



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 8: Προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης πλακών (μέρος Β)

Γιάννης Καλογεράς
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2024-2025

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024



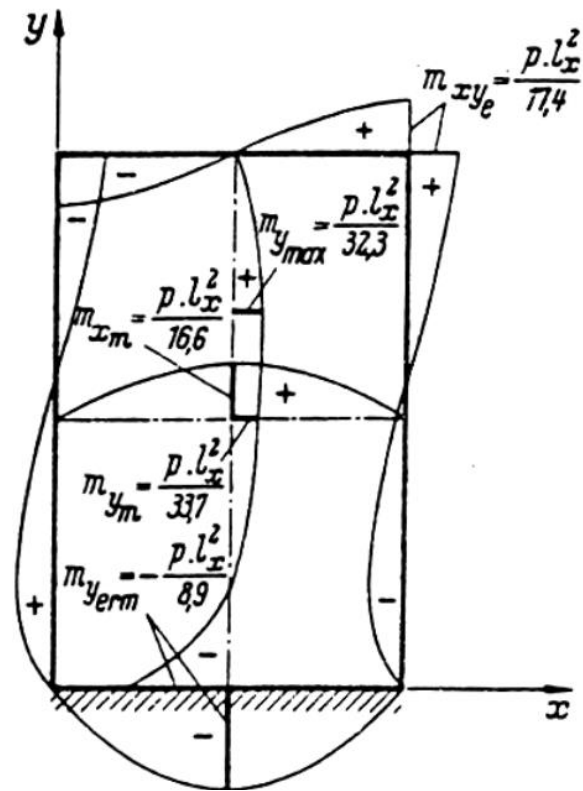
Μέθοδοι για πλάκες καμπτόμενες σε 2 διεύθυνσεις

- Μέθοδος λωρίδας Marcus
 - Θεωρεί ότι η πλάκα κάμπτεται ως μια λωρίδα στη διεύθυνση x και μία άλλη λωρίδα στη διεύθυνση y .
 - Υπολογίζει ροπές και βέλη κάμψης.
- Μέθοδος ελαστικότητας Czerny
 - Υπολογίζει ροπές, βέλη κάμψης καί αντιδράσεις στις στηρίξεις.
 - Τα παραπάνω υπολογίζονται με βοήθεια συντελεστών που διαβάζονται από πίνακες, ανάλογα με τη γεωμετρία, φόρτιση και στηρίξεις.
- Απλοποιημένη μέθοδος για κατανομή αντιδράσεων σε τετραέριστες πλάκες
 - Υπολογίζει τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.
 - Αυτές θα είναι οι φορτίσεις των δοκών.
 - Υπολογίζει τις τέμνουσες δυνάμεις στις στηρίξεις.

Μέθοδος Czerny

- Στη μέθοδο Czerny οι ροπές, οι βυθίσεις και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις προκύπτουν από πίνακες.
- Οι πίνακες ονομάζονται εκ μέρους του Αυστρού μηχανικού Czerny, που τους συνέταξε.
- Υπάρχει ένας πίνακας για καθεμία από τις κατηγορίες στήριξης 1-6
- Οι πίνακες περιέχουν συντελεστές με τους οποίους υπολογίζουμε τις ροπές και τις βυθίσεις, παρόμοια με τη μέθοδο Marcus.
- Οι συντελεστές δίνονται για συγκεκριμένους λόγους L_y/L_x . Αν θέλουμε ενδιάμεση τιμή, πρέπει να κάνουμε γραμμική παρεμβολή.
- Προσοχή: Οι πίνακες είναι φτιαγμένοι για $L_y > L_x$. Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να εναλλάξουμε τις τιμές που παίρνουμε. Π.χ. όπου γράφει m_x να το πάρουμε ως m_y .

Μέθοδος Czerny

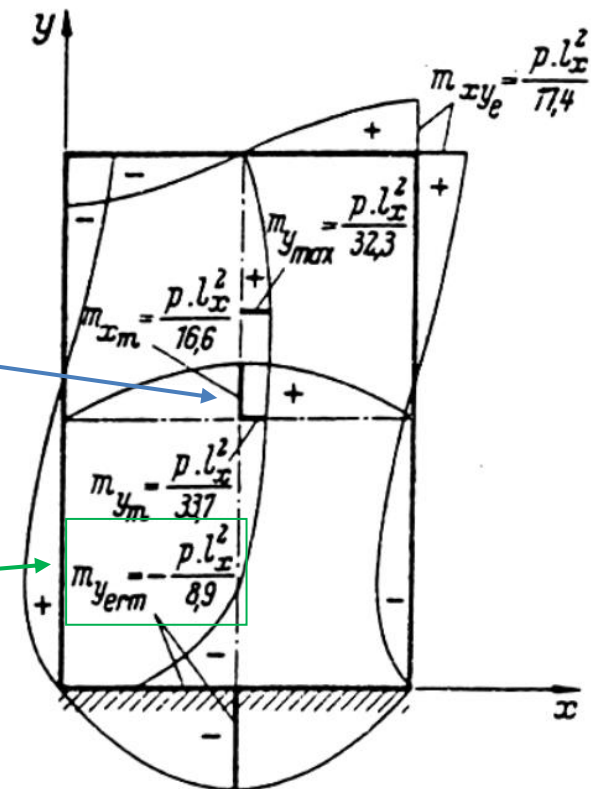


- Έστω $p = 10 \text{ kN/m}^2$, $L_x = 2 \text{ m}$, κατηγορία στήριξης 2β και $L_y/L_x = 1,20$
- Από τον πίνακα διαβάζουμε συντελεστές για π.χ. ροπή στη στήριξη (10,1) και βύθιση (0,0512)
- Ροπή στη στήριξη: $M_{y,erm} = -\frac{p L_x^2}{10,1} = \dots$
- Βύθιση μέσου: $f_m = \frac{p L_x^4}{E d^3} \cdot 0,0512 = \dots$

$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{xm} =$	41,2	36,5	31,9	28,3	25,9	23,4	21,7	20,1	18,8	17,5	16,6
$m_{yerm} = -$	11,9	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,0	8,9
$m_{ymax} =$	29,4	29,0	28,8	28,8	28,9	29,2	29,7	30,2	30,8	31,6	32,3
$m_{xve} = \pm$	26,2	24,5	23,2	21,9	21,0	20,1	19,4	18,7	18,3	17,7	17,4
$R_e =$	13,1	12,2	11,6	10,9	10,5	10,0	9,7	9,3	9,1	8,8	8,7
$\bar{q}_{xrm} =$	2,59	2,49	2,42	2,34	2,29	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07
$\bar{q}_{yerm} =$	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44
$\bar{q}_{vrm} =$	2,47	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,04	2,01	1,98	1,96
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3} \cdot$	0,0334	0,0378	0,0422	0,0467	0,0512	0,0557	0,0602	0,0645	0,0689	0,0731	0,0773

Μέθοδος Czerny

- Οι πίνακες συνοδεύονται από σχήματα όπου φαίνεται σε ποια σημεία αντιστοιχούν τα μεγέθη (π.χ. M_{xm}) που δίνει ο πίνακας
- Ο τρόπος υπολογισμού των μεγεθών δίνεται
 - Στην 1^η στήλη του πίνακα
 - Στα σχήματα.



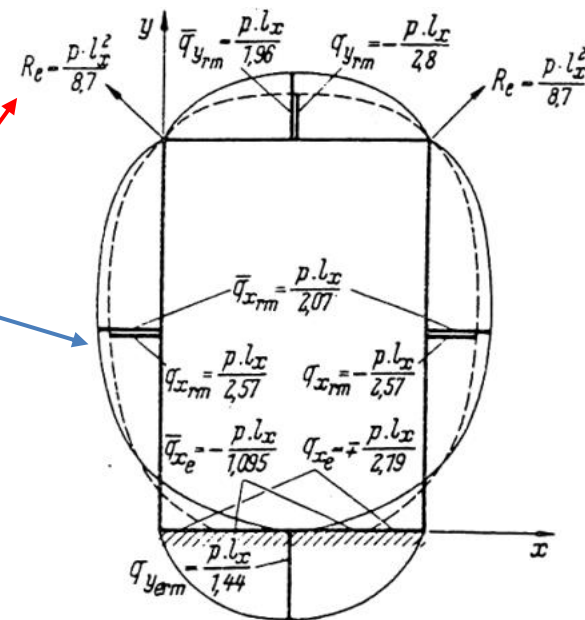
$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{xm} =$	41,2	36,5	31,9	28,3	25,9	23,4	21,7	20,1	18,8	17,5	16,6
$m_{yerm} =$	11,9	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,0	8,9
$m_{ymax} =$	29,4	29,0	28,8	28,8	28,9	29,2	29,7	30,2	30,8	31,6	32,3
$m_{xve} = \pm$	26,2	24,5	23,2	21,9	21,0	20,1	19,4	18,7	18,3	17,7	17,4
$R_e =$	13,1	12,2	11,6	10,9	10,5	10,0	9,7	9,3	9,1	8,8	8,7
$\bar{q}_{xrm} =$	2,59	2,49	2,42	2,34	2,29	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07
$\bar{q}_{yerm} =$	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44
$\bar{q}_{vrm} =$	2,47	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,04	2,01	1,98	1,96
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0334	0,0378	0,0422	0,0467	0,0512	0,0557	0,0602	0,0645	0,0689	0,0731	0,0773

Μέθοδος Czerny

- Οι συντελεστές δίνονται για συγκεκριμένους λόγους L_y/L_x .
 - Αν θέλουμε ενδιαμέση τιμή, πρέπει να κάνουμε γραμμική παρεμβολή.
- Προσοχή: Οι πίνακες είναι φτιαγμένοι για $L_y > L_x$.
 - Σε αντίθετη περίπτωση πρέπει να εναλλάξουμε τις τιμές που παίρνουμε. Π.χ. όπου γράφει m_x να το πάρουμε ως m_y .
- Προσοχή στη χρήση των συντελεστών
 - Κάποιοι συντελεστές πρέπει να διαιρεθούν. Σημειώνονται με :
 - Άλλοι συντελεστές πρέπει να πολλαπλασιαστούν. Σημειώνονται με ·
- Οι πίνακες Czerny δίνονται σε ξεχωριστό αρχείο.

Μέθοδος Czerny

- Οι πίνακες Czerny δίνουν επίσης συντελεστές (και αντίστοιχα σχήματα) για τον υπολογισμό
 - Των αντιδράσεων στις στηρίξεις (δοκούς)
 - Των συγκεντρωμένων δυνάμεων στις γωνίες



$$\bar{q}_{yerm} = q_{yerm}$$

$l_y : l_x$	1,00	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35	1,40	1,45	1,50
$m_{xm} =$	41,2	36,5	31,9	28,3	25,9	23,4	21,7	20,1	18,8	17,5	16,6
$m_{yerm} = -$	11,9	11,3	10,9	10,4	10,1	9,8	9,6	9,3	9,2	9,0	8,9
$m_{ymax} =$	29,4	29,0	28,8	28,8	28,9	29,2	29,7	30,2	30,8	31,6	32,3
$m_{xve} = \pm$	26,2	24,5	23,2	21,9	21,0	20,1	19,4	18,7	18,3	17,7	17,4
$R_e =$	13,1	12,2	11,6	10,9	10,5	10,0	9,7	9,3	9,1	8,8	8,7
$\bar{q}_{xrm} =$	2,59	2,49	2,42	2,34	2,29	2,23	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07
$\bar{q}_{yerm} =$	1,72	1,67	1,63	1,59	1,56	1,53	1,51	1,49	1,47	1,45	1,44
$\bar{q}_{yrm} =$	2,47	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,04	2,01	1,98	1,96
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0334	0,0378	0,0422	0,0467	0,0512	0,0557	0,0602	0,0645	0,0689	0,0731	0,0773

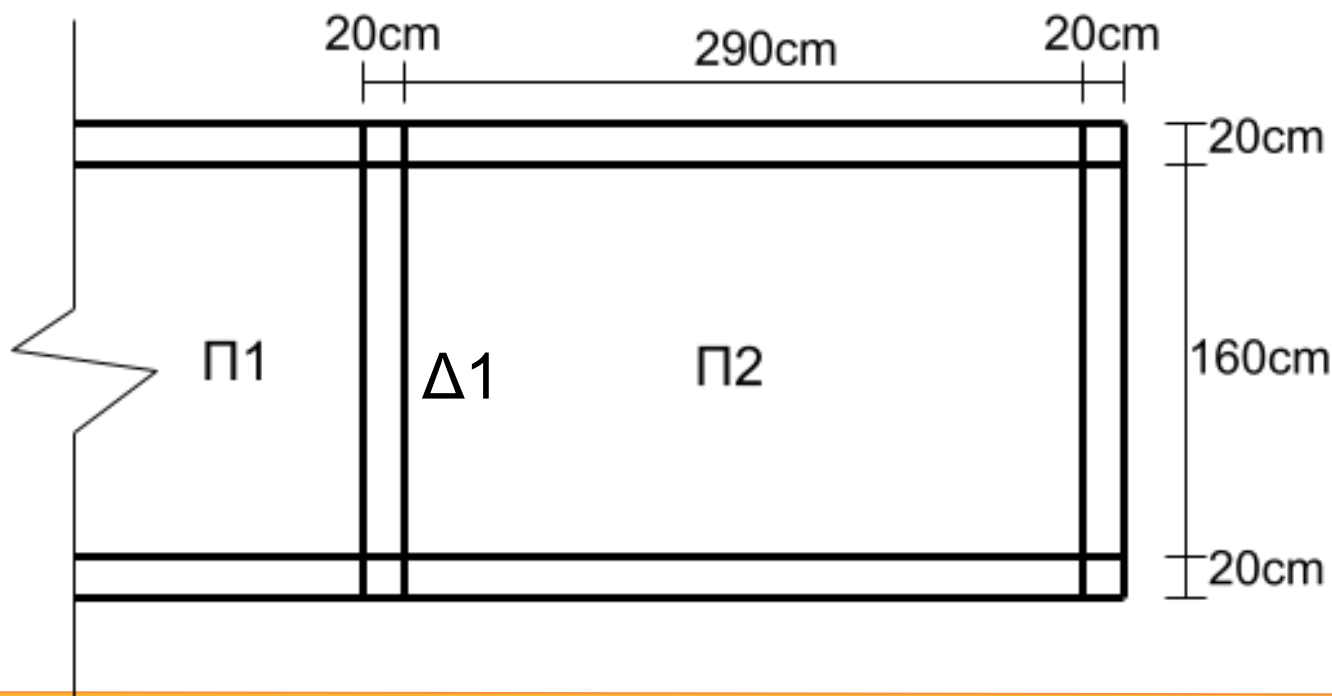


Μέθοδος Czerny - Παράδειγμα

Στο σχήμα οι πλάκες

- Είναι φτιαγμένες από σκυρόδεμα με $E = 33GPa$
- έχουν πάχος 16cm και
- φορτίζονται με ομοιόμορφο φορτίο $10kN/m^2$ στο οποίο περιλαμβάνονται μόνιμα και κινητά φορτία.

Να λυθεί η πλάκα Π2 με τη μέθοδο Czerny.



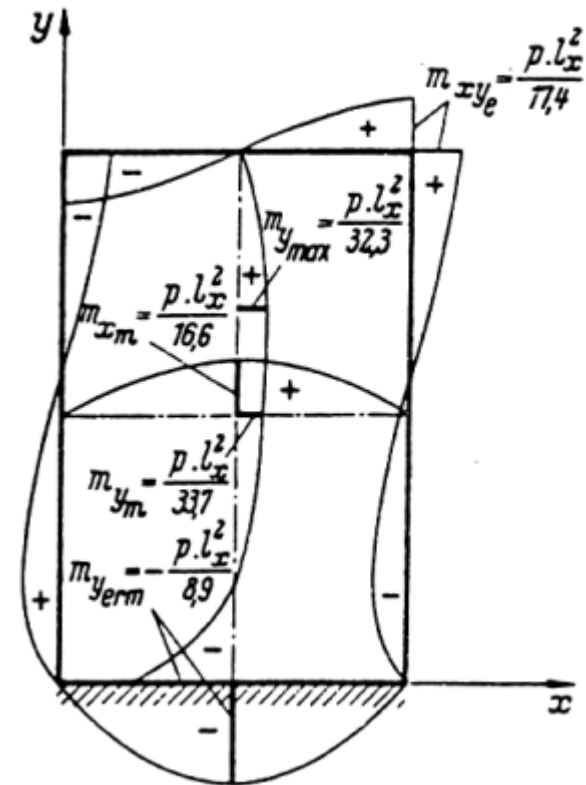
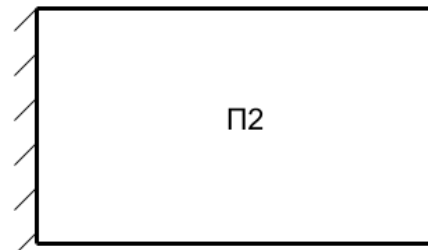
Μέθοδος Czerny - Παράδειγμα

- Βρίσκουμε όπως στο ίδιο παράδειγμα στη μέθοδο Marcus:

$$L_x = 3.2m$$

$$L_y = 2m$$

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} = \frac{3.2}{2} = 1.6 \leq 2$$



- Κανονικά η πλάκα Π2 ανήκει στην κατηγορία στήριξης 2α.
- Όμως $L_x > L_y$. Άρα θα πρέπει να αντιστρέψουμε τους άξονες για τον πίνακα Czerny.
- Άρα θα πάμε στον πίνακα 8.16, στη στήλη για $L_y/L_x = 1.6$.

Μέθοδος Czerny - Παράδειγμα

- Για τις ροπές χρειαζόμαστε το: $p \cdot L_y^2 = 10 \text{ kN/m}^2 \cdot (2\text{m})^2 = 40 \text{ kN}$
- Βύθιση στο μέσο

Προσοχή! Έχω
αλλάξει τους άξονες

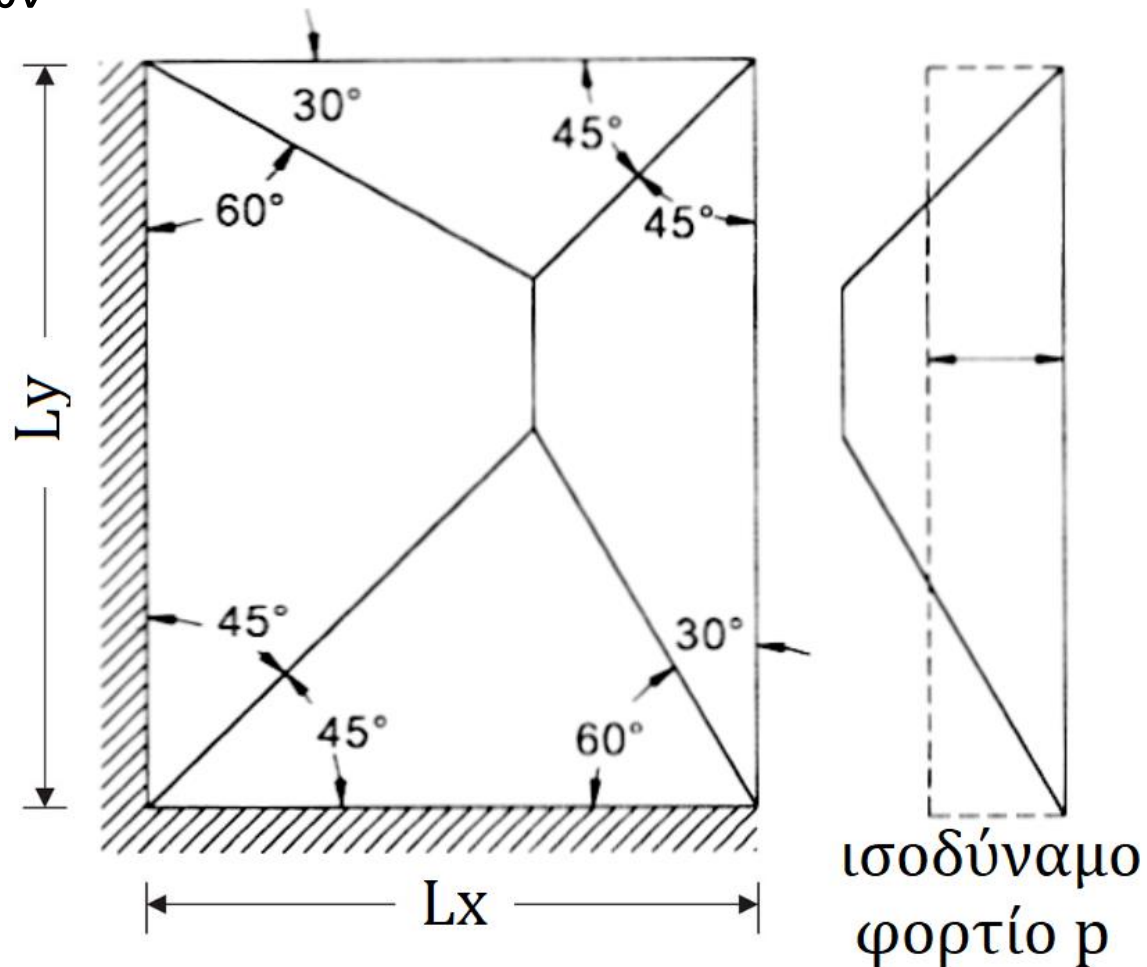
$$f_m = \frac{p \cdot L_y^4}{E \cdot d^3} \cdot 0.0852 = \frac{10 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot (2\text{m})^4}{33 \cdot 10^6 \text{ kPa} \cdot (0.16\text{m})^3} \cdot 0.0852$$

$$\Rightarrow f_m = 0.16 \text{ mm}$$

$l_y : l_x$	1,50	1,55	1,60	1,65	1,70	1,75	1,80	1,85	1,90	1,95	2,00
$m_{x_m} =$	16,6	15,7	15,0	14,3	13,8	13,2	12,8	12,3	12,0	11,6	11,4
$m_{y_{\text{erm}}} = -$	8,9	8,8	8,7	8,6	8,5	8,45	8,4	8,35	8,3	8,25	8,2
$m_{y_{\text{max}}} =$	32,3	33,0	33,6	34,3	34,9	35,6	36,2	36,9	37,5	38,2	38,8
$m_{x_{\text{ve}}} = \pm$	17,4	17,0	16,8	16,5	16,3	16,1	15,9	15,7	15,6	15,5	15,4
$R_\theta =$	8,7	8,5	8,4	8,2	8,1	8,0	7,9	7,8	7,8	7,7	7,7
$\bar{q}_{x_{\text{rm}}} =$	2,07	2,05	2,03	2,01	1,99	1,98	1,97	1,96	1,96	1,95	1,95
$\bar{q}_{y_{\text{erm}}} =$	1,44	1,43	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37
$\bar{q}_{y_{\text{rm}}} =$	1,96	1,94	1,92	1,90	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,84	1,84
$f_m = \frac{p \cdot l_x^4}{E \cdot d^3}$	0,0773	0,0815	0,0852	0,0892	0,0926	0,0962	0,0994	0,1027	0,1056	0,1085	0,1112

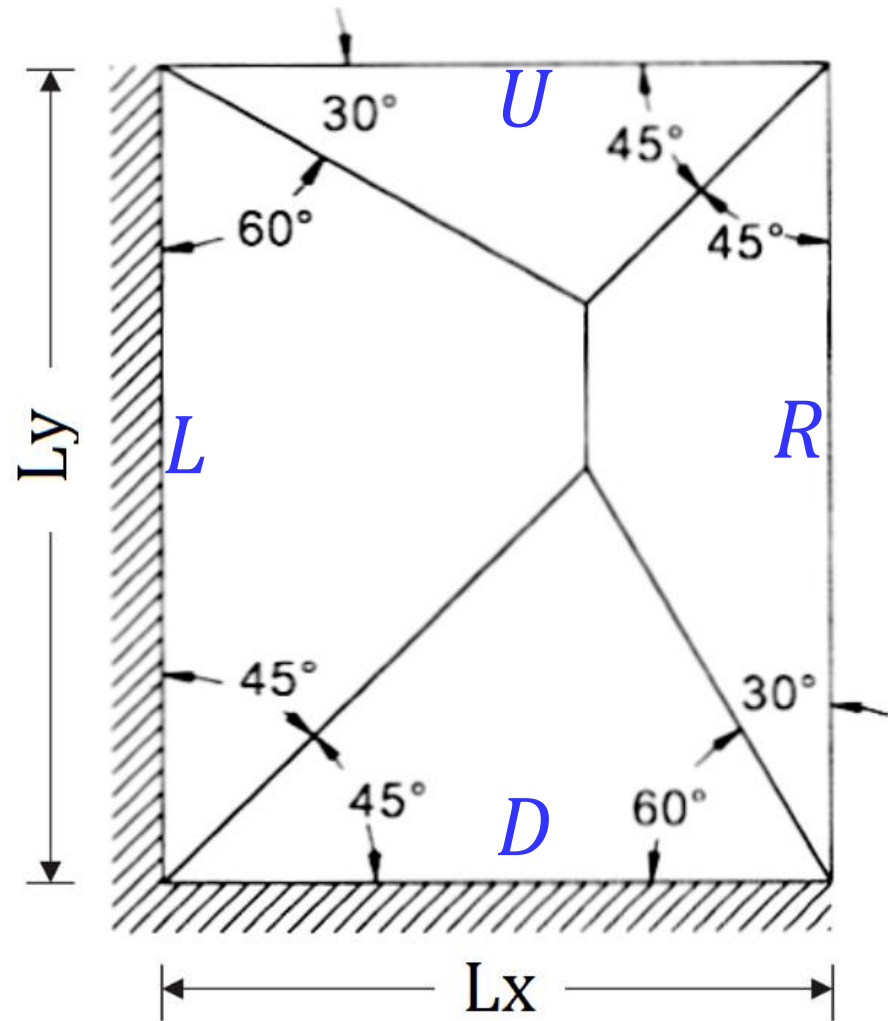
Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

- Κατανομή του φορτίου στις στηρίξεις ανάλογα με τον τύπο στηρίξεων και τα μήκη L_x , L_y των παρειών
- Γεωμετρική μέθοδος
 - Σημαντική απλοποίηση και μείωση ακρίβειας.
 - Δεν λαμβάνει υπόψη την ακριβή δυσκαμψία της πλάκας ανά διεύθυνση.
- Για πάκτωση-πάκτωση ή απλή-απλή έδραση, χωρίζω τις γωνίες:
 $45^\circ - 45^\circ$
- Αλλιώς: $60^\circ - 30^\circ$, υπέρ της πάκτωσης
- Μερική πάκτωση: ενδιάμεσες τιμές



Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

- Ισοδύναμα φορτία στις δοκούς
 p_L p_R p_D p_U
- Αυτές είναι και οι αντιδράσεις στήριξης από τις δοκούς προς την πλάκα
- Τέμνουσες στην πλάκα στις θέσεις στήριξης
 $V_{x,L}$ $V_{x,R}$ $V_{y,D}$ $V_{y,U}$
- Οι δείκτες L, R, D, U δείχνουν σε ποια δοκό αναφέρεται η αντίστοιχη ποσότητα



Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_y > L_x$

- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} > 1$

Για επαλήθευση:
 $\rho_L + \rho_R = 1$

- Μήκη

$$\rho_L = \frac{\cot a_1}{\cot a_1 + \cot a_2}$$

$$L = \rho_L L_x$$

$$\rho_R = \frac{\cot a_2}{\cot a_1 + \cot a_2}$$

$$R = \rho_R L_x$$

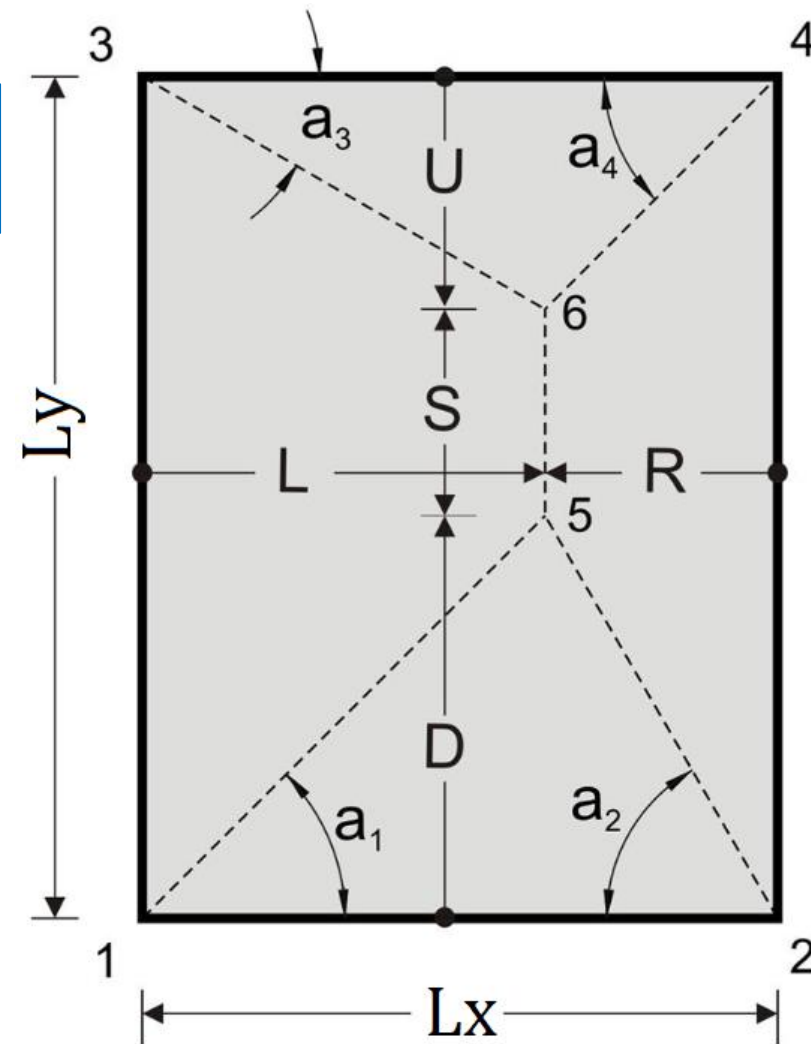
$$\rho_D = \frac{1}{\cot a_1 + \cot a_2}$$

$$D = \rho_D L_x$$

$$\rho_U = \frac{1}{\cot a_3 + \cot a_4}$$

$$U = \rho_U L_x$$

$$S = L_y - D - U$$



Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_y > L_x$

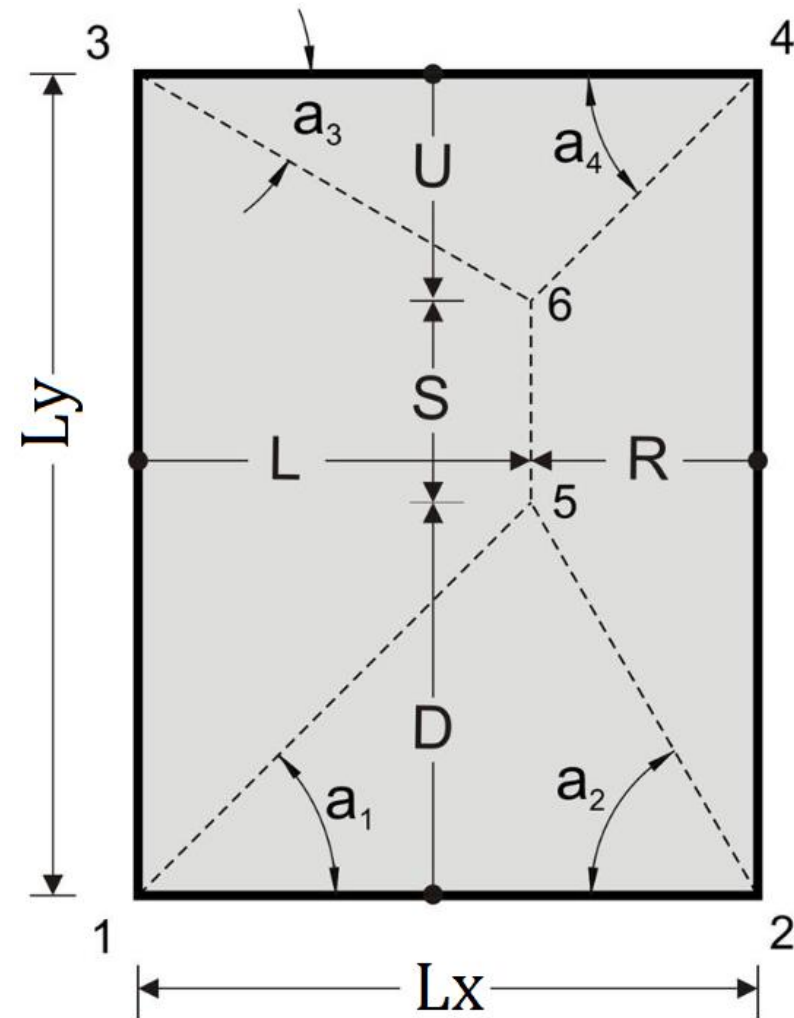
- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} > 1$
- Τα ισοδύναμα φορτία στις δοκούς βρίσκονται γεωμετρικά ως $p_i = p \cdot A_i / L_i$
- Π.χ. για την αριστερή δοκό:

$$\begin{aligned} A_{1,3,6,5} &= 0.5(L_y + S)L \\ &= 0.5(2L_y - D - U)L \\ &= 0.5(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L L_x^2 \end{aligned}$$

και

$$p_L = \frac{p \cdot A_{1,3,6,5}}{L_y} = \frac{0.5(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L L_x^2}{\varepsilon L_x}$$

$$\Rightarrow p_L = \boxed{\frac{0.5(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L}{\varepsilon}} p L_x$$



u_L

Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_y > L_x$ $\left(\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} > 1 \right)$

- Έτσι οι ισοδύναμες αντιδράσεις είναι

$$p_L = \frac{p \cdot A_{1,3,6,5}}{L_y} \quad p_R = \frac{p \cdot A_{2,4,6,5}}{L_y}$$

$$p_D = \frac{p \cdot A_{1,2,5}}{L_x} \quad p_U = \frac{p \cdot A_{3,4,5}}{L_x}$$

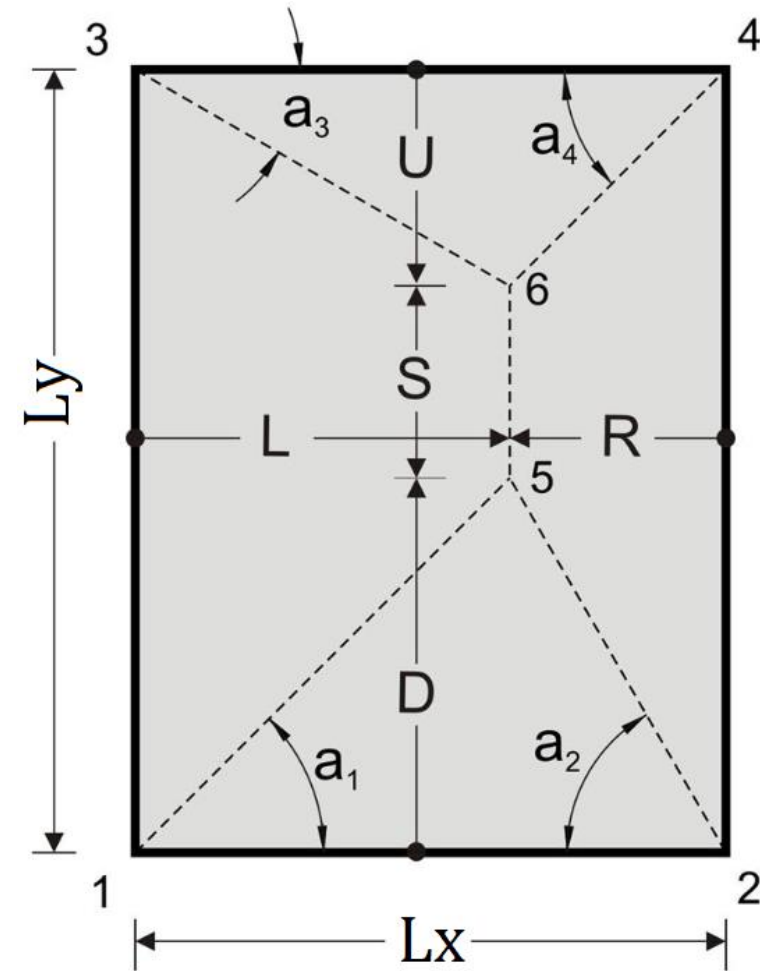
- Και υπολογίζονται ως:

$$p_L = u_L p L_x \quad u_L = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L}{2\varepsilon}$$

$$p_R = u_R p L_x \quad u_R = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_R}{2\varepsilon}$$

$$p_D = u_D p L_x \quad u_D = \frac{\rho_D}{2}$$

$$p_U = u_U p L_x \quad u_U = \frac{\rho_U}{2}$$



Για επαλήθευση:

$$u_L + u_R + \frac{(u_D + u_U)}{\varepsilon} = 1$$

Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_y > L_x$

- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} > 1$

- Τέμνουσες δυνάμεις

$$V_{x,L} = L \cdot p \quad V_{x,R} = R \cdot p$$

$$V_{y,D} = D \cdot p \quad V_{y,U} = U \cdot p$$

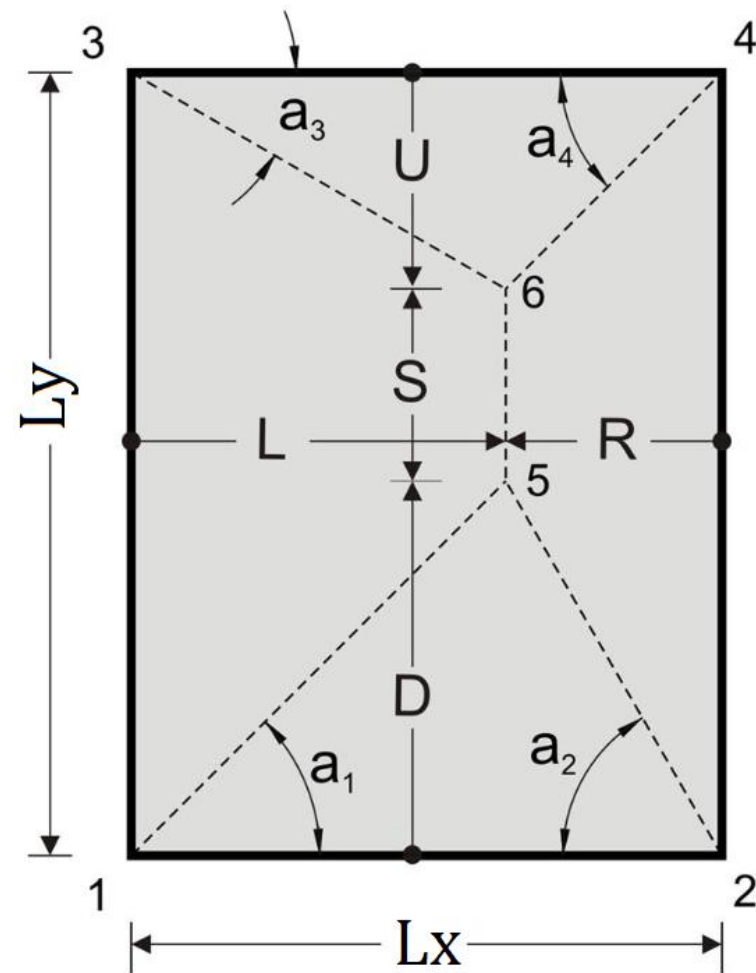
- Και υπολογίζονται ως:

$$V_{x,L} = \rho_L p L_x$$

$$V_{x,R} = \rho_R p L_x$$

$$V_{y,D} = \rho_D p L_x$$

$$V_{y,U} = \rho_U p L_x$$



Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_x > L_y$

- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} < 1$

- Μήκη

$$\rho_L = \frac{\varepsilon}{\tan a_1 + \tan a_3}$$

$$L = \rho_L L_x$$

$$\rho_R = \frac{\varepsilon}{\tan a_2 + \tan a_4}$$

$$R = \rho_R L_x$$

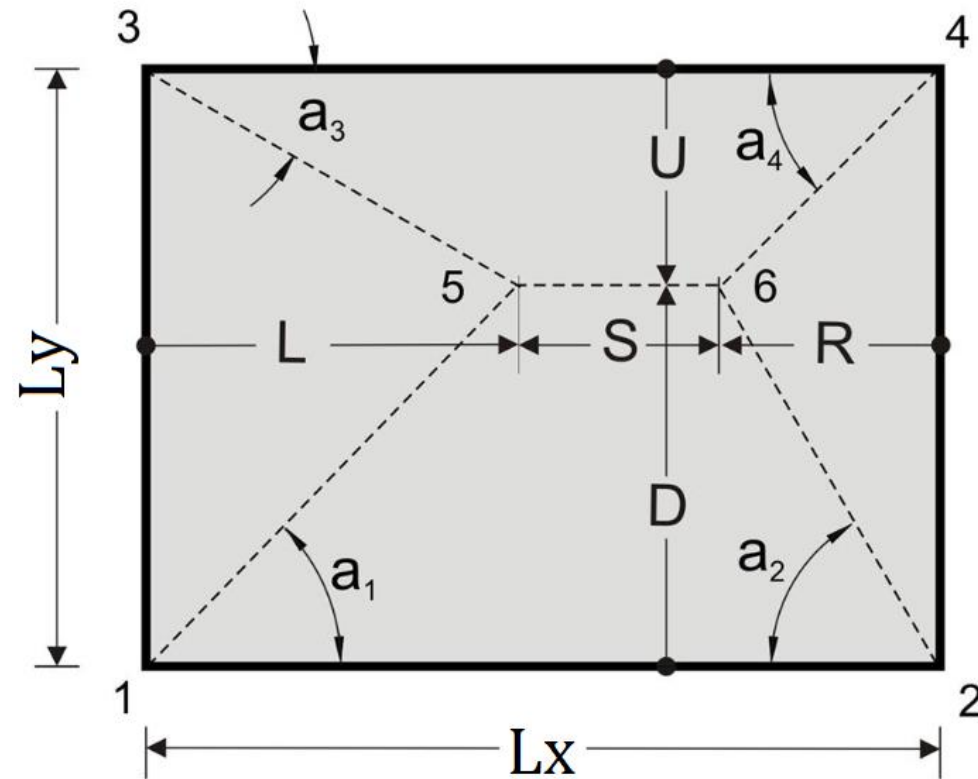
$$\rho_D = \frac{\varepsilon \cdot \tan a_1}{\tan a_1 + \tan a_3}$$

$$D = \rho_D L_x$$

$$\rho_U = \frac{\varepsilon \cdot \tan a_3}{\tan a_1 + \tan a_3}$$

$$U = \rho_U L_x$$

$$S = L_x - L - R$$



Για επαλήθευση:
 $\rho_D + \rho_U = 1$

Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_x > L_y$ ($\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} < 1$)

- Έτσι οι ισοδύναμες αντιδράσεις είναι

$$p_L = \frac{p \cdot A_{1,3,5}}{L_y} \quad p_R = \frac{p \cdot A_{2,4,6}}{L_y}$$

$$p_D = \frac{p \cdot A_{1,2,6,5}}{L_x} \quad p_U = \frac{p \cdot A_{3,4,6,5}}{L_x}$$

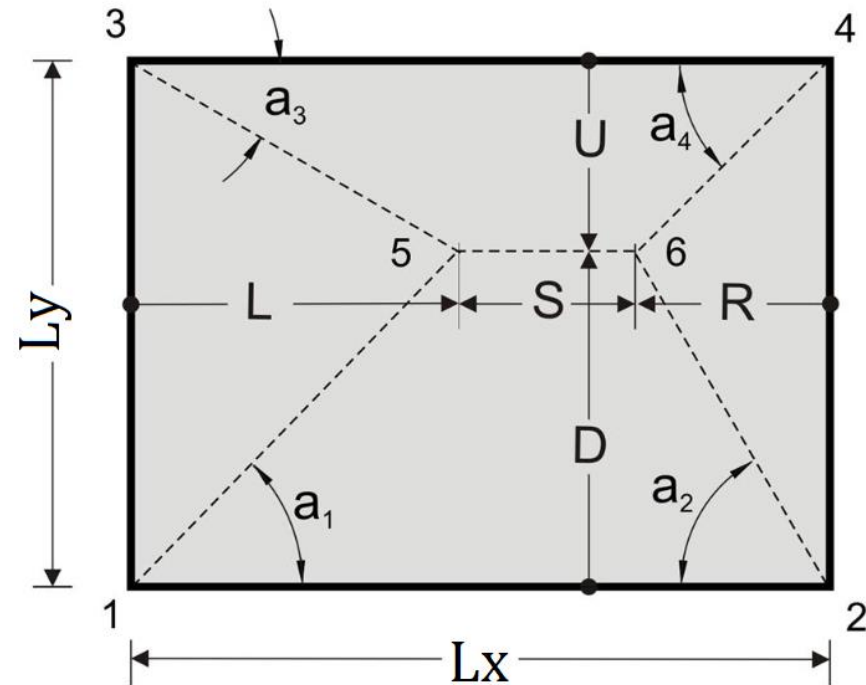
- Και υπολογίζονται ως:

$$p_L = u_L p L_x \quad u_L = \frac{\rho_L}{2}$$

$$p_R = u_R p L_x \quad u_R = \frac{\rho_R}{2}$$

$$p_D = u_D p L_x \quad u_D = \frac{(2 - \rho_L - \rho_R)\rho_D}{2}$$

$$p_U = u_U p L_x \quad u_U = \frac{(2 - \rho_L - \rho_R)\rho_U}{2}$$



Για επαλήθευση:

$$u_L + u_R + \frac{(u_D + u_U)}{\varepsilon} = 1$$

Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Περίπτωση $L_x > L_y$

- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} < 1$

- Τέμνουσες δυνάμεις

$$V_{x,L} = L \cdot p \quad V_{x,R} = R \cdot p$$

$$V_{y,D} = D \cdot p \quad V_{y,U} = U \cdot p$$

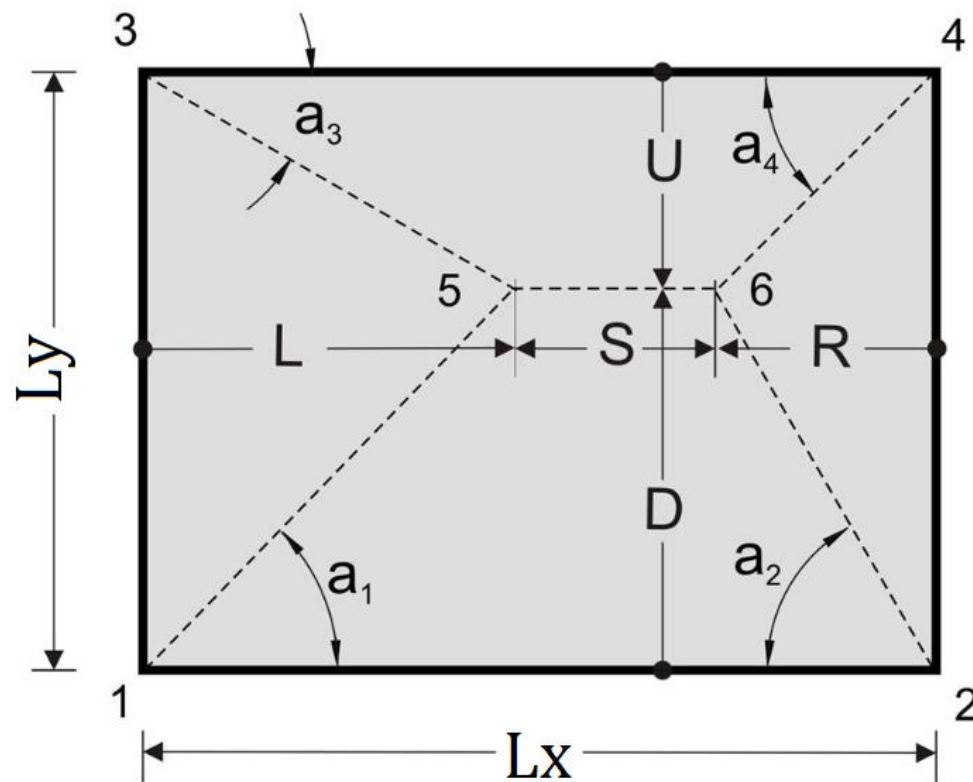
- Και υπολογίζονται ως:

$$V_{x,L} = \rho_L p L_x$$

$$V_{x,R} = \rho_R p L_x$$

$$V_{y,D} = \rho_D p L_x$$

$$V_{y,U} = \rho_U p L_x$$



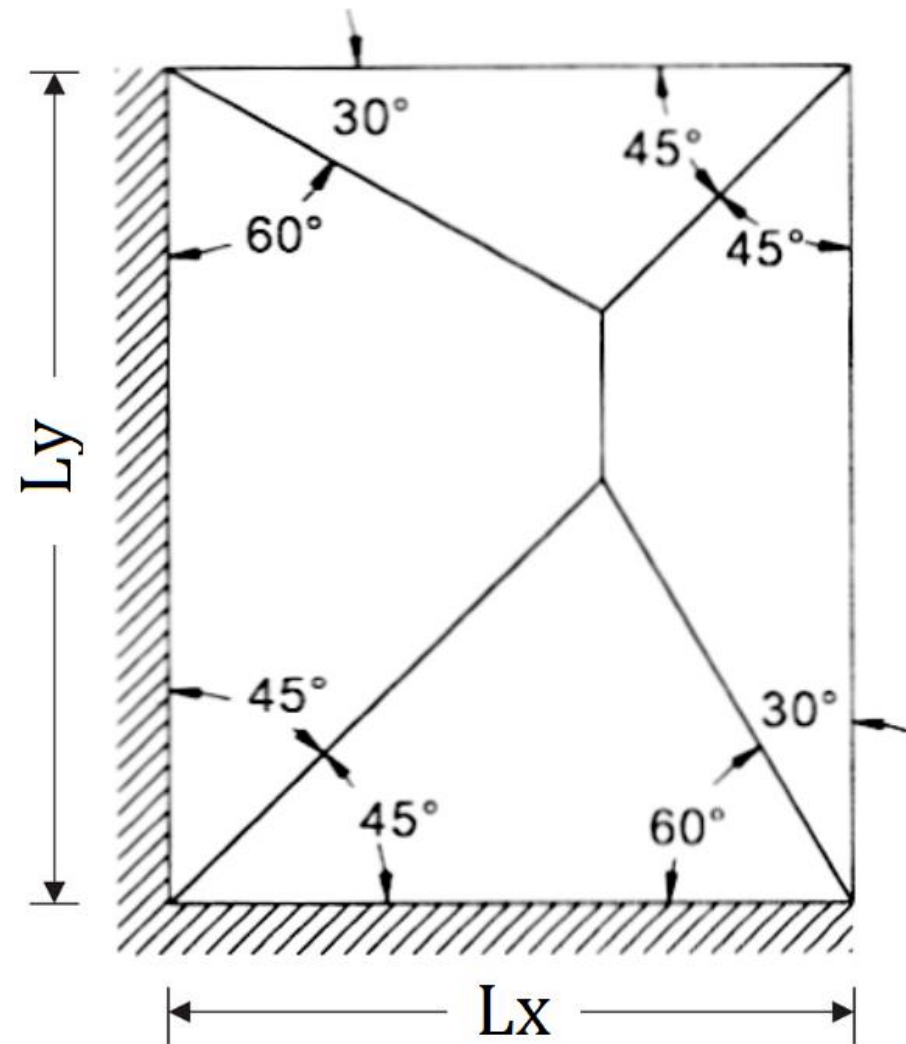
Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Παράδειγμα

- $L_x = 4m, L_y = 6m, p = 15kN/m^2$
- $\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} = 1.5 > 1$
- Γωνίες

$\alpha_1 = 45^\circ$	$\alpha_2 = 60^\circ$
$\alpha_3 = 30^\circ$	$\alpha_4 = 45^\circ$
- Τριγωνομετρικοί αριθμοί

$\cot \alpha_1 = 1$	$\cot \alpha_2 = 0.577$
$\cot \alpha_3 = 1.732$	$\cot \alpha_4 = 1$



Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Παράδειγμα

- Συντελεστές μηκών

$$\rho_L = \frac{cota_1}{cota_1 + cota_2} = 0.634$$

$$\rho_R = \frac{cota_2}{cota_1 + cota_2} = 0.366$$

$$\rho_D = \frac{1}{cota_1 + cota_2} = 0.634$$

$$\rho_U = \frac{1}{cota_3 + cota_4} = 0.366$$

- Συντελεστές αντιδράσεων

$$u_L = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L}{2\varepsilon} = 0.423$$

$$u_R = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_R}{2\varepsilon} = 0.244$$

$$u_D = \frac{\rho_D}{2} = 0.317$$

$$u_U = \frac{\rho_U}{2} = 0.183$$

Μέθοδος κατανομής αντιδράσεων

Παράδειγμα

- Φορτία στις δοκούς
$$p_L = u_L p L_x = 25.38 \text{ kN/m}$$
$$p_R = u_R p L_x = 14.64 \text{ kN/m}$$
$$p_D = u_D p L_x = 19.02 \text{ kN/m}$$
$$p_U = u_U p L_x = 10.98 \text{ kN/m}$$
- Τέμνουσες στις στηρίξεις της πλάκας
$$V_{x,L} = \rho_L p L_x = 38.04 \text{ kN/m}$$
$$V_{x,R} = \rho_R p L_x = 21.96 \text{ kN/m}$$
$$V_{y,D} = \rho_D p L_x = 38.04 \text{ kN/m}$$
$$V_{y,U} = \rho_U p L_x = 21.96 \text{ kN/m}$$

δηλαδή, ανά
λωρίδα πλάτους 1m