

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

- Αντικείμενο και στόχος αυτού του κλάδου της Στατιστικής είναι η εξαγωγή αιτιώδων συμπερασμάτων για ένα ολόκληρο πληθυσμό με βάση διαθέσιμες πληροφορίες ενός δείγματος του, ακόμη και αν αυτό είναι σχετικά μικρό.
- Στόχος του ελέγχου υποθέσεων είναι η εκτίμηση της τιμής (ή ενός διαστήματος πμών) μιας παραμέτρου ενός πληθυσμού με βάση τα δεδομένα ενός δείγματος αυτού του πληθυσμού. Οι παράμετροι που συνήθως εξετάζονται είναι η μέση τιμή (είτε ενός δείγματος είτε συγκριτικά μεταξύ δύο δειγμάτων) ή αναλογία και η τυπική απόκλιση.
- Οι βασικές έννοιες που χρησιμοποιεί η Επαγωγική Στατιστική για τον έλεγχο υποθέσεων είναι οι ακόλουθες:

Στατιστική υπόθεση: Είναι μια δήλωση διατυπωμένη ως πρόταση που αναφέρεται σε μία ή και περισσότερες μεταβλητές ενός πληθυσμού. Σε κάθε έλεγχο υποθέσεων έχουμε δύο στατιστικές υποθέσεις.

1. Μηδενική υπόθεση: Είναι η στατιστική υπόθεση της οποίας η ισχύς εξετάζεται και συμβολίζεται με H_0 .

Η μαθηματική διατύπωση της μηδενικής υπόθεσης (6.3.7)
είναι $H_0: \theta = \theta_0$ όπου θ η εξεταζόμενη παρα-
μέτρος και θ_0 η συγκεκριμένη επιθυμητή τιμή
αυτής της παραμέτρου.

2. Εναλλακτική υπόθεση. Συμβολίζεται με H_1
και γίνεται αποδεκτή όταν απορρίπτεται η
μηδενική υπόθεση. Η διατύπωσή της μπορεί να
είναι μια από τις παρακάτω

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

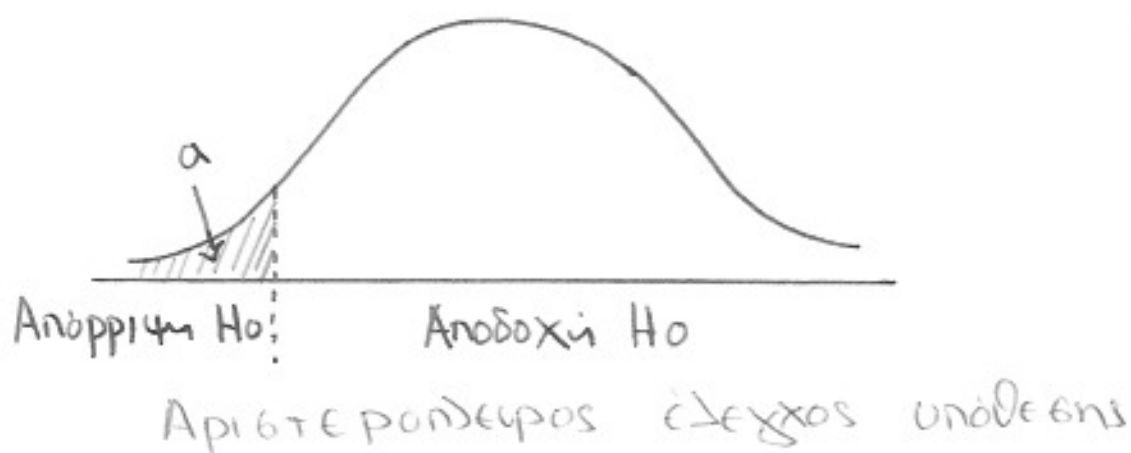
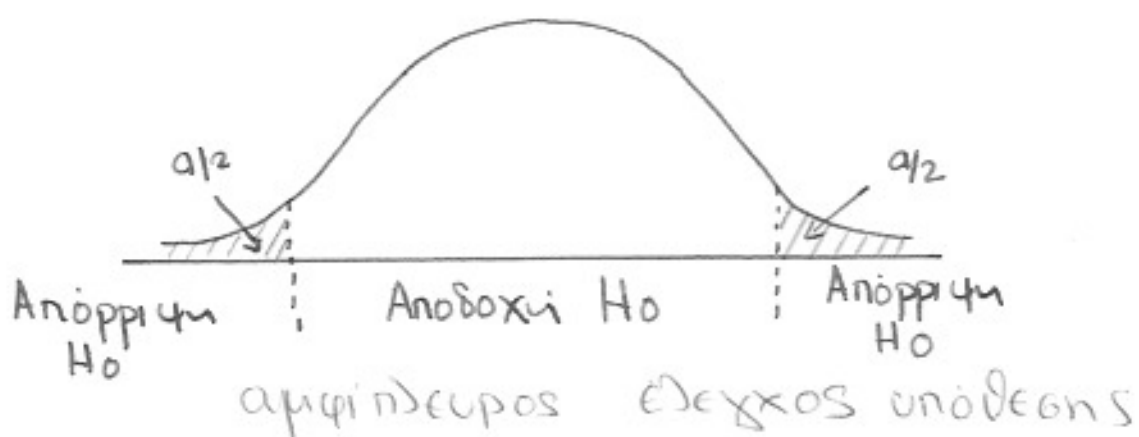
$$H_1: \theta > \theta_0$$

$$H_1: \theta < \theta_0$$

Αμφίπλευρος έλεγχος: Όταν $H_1: \theta \neq \theta_0$
ο έλεγχος που διεξάγεται ονομάζεται αμφί-
πλευρος. Στις άλλες δύο περιπτώσεις
 $H_1: \theta > \theta_0$ ο έλεγχος ονομάζεται μονόπλευρος
δεξιόπλευρος έλεγχος και όταν $H_1: \theta < \theta_0$
ονομάζεται μονόπλευρος αριστερόπλευρος έλεγχος.

(6ε>89)
Εφόσον η εξέταση μιας στατιστικής υπόθεσης αποτελεί διαδικασία απόφασης οι τιμές της εξεταζόμενης παραμέτρου θ χωρίζονται σε δύο κατηγορίες

- Στις τιμές που η υπόθεση H_0 χνείται αποδεκτή περιοχή αποδοχής
- Στις τιμές που η υπόθεση H_0 απορρίπτεται περιοχή απόρριψης η οποία συμβολίζεται με R



κρίσιμο σημείο είναι το σημείο που συνορεύει (663) 81

η περιοχή αποδοχής με την περιοχή απόρριψης
συμβολίζεται με c και στον αμφίπεδο
έλεγχο υπάρχουν δύο κρίσιμα σημεία.

- Η απόφαση για την αποδοχή ή την απόρριψη της
μηδενικής υπόθεσης πραγματοποιείται με βάση
τις πιθανότητες. Για την απόφαση αυτή ορίζεται
ένα επίπεδο σημαντικότητας το οποίο καθορίζει
το εύρος της περιοχής αποδοχής και της περι-
-οχής απόρριψης. Το επίπεδο σημαντικότητας
είναι δεκαδικός αριθμός μικρότερος της
μονάδας και συμβολίζεται με α
Οι τιμές που επιδέχονται συνήθως για την τιμή
του α είναι 0,01 ή 0,05

Η συμπεριφορική προς την μονάδα τιμή του
επίπεδου σημαντικότητας δηλαδή 1- α ονομάζε-
-ται επίπεδο εμπιστοσύνης.

- Ανάλογα με το είδος της στατιστικής υπόθεσης
οι στατιστικοί έλεγχοι υποθέσεων διακρίνονται
σε δύο κατηγορίες

1. Παραμετρικοί έλεγχοι. Πραγματοποιούνται για ^(εξέταση) μια ή περισσότερες παραμέτρους ενός πληθυσμού με την βασική προϋπόθεση ότι η κατανομή του πληθυσμού αυτού είναι γνωστή.
Όταν η κατανομή δεν είναι γνωστή μπορούν να πραγματοποιηθούν ορισμένοι παραμετρικοί έλεγχοι αρκεί να είναι διαθέσιμες οι πληροφορίες ενός μεγάλου μεγέθους δείγματος

2. Μη παραμετρικοί έλεγχοι: έτσι ονομάζονται όλοι οι υπόλοιποι έλεγχοι. Εφαρμόζονται για την μέση τιμή, τη διασπορά όταν η κατανομή του πληθυσμού δεν είναι γνωστή και το διαθέσιμο δείγμα είναι μικρού μεγέθους.

Διαδικασία ελέγχου στατιστικής υπόθεσης

1. Διατύπωση της μηδενικής υπόθεσης H_0 και της εναλλακτικής υπόθεσης H_1
2. Προσδιορισμός του κριτηρίου απόφασης για αποδοχή ή απόρριψη της H_0
 - α) Επιλογή του στατιστικού με το οποίο θα πραγματοποιηθεί ο έλεγχος
 - β) Επιλογή του επιπέδου σημαντικότητας α του ελέγχου
3. Προσδιορισμός των περιοχών αποδοχής και απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης
4. Υπολογισμός της τιμής του στατιστικού ελέγχου

5. Απόφαση για την αποδοχή ή την απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης (66/83)

Σφάλματα στατιστικών υποθέσεων

Κατά την διαδικασία ελέγχου μιας στατιστικής υπόθεσης υπάρχουν τέσσερις δυνατές περιπτώσεις

1. Αποδοχή της H_0 , ενώ στη πραγματικότητα είναι βωβή
2. Αποδοχή της H_0 , ενώ στη πραγματικότητα είναι λανθασμένη
3. Απόρριψη της H_0 , ενώ στη πραγματικότητα είναι βωβή
4. Απόρριψη της H_0 , ενώ στη πραγματικότητα είναι λανθασμένη

Σφάλμα τύπου I όταν συμβαίνει το 3

Η πιθανότητα αυτού του σφάλματος ισούται με το επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου υπόθεσης

Σφάλμα τύπου II όταν συμβαίνει το 2

Η πιθανότητα υπάρξης αυτού του σφάλματος συμβολίζεται με β .

Το $1-\beta$ ονομάζεται ισχύς και ισούται με την πιθανότητα να μη συμβεί σφάλμα τύπου II.

Έχει αποδειχθεί ότι η πιθανότητα σφάλματος του ενός τύπου είναι αντιστρόφως ανάλογη

με την πιθανότητα ύπαρξης του άλλου. Στη πράξη (6ε)⁹⁹ αρχικά επιλέγεται το επίπεδο σημαντικότητας α του ελέγχου, το οποίο ορίζει το κριτήριο απόφασης του ελέγχου. Στη συνέχεια υπολογίζεται το κριτήριο c και κατόπιν γίνεται αποδεκτή η πιθανότητα β που προκύπτει για το ενδεχόμενο ύπαρξης εφέδματος τύπου II

Ελεγχος υποθέσεων για την μέση τιμή

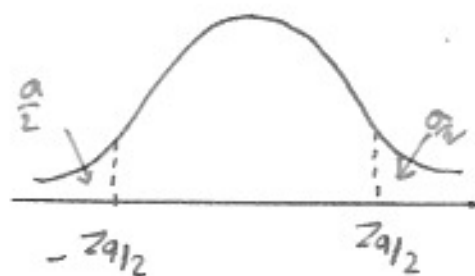
Εδώ ελέγχεται η μηδενική υπόθεση H_0 ότι η μέση τιμή μιας μεταβλητής X σε ένα δείγμα μέγεθους n ισούται με μια συγκεκριμένη τιμή μ_0

$$H_0: \mu = \mu_0$$

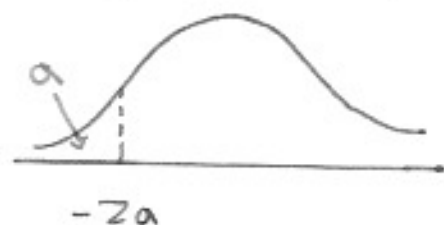
και η εναλλακτική υπόθεση

$$1) H_1: \mu \neq \mu_0 \quad 2) H_1: \mu < \mu_0 \quad 3) H_1: \mu > \mu_0$$

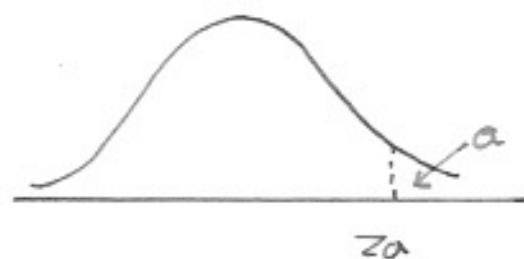
στο 1 ο έλεγχος είναι αμειψύμερος ενώ στο 2 και 3 αριστερά και δεξιά μονόπλευρος αντίστοιχα



Έλεγχος υποθέσεων
για
 $H_1: \mu \neq \mu_0$



Έλεγχος υποθέσεων
για
 $H_1: \mu < \mu_0$



Ελέγχος υπόθεσης

$$H_1: \mu > \mu_0$$

Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α όταν η μέση τιμή μ απέχει από την τιμή μ_0 περισσότερο από μια κρίσιμη απόσταση c . Η απόσταση αυτή είναι η τιμή c για την οποία η πιθανότητα να απέχει η μέση τιμή της μεταβλητής X από την τιμή μ_0 απόσταση μεγαλύτερη της τιμής c είναι ίση με το επίπεδο σημαντικότητας α .

Η επιλογή του στατιστικού του ελέγχου εξαρτάται από τρεις παράγοντες

- Την στατιστική κατανομή που ακολουθεί το δείγμα (αν είναι κανονική κατανομή ή όχι)
- Την τυπική απόκλιση του πληθυσμού αν (είναι γνωστή ή όχι)
- Το μέγεθος του δείγματος (αν είναι μεγάλο ή μικρό)

Κανονική κατανομή δείγματος με γνωστή τυπική απόκλιση

Το στατιστικό Z που χρησιμοποιείται δείχνεται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{όπου } \bar{X} \text{ η μέση τιμή του δείγματος} \quad (6.2.8)$$

μ_0 η τιμή με την οποία συγκρίνεται η μέση τιμή του δείγματος

σ η γνωστή τυπική απόκλιση του πληθυσμού.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΛΕΓΧΟΥ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

ΤΥΠΟΣ ΕΛΕΓΧΟΥ	ΥΠΟΘΕΣΗ H_0	ΥΠΟΘΕΣΗ H_1	ΠΕΡΙΟΧΗ ΑΠΟΡΡΙΨΗΣ
Αμφίπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{\alpha/2}$
Δεξιά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > Z_{\alpha}$
Αριστερά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < -Z_{\alpha}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Η παραπάνω διαδικασία του ελέγχου υποθέσεων για τη μέση τιμή είναι πανομοιότυπη τόσο για μεγάλα δείγματα $n \geq 30$ όσο και για μικρά δείγματα $n < 30$
2. Όταν η τυπική απόκλιση σ είναι άγνωστη και το δείγμα είναι μικρό ($n < 30$) θεωρείται ότι το δείγμα ακολουθεί την κατανομή t με $n-1$ βαθμούς ελευθερίας

Παράδειγμα: Η τρέχουσα ηλικία των φοιτητών ενός

Ελληνικού πανεπιστημίου ακολουθεί την κανονική κατανομή με τυπική απόκλιση $\sigma = 1,5$ έτη. Εξετάστηκε δείγμα 50 φοιτητών και προέκυψε μέση ηλικία 21,5 έτη. Ζητείται να ελεγχθεί με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$ αν η μέση ηλικία των φοιτητών είναι 22 έτη.

Λύση

$H_0: \mu = 22$

$H_1: \mu \neq 22$

Επειδή η μεταβλητή ηλικία ακολουθεί την κανονική κατανομή και το δείγμα $n \geq 30$ χρησιμοποιείται το στατιστικό $Z = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{|21,5 - 22|}{1,5/\sqrt{50}} = 2,358$

Εφόσον ο έλεγχος είναι αμφίπλευρος οι περιοχές απόρριψης της H_0 προδιορίζονται από την σχέση

$|Z| > Z_{\alpha/2}$

Βρίσκουμε το $Z_{\alpha/2}$

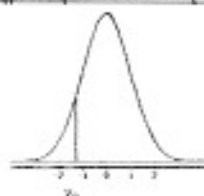
Έχουμε $\alpha = 0,05$ τότε $\alpha/2 = \frac{0,05}{2} = 0,025$

Υποδορίζουμε το $1 - \alpha/2 = 1 - 0,025 = 0,975$

Πηχαινουμε στον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής και αναζητούμε την τιμή πιθανότητας 0,975

Πίνακας 2
(συνέχεια)

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή



$$\Phi(z) = P(Z \leq z)$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Βλέπουμε ότι $z_{\alpha/2}$ είναι 1,96.

(66)
89

Αρα έχουμε $|Z| = |2,358| = 2,358 > 1,96$

Αρα η υπόθεση απορρίπτεται

Αν έχουμε $\alpha = 0,01$ τότε ελέγχουμε εκ νέου την υπόθεση. $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,005 = 0,995$

Από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής η πιθανότητα 0,995 αντιστοιχεί στην τιμή

$$z_{\alpha/2} = 2,575$$

Τότε $Z = 2,358 < 2,575$ άρα η υπόθεση είναι αποδεκτή

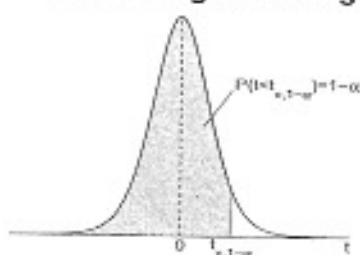
Κανονική κατανομή δείγματος με άγνωστη τυπική απόκλιση και μικρό μέγεθος δείγματος

Το στατιστικό που χρησιμοποιείται στην περίπτωση αυτή είναι $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$ όπου S η τυπική απόκλιση του δείγματος. Η T ακολουθεί την κατανομή t (κατανομή Student) με $n-1$ βαθμούς

ελευθερίας.

Τύπος ελέγχου	Υπόθεση H_0	Υπόθεση H_1	Περιοχή απόρριψης
Αμφίπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ T = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{s/\sqrt{n}} > t_{n-1, \alpha/2}$
Δεξιά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_{n-1, \alpha}$
Αριστερά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < -t_{n-1, \alpha}$

Στατιστικός Πίνακας Κατανομής Student



ν : βαθμοί ελευθερίας

$1 - \alpha$: τιμή της αθροιστικής συνάρτησης

Παράδειγμα:

$$\nu = 10, \alpha = 0.05 \Rightarrow t_{10,0.95} = 1.812$$

$$\nu = 10, \alpha = 0.001 \Rightarrow t_{10,0.999} = 4.144$$

$$\nu = 20, \alpha = 0.025 \Rightarrow t_{20,0.975} = 2.086$$

ν	$1 - \alpha$						
	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
100	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
150	1.287	1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
200	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
300	1.284	1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
400	1.284	1.649	1.966	2.336	2.588	3.111	3.315
∞	1.282	1.646	1.962	2.330	2.581	3.098	3.300

(663
91)

Παράδειγμα: Το μέσο ύψος των παικτών των Ελληνικών ομάδων μπάσκετ της Α1 είναι 2,01 μέτρα. Στο μεταξύ αττήθηκε ο επιτρεπόμενος αριθμός μεταγραφών ξένων παικτών. Εξετάστηκε ένα δείγμα 20 παικτών της Α1 και βρέθηκε ότι το μέσο ύψος 2,02 μέτρα και τυπική απόκλιση 7 cm. Θεωρώντας ότι το ύψος ακολουθεί την κανονική κατανομή ζητείται να ελεγχθεί στατιστικά με επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 0,05$ αν το μέσο ύψος των παικτών άλλαξε

Λύση

$$H_0: \mu = 2,02$$

$$H_1: \mu \neq 2,02$$

Το δείγμα $n=20 < 30$ (μικρό μέγεθος)

και η τυπική απόκλιση σ του πληθυσμού είναι άγνωστη. Γνωρίζουμε την τυπική απόκλιση

του δείγματος $S = 7 \text{ cm} = 0,07 \text{ m}$

Αρα το στατιστικό T ακολουθεί την κατανομή t (student) με $20-1=19$ βαθμούς ελευθερίας

$$T = \frac{|\bar{X} - \mu_0|}{S/\sqrt{n}} = \frac{|2,01 - 2,02|}{0,07/\sqrt{20}} = \frac{0,01}{0,07} \cdot \sqrt{20} = 2,857$$

Απο τον πίνακα της κατανομής t προσδιορίζουμε το σημείο $t_{19, 0,025}$

$$a = 0,05 \quad \text{τότε} \quad \frac{a}{2} = 0,025 \quad 1 - \frac{a}{2} = 0,975 \quad \left(\frac{60}{92} \right)$$

Στον πίνακα της t κατανομής πηχαιναμε
στη στήλη 0,975 και στη γραμμή 19
και βρίσκουμε 2,093

Αρα $T = 2,857 > 2,093$ άρα απορρίπτεται ο
ιχυρισμός ότι το μέσο ύψος των παικτών είναι
2,01 μέτρα.

Αν θέσαμε να ελέγχουμε με επίπεδο σημαντι-
-κότητας $\alpha = 0,005$ αν το μέσο ύψος είναι
μεγαλύτερο του 2,01 τότε

$$H_0: \mu = 2,02$$

$$H_1: \mu > 2,02$$

Έχουμε δεξιά μονόπλευρο έλεγχο

$$T = 2,857$$

Προσδιορίζουμε το $t_{20-1, 0,005}$ από τον πίνακα t

$\alpha = 0,005 \quad 1 - \alpha = 0,995$ Στην 0,995 και γραμ-
μή 19 έχουμε 2,861

$2,857 \not> 2,861$ Άρα η υπόθεση δεν
απορρίπτεται. Δηλαδή το μέσο ύψος δεν είναι
μεγαλύτερο από 2,02. Δηλαδή δεν
ικανοποιείται η H_1 .

Μεγάλο μέγεθος δείγματος

(693)

Έχουμε μεγάλο δείγμα ($n > 30$) και άγνωστη τυπική απόκλιση πληθυσμού σ και γνωστή τυπική απόκλιση δείγματος S

Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε είναι

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \text{ που ακολουθεί την κανονική κατανομή.}$$

Έχουμε περίπτωση όπως όταν έχουμε γνωστή τυπική απόκλιση πληθυσμού

Τύπος ελέγχου	Υπόθεση H_0	Υπόθεση H_1	περιοχή απορρίψης
Αμφιπλευρός	$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$ Z = \frac{ \bar{X} - \mu_0 }{S/\sqrt{n}} > Z_{\alpha/2}$
Δεξιά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > Z_{\alpha}$
Αριστερά μονόπλευρος	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < -Z_{\alpha}$

Παράδειγμα: Ένα προϊόν ευρείας κατανάλωσης πωλείται συσκευασμένο σε μικρά κουτιά 200 gr. Εφετάστηρε δείγμα 100 κουτιών και διαπιστώθηκε ότι το μέσο καθαρό βάρος είναι 199,6 gr και η τυπική απόκλιση του δείγματος 2 gr. Δύο φορές ελέγχου χρησιμοποιούν διαφορετικά επίπεδα σημαντικότητας: Ο πρώτος έχει $\alpha = 0,02$ και ο δεύτερος $\alpha = 0,05$. Ζητείται να διαπιστωθεί στατιστικά για κάθε φορά ξεχωριστά αν το μέσο βάρος του κουτιού θεωρείται ίσο ή μικρότερο των 200 gr.

Λύση $H_0: \mu = 200$

(6ε)
99

$H_1: \mu \neq 200$

Έχουμε μέγιστο δείγμα με άγνωστη τυπική απόκλιση πληθυσμού

Αρα το στατιστικό είναι $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

Αρα $|Z| = \frac{|199,6 - 200|}{2/\sqrt{100}} = \frac{0,4 \cdot 10}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Υπολογίζουμε από τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής το $z_{\alpha/2}$

1ος φορέας
 $\alpha = 0,01$ $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ $1 - 0,005 = 0,995$

Τότε $z_{\alpha/2} = 2,575$

Το $|Z| = 2 > 2,575$ δεν ικανοποιεί. Αρα

το μέσο βάρος δεν είναι 200

Αν θεωρήσουμε $H_0: \mu = 200$

$H_1: \mu < 200$

$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{199,6 - 200}{2/\sqrt{100}} = -2$

Έχουμε αριστερά μονόπλευρο έλεγχο

Αρα προσδιορίζουμε το $-z_{\alpha}$

$$\alpha = 0,05 \quad \text{τότε} \quad 1-\alpha = 0,99$$

(64)
95

Αρα από τον πίνακα $Z_{\alpha} = 2,33$

Το $-2 < -2,33$ δεν ισχύει. Αρα δεν απορρίπτεται η υπόθεση μας. Αρα ο 1ος φορέας συμπεραίνει ότι το μέσο βάρος είναι 200gr δηλαδή ισχύει η υπόθεση H_0

2ος φορέας

$$\alpha = 0,05 \quad \frac{\alpha}{2} = 0,025 \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975 \quad \text{τότε}$$

από πίνακα τυποποιημένης κανονικής κατανομής

$$Z_{\alpha/2} = 1,96$$

Αρα $|Z| = 2 > 1,96$ άρα απορρίπτεται η υπόθεση

δηλαδή το μέσο βάρος δεν είναι 200 gr

Αν θεωρήσουμε την υπόθεση $H_0: \mu = 200$
 $H_1: \mu < 200$

Τότε $Z = -2$ και υπολογίζουμε το Z_{α}

$\alpha = 0,05$ τότε $1-\alpha = 0,95$ Αρα από τον πίνακα

$$Z_{\alpha} = 1,645 \quad \text{Αρα} \quad -Z_{\alpha} = -1,645$$

Τότε $-2 < -1,645$ ισχύει άρα απορρίπτεται η υπόθεση H_0 και χιέται δεκτή η H_1 .

Δηλαδή δεχόμαστε ότι το μέσο βάρος του ενός κουτιού είναι μικρότερο των 200gr

Πολλές φορές χρειάζεται να συγκριθούν οι μέσες τιμές δύο πληθυσμών και να ελεχθεί στατιστικά αν μπορούν να θεωρηθούν ως ίσες ή αν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη διαφορά μεταξύ τους. Στις περιπτώσεις αυτές θεωρείται ότι υπάρχουν δύο πληθυσμοί X και Y με αντίστοιχα μεγέθη δειγμάτων x και y που επιδέχθηκαν ανεξάρτητα, μέσες τιμές παρατηρήσεων μ_x και μ_y και τυπικές αποκλίσεις σ_x και σ_y αντίστοιχα.

Τώρα η μηδενική υπόθεση διατυπώνεται ως

$$H_0: \mu_x = \mu_y \quad \text{ή} \quad H_0: \mu_x - \mu_y = \mu_0$$

ενώ η εναλλακτική υπόθεση διατυπώνεται ως

$$H_1: \mu_x \neq \mu_y \quad \text{ή} \quad H_1: \mu_x - \mu_y \neq \mu_0$$

Ο έλεγχος μπορεί να είναι αμφίπλευρος ή μονόπλευρος αριστερά ή δεξιά όπως και στον έλεγχο μια μέσης τιμής.

Η επιλογή του στατιστικού που χρησιμοποιείται για την σύγκριση των δύο μέσων τιμών εξαρτάται όπως και στον έλεγχο υπόθεσης μιας μέσης τιμής από τρεις παράγοντες,

1. Την κατανομή που ακολουθούν οι δύο πληθυσμοί
2. Αν οι τυπικές αποκλίσεις των πληθυσμών είναι γνωστές ή όχι
3. Τα μεγέθη των δύο δειγμάτων (αν είναι μικρά ή μεγάλα)

Κανονική κατανομή πληθυσμών με γνωστές τυπικές αποκλίσεις (σελ 97)
 Έλεγχος ισότητας μέσων τιμών

Τύπος ελέγχου	Υπόθεση H_0	Υπόθεση H_1	Περιοχή απόρριψης
Αμφίπλευρος	$\mu_x = \mu_y$	$\mu_x \neq \mu_y$	$ Z = \frac{ \bar{X} - \bar{Y} }{\sigma_w} > Z_{\alpha/2}$
Δεξιά μονόπλευρος	$\mu_x = \mu_y$	$\mu_x > \mu_y$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_w} > Z_\alpha$
Αριστερά μονόπλευρος	$\mu_x = \mu_y$	$\mu_x < \mu_y$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sigma_w} < -Z_\alpha$

Έλεγχος διαφοράς μέσων τιμών σε σχέση με την τιμή μ_0

Τύπος ελέγχου	Υπόθεση H_0	Υπόθεση H_1	Περιοχή απόρριψης
Αμφίπλευρος	$\mu_x - \mu_y = \mu_0$	$\mu_x - \mu_y \neq \mu_0$	$ Z = \frac{ \bar{X} - \bar{Y} - \mu_0 }{\sigma_w} > Z_{\alpha/2}$
Δεξιά μονόπλευρος	$\mu_x - \mu_y = \mu_0$	$\mu_x - \mu_y > \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sigma_w} > Z_\alpha$
Αριστερά μονόπλευρος	$\mu_x - \mu_y = \mu_0$	$\mu_x - \mu_y < \mu_0$	$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sigma_w} < -Z_\alpha$

όπου $\sigma_w = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}$ όπου σ_x, σ_y οι τυπικές αποκλίσεις των δύο πληθυσμών n, m τα μεγέθη των δύο δειγμάτων και μ_0 η τιμή με την οποία συγκρίνεται η διαφορά των $\bar{X}$ και $\bar{Y}$
 α το επίπεδο σημαντικότητας

Άσκηση Παρουσιάζονται παρακάτω τα αποτε-(64/93)

→ Έξομα που είχε η επίδραση δυο φαρμάκων Α και Β που χορηγήθηκαν σε καρδιοπαθείς ασθενείς. Τα αποτελέσματα αναφέρονται σε μετρήσεις της χοληστερόλης στο αίμα (mg/100ml) σε κάθε ασθενή χορηγήθηκε ένα από τα δύο φάρμακα.

Φάρμακο Α: 250-259-350-325-300-275-215-290-290-258-260-270
-300 $n=13$

Φάρμακο Β: 230-200-240-280-290-257-217-230-260-250-270
 $n=11$

Με την υπόθεση ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή μπορούμε να ιχυρίστούμε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,05$ ότι τα δύο φάρμακα είναι ισοδύναμα όσον αφορά το επίπεδο της χοληστερόλης

Λύση

Η μηδενική υπόθεση είναι $H_0: \mu_A = \mu_B$

ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

$$\mu_A = \frac{250 + 259 + \dots + 270 + 300}{13} = 280,15$$

$$\mu_B = \frac{230 + 200 + \dots + 270}{11} = 247,64$$

Θεωρούμε ότι οι τυπικές αποκλίσεις των πληθυσμών

$$\sigma_A = \frac{1}{13} \sqrt{(250 - 280,15)^2 + (259 - 280,15)^2 + \dots + (300 - 280,15)^2} = 34,76$$

$$s_B = \frac{1}{11} \cdot \sqrt{(230-249,64)^2 + (200-249,64)^2 + \dots + (270-249,64)^2} = 27,34 \quad (68,99)$$

Το στατιστικό $Z = \frac{\mu_A - \mu_B}{s_W}$ ακολουθεί την

κανονική κατανομή

$$s_W = \sqrt{\frac{s_A^2}{13} + \frac{s_B^2}{11}} = \sqrt{\frac{(30,76)^2}{13} + \frac{(27,34)^2}{11}} = 12,68$$

Αρα $Z = \frac{280,15 - 249,64}{12,68} = 2,56$

Έχουμε $\alpha = 0,05$ τότε $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ και

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0,025 = 0,975.$$

Πηχαινουμε στον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής (βελ 11) το 0,975 αντιστοιχεί στο 1,96. Αρα $Z_{\alpha/2} = 1,96$

έχουμε $|Z| = 2,56 > 1,96 = Z_{\alpha/2}$. Ισχύει

Αρα απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση.

Αρα ισχύει η εναλλακτική υπόθεση $H_1: \mu_A \neq \mu_B$ και συνεπώς τα δύο φάρμακα δεν θεωρούνται

ισοδύναμα. Προφανώς επειδή $\mu_B < \mu_A$ το

φάρμακο Β μειώνει το επίπεδο χοληστερόλης περισσότερο.

Αν ελέχχαμε την διαφορά μέσων τιμών (βλ. 23)
να είναι ίση με 10 μονάδες. $H_0: \mu_A - \mu_B = 10$

Τότε $Z = \frac{\mu_A - \mu_B - \mu_0}{\sigma_w} = \frac{280,15 - 249,64 - 10}{12,68} = 1,78$
 $H_1: \mu_A - \mu_B \neq 10$

Το $|Z| = 1,78$ δεν είναι μεγαλύτερο από το $z_{\alpha/2} = 1,96$

Άρα η υπόθεση H_0 ισχύει.

Κανονικές κατανομές δειγμάτων με άγνωστες αποκλίσεις και μικρά μεγέθη δειγμάτων

Όταν οι τυπικές αποκλίσεις δεν είναι γνωστές η διαδικασία που ακολουθείται εξαρτάται από το αν μπορούν να θεωρηθούν ως ίσες ή όχι. Εδώ παρουσιάζουμε την περίπτωση των ίσων τυπικών αποκλίσεων των δυο πληθυσμών

Άγνωστες ίσες μεταξύ τους τυπικές αποκλίσεις πληθυσμών

Το στατιστικό που χρησιμοποιούμε συμβολίζεται με T και ακολουθεί την κατανομή t . Πόσω ότι έχουμε μικρά δείγματα

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\hat{\sigma}^* \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}}$$

Το μ_0 μπορεί να είναι και μηδέν

$$\hat{\sigma}^* = \sqrt{\frac{(n-1)S_x^2 + (m-1)S_y^2}{n+m-2}}$$

Οι υποθέσεις είναι ίδιες με την προηγούμενη περίπτωση. Αλλάζει μόνο η περιοχή απόρριψης

Αμφίπλευρος έλεγχος έχει περιοχή απόρριψης

$|T| > t_{\alpha/2}$ με $n+m-2$ βαθμούς ελευθερίας

και α επίπεδο σημαντικότητας

Δεξιά μονόπλευρος έλεγχος $T > t_{\alpha}$ με $n+m-2$ βαθμούς ελευθερίας η περιοχή απόρριψης

Αριστερά μονόπλευρος έλεγχος $T < -t_{\alpha}$ με $n+m-2$

βαθμούς ελευθερίας η περιοχή απόρριψης

Άσκηση Οι διδάσκοντες ενός πανεπιστημιακού

μαθήματος επιθυμούν να διερευνήσουν αν οι βαθμολογίες των φοιτητών στα δυο τμήματα που υπάρχουν διαφέρουν μεταξύ τους. Για τον σκοπό αυτό εξέτασαν δυο δείγματα βαθμολογιών ένα από κάθε τμήμα.

Η μέση βαθμολογία 15 φοιτητών στο τμήμα Α είναι 6 και στο τμήμα Β 12 φοιτητών είναι 7. Αντίστοιχα οι τυπικές αποκλίσεις των δυο δειγμάτων είναι $\sigma_A = 1,4$ και $\sigma_B = 1,6$ θεωρώντας ότι οι βαθμολογίες ακολουθούν

την κανονική κατανομή με ίσες τυπικές αποκλίσεις. Ζητείται να εξεταστεί σε επίπεδο σημαντικότητας 0,01 αν οι μέσες βαθμολογίες των δυο ομάδων είναι στατιστικά ίσες ή διαφορετικές.

Λύση

$$H_0: \mu_A = \mu_B$$

$$H_1: \mu_A \neq \mu_B$$

$$T = \frac{\mu_A - \mu_B - 0}{\hat{\sigma}^* \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{12}}} = \frac{6 - 7}{1,49 \sqrt{\frac{27}{15 \cdot 12}}} = -1,73$$

$$\hat{\sigma}^* = \sqrt{\frac{(15-1) \cdot S_A^2 + (12-1) \cdot S_B^2}{15+12-2}} = \sqrt{\frac{14 \cdot (1,9)^2 + 11 \cdot 1,6^2}{25}} = 1,49$$

Έχουμε $\alpha = 0,01$ τότε $\frac{\alpha}{2} = 0,005$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,995$

Βαθμοί ελευθερίας $n+m-2 = 15+12-2 = 25$

Απο τον πίνακα της t κατανομής έχουμε (66/13) $t_{1/2} = 2,787$

Έχουμε $|T| = 1,73$ δεν είναι μεγαλύτερο του $t_{1/2} = 2,787$. Άρα ισχύει η υπόθεση H_0 άρα οι βαθμολογίες των δυο τμημάτων είναι στατιστικά ισοδύναμες.

Όταν τα μεχέθη των δειγμάτων είναι μεγάλα (ή, μν, 30)
το στατιστικό $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \mu_0}{\sigma_w}$ (με το μ_0 να παίρνει
και την τιμή 0)

Θεωρείται ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή
οποιαδήποτε κατανομή και αν ακολουθούν οι δυο
πληθυσμοί.

Η μηδενική υπόθεση είναι $H_0: \mu_x = \mu_y$ ή $\mu_x - \mu_y = \mu_0$
και η εναλλακτική υπόθεση είναι $H_1: \mu_x \neq \mu_y$ ή $\mu_x - \mu_y \neq \mu_0$
αντίστοιχα

Οι περιοχές απορρίψης είναι

Αρχιπέδος έλεγχος $|Z| > Z_{\alpha/2}$

Δεξιά Μονόπλευρος $Z > Z_{\alpha}$

Αριστερά Μονόπλευρος $Z < -Z_{\alpha}$

Άσκηση: Η σύγκριση των συνθημάτων μέδων
θέρμανσης κατοικιών (πετρέλαιο και φυσικό αέριο)
όσον αφορά στο ετήσιο κόστος λειτουργίας των
συστημάτων θέρμανσης τους παρουσιάζει τόσο
οικονομικό, όσο και πρακτικό ενδιαφέρον. Για τον
σκοπό αυτό επιλέχθηκαν 200 κατοικίες παρόμοιου
μεχέθους και ενεργειακών τα μισά από
τα οποία χρησιμοποιούν πετρέλαιο ενώ τα
άλλα μισά φυσικό αέριο. Το μέσο ετήσιο κόσ-

-τος των κατοικιών της πρώτης ομάδας (χρήση πετρε-
 -λαίου) υπολογίστηκε σε 1400 € με τυπική απόκλι-
 -ση 200 € ενώ της δεύτερης (χρήση φυσικού αερίου)
 σε 1300 € με τυπική απόκλιση 140 €
 Θεωρώντας ότι το ετήσιο κόστος λειτουργίας
 ακολουθεί κανονική κατανομή μπορεί να συναχθεί
 στατιστικά σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05
 ότι αυτό μειώνεται με τη χρήση φυσικού αερίου

Λύση Έστω μ_{π} μέσο κόστος με πετρέλαιο
 μ_{ϕ} -||- -||- -||- φυσικό αέριο

Οι υποθέσεις είναι $H_0: \mu_{\pi} = \mu_{\phi}$

$H_1: \mu_{\pi} > \mu_{\phi}$

Έχουμε δεξιά μονόπλευρο έλεγχο

$$\text{Το στατιστικό } Z = \frac{\mu_{\pi} - \mu_{\phi}}{6W} = \frac{1400 - 1300}{24,41} = 4,1$$

$$6W = \sqrt{\frac{\sigma_{\pi}^2}{n} + \frac{\sigma_{\phi}^2}{m}} = \sqrt{\frac{(200)^2}{100} + \frac{(140)^2}{100}} = 24,41$$

$$n = m = 100$$

Το επίπεδο σημαντικότητας είναι $\alpha = 0,05$

Άρα $1 - \alpha = 1 - 0,05 = 0,95$. Από τον πίνακα της
 τυποποιημένης κατανομής $Z_{\alpha} = 1,645$

Εξετάσουμε την περιοχή απορρίψης

(6ε)
105

$$Z > Z_{\alpha/2} \Leftrightarrow 4,1 > 1,645. \text{ ισχύει}$$

Αρα απορρίπτεται η υπόθεση H_0 και γίνεται δεκτή η υπόθεση H_1 . $\mu_n > \mu_\phi$.

Αρα συμπέρασμα η χρήση φυσικού αερίου μειώνει το ετήσιο κόστος λειτουργίας και συντήρησης μιας κατοικίας.

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ ΣΕ ΖΕΥΓΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΩΝ

Η προηγούμενη ενότητα αφορούσε ελέγχους υποθέσεων που αναφερόταν στη σύγκριση των μέσων τιμών δειγμάτων που επιλέχθηκαν ανεξάρτητα από αντίστοιχους πληθυσμούς

Εδώ έχουμε τον έλεγχο υποθέσεων που αφορούν ζεύγη παρατηρήσεων (X_i, Y_i) $i=1 \dots n$ και έχουμε σύγκριση διαφορών μέσων τιμών.

$$D_i = X_i - Y_i \quad i=1, 2, \dots, n$$

Η μηδενική υπόθεση είναι

$$H_0: \mu_D = 0 \text{ ή } H_0: \mu_D = \mu_0$$

$$\text{όπου } \mu_D = \mu_X - \mu_Y$$

Η εναλλακτική υπόθεση

$H_1: \mu_D \neq 0$ ή $H_1: \mu_D \neq \mu_0$ όταν ο έλεγχος
είναι αμφίπλευρος

και $H_1: \mu_D > 0$ ή $H_1: \mu_D > \mu_0$ δεξιά μονόπλευρος

και $H_1: \mu_D < 0$ ή $H_1: \mu_D < \mu_0$ αριστερά μονόπλευρος

Το στατιστικό που χρησιμοποιείται ακολουθεί
σε όλες τις περιπτώσεις την t -κατανομή με
 $n-1$ βαθμούς ελευθερίας

$$T = \frac{\bar{D} - \mu_0}{S_D / \sqrt{n}} \quad (\text{το } \mu_0 \text{ μπορεί να πάρει} \\ \text{και την τιμή μηδέν})$$

$\bar{D}$: Η μέση τιμή του δείγματος των διαφορών
 $D_i = X_i - Y_i$

S_D : η τυπική απόκλιση του δείγματος των δια-
φορών

μ_0 : η τιμή με την οποία συγκρίνεται η μέση τι-
μή των διαφορών

Οι περιοχές απόρριψης είναι:

Αμφίπλευρο: $|T| > t_{\alpha/2}$

Δεξιά μονόπλευρο: $T > t_{\alpha/2}$

Αριστερά μονόπλευρο: $T < -t_{\alpha/2}$

Αδκνη

Εξετάζουμε την αποτελεσματικότητα ενός φαρμάκου

χοληστερόλης πριν και μετά την χρήση του.
Έχουμε δείγμα 14 αθένων και παίρνουμε τις ενδείξεις

Πριν	280	290	300	285	290	260	290	290	280	300	250	280	290	300
Μετά	260	280	280	260	245	250	250	280	280	280	250	270	270	280

Θεωρώντας ότι οι μετρήσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή μπορούμε να ιχυριστούμε σε επίπεδο σημαντικότητας 0,05 ότι τα επίπεδα χοληστερόλης στο αίμα είναι ισοδύναμα πριν από την χορήγηση του φαρμάκου και μετά από αυτήν

Λύση Η διαφορά $D_i = X_i - Y_i$ $i=1,2,\dots,14$ είναι

D_i 20, 10, 20, 25, 25, 10, 40, 10, 0, 20, 0, 10, 20, 20

$$\bar{D} = \frac{20+10+\dots+20}{14} = 16,4$$

$$S_D = 2,66$$

$$\begin{aligned}\text{Το στατιστικό } T &= \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{14}} = \\ &= \frac{16,4}{2,66/\sqrt{14}} = 23,1\end{aligned}$$

Η μηδενική υπόθεση είναι

$H_0: \mu_D = 0$ και η εναλλακτική υπόθεση είναι $H_1: \mu_D \neq 0$

Το $\alpha = 0,05$ τότε $\frac{\alpha}{2} = 0,025$ $1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$

και έχουμε 13 βαθμούς ελευθερίας

Από τον πίνακα της t κατανομής έχουμε

$$t_{\alpha/2} = 2,160$$

Η περιοχή απόρριψης $|T| > t_{\alpha/2}$ $23,1 > 2,160$

ισχύει. Άρα απορρίπτεται η H_0 . Δηλαδή

η χρήση του φαρμάκου αλλάζει το επίπεδο χοληστερόλης στο αίμα