήταν 5,9 kg και τυπική απόκλιση 4,1 kg. Στο δεύτερο

δείγμα 47 ατόμων εφαρμόστηκε πρόγραμμα βηματικής άσκησης και καταγράφηκε μέση απώλεια βάρους 4,1 και τυπική απόκλιση 3,7 kg. Ζητείται να εφετασθεί αν υπάρχει στατιστική διαφορά μεταξύ των δύο μεθόδων

σε επίπεδο σημαντικότητας 5% (σε 9)
Λύση Εδώ έχουμε δείγματα μεγαλύτερα από 30 άρα θεωρούμε ότι και τα δυο δείγματα ακολουθούν κανονική κατανομή

Εστω μ_1 η μέση ανώδεια βάρους για την ομάδα 1 και μ_2 η μέση ανώδεια βάρους για την ομάδα 2

Το στατιστικό είναι $Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{S_W}$

Η μηδενική υπόθεση είναι $H_0: \mu_1 = \mu_2$

Η εναλλακτική -||- -||- $H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$$S_W = \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{(5,9)^2}{42} + \frac{(3,1)^2}{47}} = 0,79$$

$$Z = \frac{5,9 - 4,1}{0,79} = 2,28$$

$$\text{Έχουμε } \alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$\text{Άρα } Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$\text{Έχουμε } |Z| > Z_{\alpha/2} \Leftrightarrow 2,28 > 1,96 \text{ ισχύει}$$

Άρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

Δεκτόμαστε ότι οι δυο μέθοδοι δεν έχουν την ίδια αποτελεσματικότητα

Άσκηση Σε μια έρευνα για την συγκέντρωση ενός
 συστατικού σε δύο φάρμακα σε ένα δείγμα
 274 φιαλιδίων του φαρμάκου Α η δειγματική
 μέση τιμή της συγκέντρωσης $\bar{X}$ του συστατικού ήταν
 $\bar{X} = 2,89 \text{ mgr}$ και σε ένα δείγμα 148 φιαλιδίων
 του φαρμάκου Β η δειγματική μέση τιμή της
 συγκέντρωσης $\bar{Y}$ είναι $\bar{Y} = 2,70 \text{ mgr}$. Αν οι X και Y
 ακολουθούν κανονικές κατανομές με τυπικές αποκλί-
 -σεις $\sigma_X = 0,57 \text{ mgr}$ και $\sigma_Y = 0,64 \text{ mgr}$ να ελεσθεί
 σε στάθμη σημαντικότητας 5% αν οι μέσες
 τιμές είναι ίσες οι διαφορετικές

Λύση Έστω μ_X και μ_Y οι μέσες τιμές της συγκεν-
 -τρως του συστατικού στα δύο φάρμακα

Μηδενική Υπόθεση $H_0: \mu_X = \mu_Y$

Εναλλακτική Υπόθεση $H_1: \mu_X \neq \mu_Y$

Ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος

Το στατιστικό είναι $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_W}$

$$\sigma_W = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n} + \frac{\sigma_Y^2}{m}} = \sqrt{\frac{(0,57)^2}{274} + \frac{(0,64)^2}{148}} = 0,0629$$

$$\alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

Αρα $Z_{\alpha/2} = 1,96$ από τον πίνακα της τυποποίησης
κ. κατανομής

$$\text{Το } Z = \frac{2,89 - 2,7}{0,0629} = 3,02$$

$$\text{Ισχύει } |Z| > Z_{\alpha/2} \Leftrightarrow 3,02 > 1,96 \text{ ισχύει}$$

Αρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση οπότε οι μέσες τιμές των συγκεντρώσεων του βιολογικού στα δύο φάρμακα είναι διαφορετικές

Άσκηση Δύο οδηγοί Α και Β κάνουν την ίδια διαδρομή. Οι χρόνοι Χ και Υ στους οποίους οι Α και Β κάνουν την διαδρομή ακολουθούν κανονικές κατανομές με τοπικές αποκλίσεις $\sigma_X = 1,2 \text{ min}$ και $\sigma_Y = 1,8 \text{ min}$. Σε ένα δείγμα 18 διαδρομών για τον οδηγό Α η μέση τιμή της Χ ήταν $\bar{x} = 14,3 \text{ min}$ και σε ένα δείγμα 20 διαδρομών του Β η μέση τιμή της Υ ήταν $\bar{y} = 15,8 \text{ min}$. Να ελεγχτεί σε στάθμη σημαντικότητας 1% αν ο μέσος χρόνος είναι μικρότερος για τον οδηγό Α από ότι για τον Β.

Λύση Έχουμε κανονική κατανομή με γνωστές (σελ 12)
απικές αποκλίσεις

Εστω μ_x και μ_y οι μέγες τιμές των χρόνων X
και Y για τους δύο οδηγούς.

Μηδενική Υπόθεση $H_0: \mu_x = \mu_y$

Εναλλακτική -1- $H_1: \mu_x < \mu_y$

Το στατιστικό είναι $Z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_w}$

$$\sigma_w = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{18} + \frac{\sigma_y^2}{20}} = \sqrt{\frac{(1,2)^2}{18} + \frac{(1,8)^2}{20}} = 0,492$$

$$\text{Αρα } Z = \frac{14,3 - 15,8}{0,492} = -3,049$$

$$\alpha = 0,01 \rightarrow 1 - \alpha = 0,99$$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής
κατανομής έχουμε

$$Z_\alpha = \frac{2 \cdot 2,32 + 1 \cdot 2,33}{3} = 2,323$$

Έχουμε αριστερά μονόπλευρο έλεγχο

Εξετάζουμε αν $Z < -Z_\alpha \Leftrightarrow$

$$-3,049 < -2,323 \text{ ισχύει}$$

Αρα η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται επομένως
δεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση. Δηλαδή
δεχόμαστε ότι ο οδηγός Α κινείται γενικά
πιο αργά από τον οδηγό Β

Ασκήση να εφεταστεί σε σταθμική σημαντικότητα

$\alpha = 0,05$ αν οι μέσες τιμές του βάρους X και Y των μαθητών δύο σχολείων A και B είναι ίσες ή ανίστες χρησιμοποιώντας δύο δείγματα $n=80$ και $m=90$ μαθητών από τα σχολεία A και B αντίστοιχα για τα οποία δείγματα οι παρατηρούμενες μέσες τιμές και οι διακυμάνσεις είναι

$$\bar{x} = 68,1 \quad s_x^2 = 110,2 \quad \text{και} \quad \bar{y} = 69,3 \quad s_y^2 = 120,3$$

Λύση: Έχουμε μεγάλα δείγματα (> 30) άρα δεχόμαστε ότι το στατιστικό ακολουθεί την κανονική κατανομή

Μηδενική Υπόθεση $H_0: \mu_x = \mu_y$

μ_x = μέσο βάρος μαθητών σχολείου A
 μ_y = -/- -/- -/- -/- B

Εναλλακτική Υπόθεση $H_1: \mu_x \neq \mu_y$

Το στατιστικό είναι

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W} = \frac{68,1 - 69,3}{1,647} = -0,704$$

$$S_W = \sqrt{\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}} = \sqrt{\frac{110,2}{80} + \frac{120,3}{90}} = 1,647$$

$$\alpha = 0,05 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \text{ Άρα } z_{\alpha/2} = 1,96$$

Εξετάσουμε αν $|Z| > z_{\alpha/2} \Leftrightarrow |-0,704| > 1,96$ που

δεν ισχύει. Άρα δεχόμαστε ότι ισχύει η μηδενική υπόθεση. Δηλαδή δεχόμαστε ότι οι μαθητές των δυο σχολείων έχουν το ίδιο βάρος.

Άσκηση: Σε ένα δείγμα 22 τυχαία επιλεγμένων τμημάτων βαμβακερού υφάτος η μέση απορροφητικότητα βρέθηκε 15,6% με τυπική απόκλιση 1,2% και για ένα δείγμα 24 επιλεγμένων τμημάτων ενός συνθετικού υφάτος η μέση απορροφητικότητα προέκυψε 14,9% με τυπική απόκλιση 1,4%.

Αν υποθέσουμε ότι τα ποσοστά απορρόφησης των δυο υφάτων ακολουθούν κανονικές κατανομές με διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις μπορούμε να συμπεράνουμε σε στάθμη σημαντικότητας 0,05 ότι το βαμβακερό υφάμα είναι πιο απορροφητικό από το συνθετικό υφάμα.

Λύση Έχουμε μικρά δείγματα (< 30) και

οι δυο πληθυσμοί έχουν διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις.

Επιλέγουμε το στατιστικό $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{S_W}$ που

ακολουθεί την t -κατανομή με r βαθμούς ελευθερίας

$$S_w = \sqrt{\frac{s_x^2}{22} + \frac{s_y^2}{24}} = \sqrt{\frac{(1,2)^2}{22} + \frac{(1,4)^2}{24}} = 0,383$$

Οι βαθμοί ελευθερίας είναι

$$r = \frac{\left(\frac{s_x^2}{n} + \frac{s_y^2}{m}\right)^2}{\frac{1}{n-1} \left(\frac{s_x^2}{n}\right)^2 + \frac{1}{m-1} \left(\frac{s_y^2}{m}\right)^2} = \frac{\left(\frac{1,2^2}{22} + \frac{1,4^2}{24}\right)^2}{\frac{1}{22-1} \left(\frac{1,2^2}{22}\right)^2 + \frac{1}{24-1} \left(\frac{1,4^2}{24}\right)^2} = 43,4 \approx 44.$$

μηδενική υπόθεση $H_0: \mu_x = \mu_y$

$H_1: \mu_x > \mu_y$

μ_x = μέση τιμή απορροφητικότητας βαριδακεραυ
 μ_y = -11 -11 -11 συνθετικού

Εχουμε δείγμα μονόπλευρο έλεγχο

$$T = \frac{15,6 - 14,9}{0,383} = 1,83$$

Από τα πίνακα της t-κατανομής το $t_{44, \alpha}$
 επειδή δεν υπάρχει ένδειξη με 44 βαθμούς
 ελευθερία αλλά είναι ανάμεσα στο 40
 και στο 50 τότε έχουμε στη στήλη 0,95

$$t_{44, \alpha} = \frac{4 \cdot 1,684 + 6 \cdot 1,676}{10} = 1,6792$$

Εξετάζουμε αν $T > t_{44, \alpha} \Leftrightarrow 1,83 > 1,6792$

Ισχύει. Άρα απορρίπτεται η H_0 επομένως

δεχόμαστε την εναλλακτική υπόθεση άρα το βαρδιακό υψά έχει μεγαλύτερη απορροφητικότητα από το συνθετικό

Άσκηση: Σε ένα δείγμα 14 χυκιγράφων που παράγονται από μια μηχανή I μιας βιοτεχνίας παρασκευής χυκιγράφων η μέση τιμή του βάρους ήταν $\bar{x} = 23 \text{ gr}$ και η τυπική απόκλιση του $S_x = 3 \text{ gr}$. Σε ένα δείγμα 16 χυκιγράφων από μια άλλη μηχανή II η μέση τιμή του βάρους ήταν $\bar{y} = 25 \text{ gr}$ και η τυπική απόκλιση $S_y = 4 \text{ gr}$. Υποθέτοντας ότι τα βάρη των χυκιγράφων ακολουθούν κανονικές κατανομές με ίσες τυπικές αποκλίσεις να εξετασθεί σε στάθμη σημαντικότητας 1%. αν οι μέσες τιμές του βάρους των χυκιγράφων που παράχουν οι δύο μηχανές είναι ίσες ή διαφορετικές