



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 6: Κελύφη

Γιάννης Καλογερός
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2024-2025

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

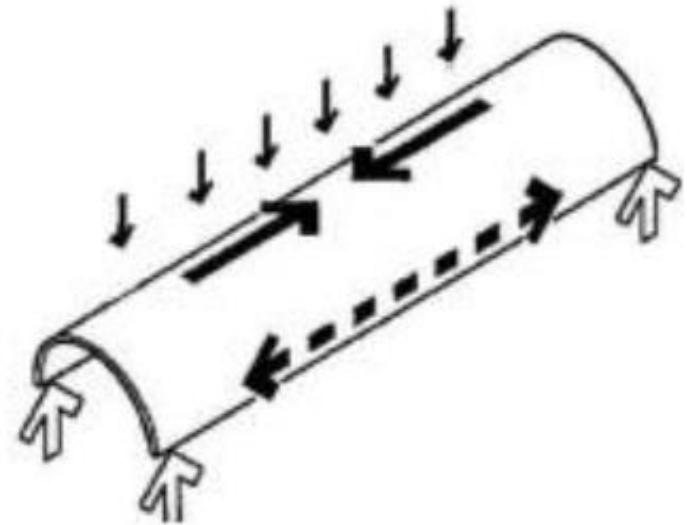
Κελύφη



- Είναι τρισδιάστατοι φορείς, όπου το πάχος είναι πολύ μικρότερο από τις άλλες δύο διαστάσεις.
- Συνδυάζουν την καμπτική συμπεριφορά των πλακών με τη μεμβρανική συμπεριφορά των δίσκων.
- Μπορούν να καλύψουν μεγάλα ανοίγματα χωρίς πολλά υποστηλώματα. Ιδανικά για μεγάλους ενιαίους χώρους.
- Χρησιμοποιούνται συχνά ως οροφές κτιρίων, αλλά είναι πολύ πιο ευέλικτα.

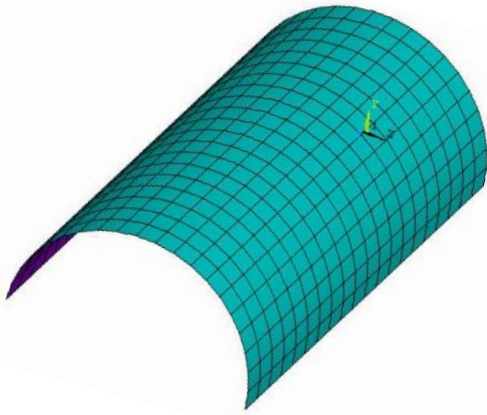
Κελύφη

- Τα κελύφη αναλαμβάνουν σημαντικό μέρος της εξωτερικής φόρτισης ως θλιπτική μεμβρανική ένταση.
 - Σε αντίθεση, μία πλάκα αναλαμβάνει όλη την εξωτερική ένταση με την κάμψη της.
- Ανάλογα, το τόξο αναλαμβάνει όλη την εξωτερική ένταση ως θλιπτική αξονική δύναμη, ενώ η δοκός μόνο κάμπτεται.
- Έτσι τα κελύφη (και τα τόξα), αντέχουν σημαντικά μεγαλύτερη εξωτερική φόρτιση.
- Επομένως μπορούν να χρησιμοποιηθούν για πολύ μεγαλύτερα ανοίγματα από τις πλάκες.



Είδη κελυφών

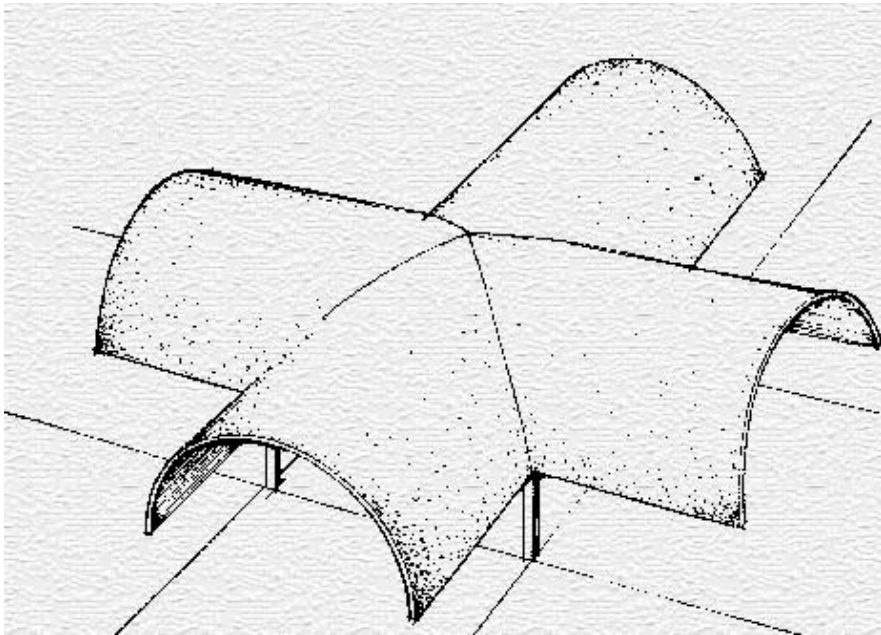
- Κυλινδρικά
 - Καμπυλότητα σε μία διεύθυνση
 - Ιδανικά κάθε διατομή είναι τόξο, ώστε να εντείνεται μόνο μεμβρανικά





Είδη κελυφών

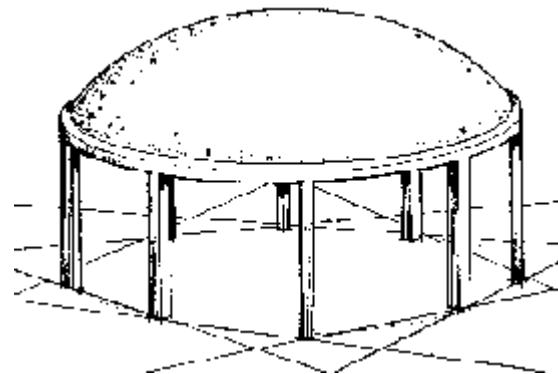
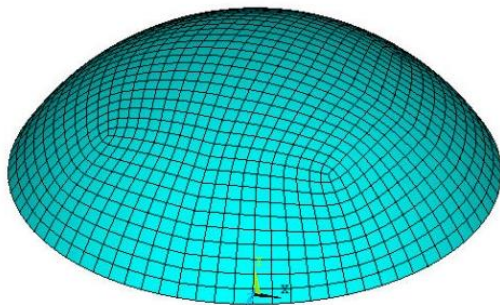
- Κυλινδρικά





Είδη κελυφών

- Σφαιρικά
 - Κυκλική βάση
 - Καμπυλότητα σε 2 διευθύνσεις $\Rightarrow$ πιο αποτελεσματικά από τα κυλινδρικά κελύφη





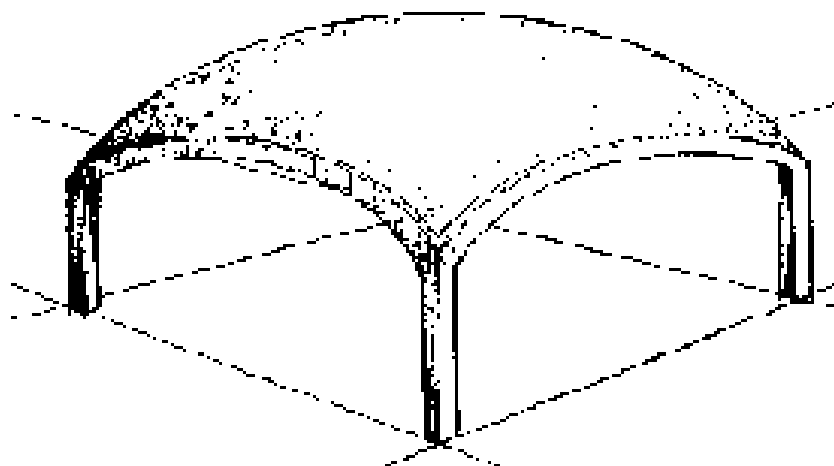
Είδη κελυφών

- Σφαιρικά



Είδη κελυφών

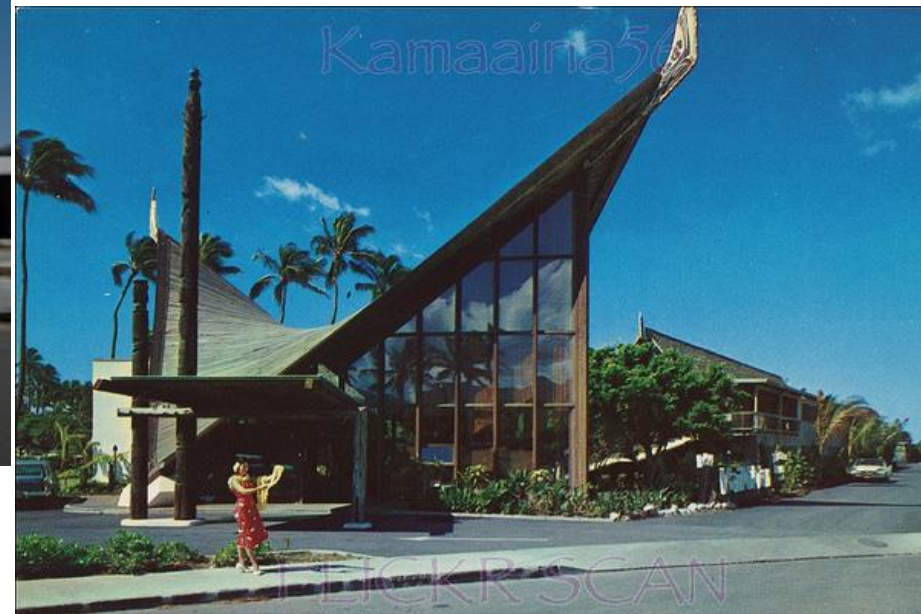
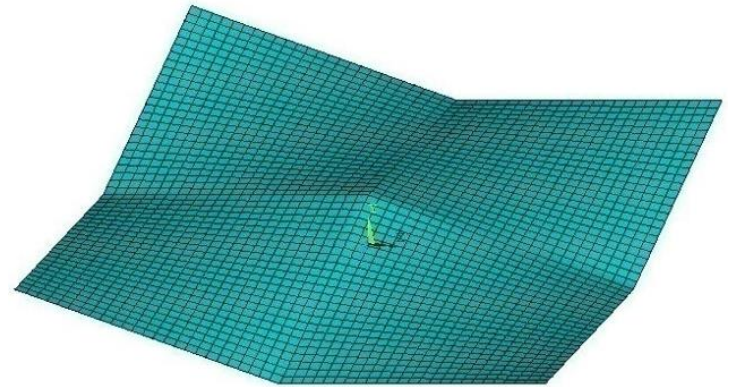
- Κελύφη από μεταφορά
 - Επιφάνεια που εδράζεται σε 4 τόξα
 - Κατακόρυφη καμπύλη γραμμή (π.χ. τόξο κύκλου, έλλειψης, παραβολή) που περιστρέφεται γύρω από μία άλλη κατακόρυφη καμπύλη
 - Όλες οι κατακόρυφες διατομές είναι ίδιες
 - Κατασκευάζεται πιο εύκολα από σφαιρικό κέλυφος
 - Βολικό για περιορισμό σε ορθογωνική κάτοψη





Είδη κελυφών

- Υπερβολικά παραβολοειδή
 - Καμπυλότητα σε 2 διευθύνσεις



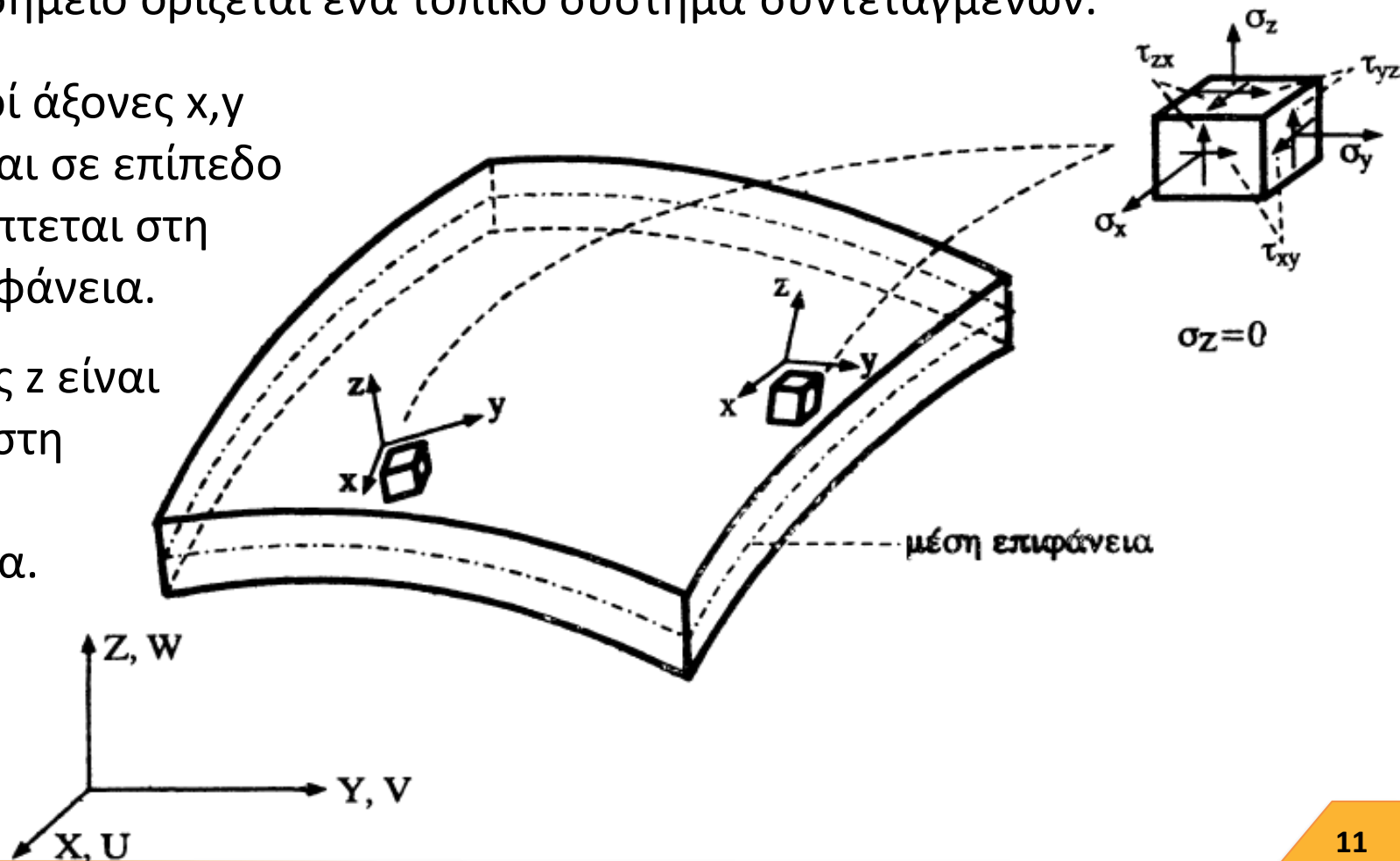
Είδη κελυφών

- Άλλες επιφάνειες με καμπυλότητες σε 2 διευθύνσεις



Ανάλυση κελυφών

- Η γεωμετρία ενός κελύφους παριστάνεται από τη μέση επιφάνεια και το πάχος.
- Σε κάθε σημείο ορίζεται ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων.
- Οι τοπικοί άξονες x, y βρίσκονται σε επίπεδο που εφάπτεται στη μέση επιφάνεια.
- Ο τοπικός z είναι κάθετος στη μέση επιφάνεια.



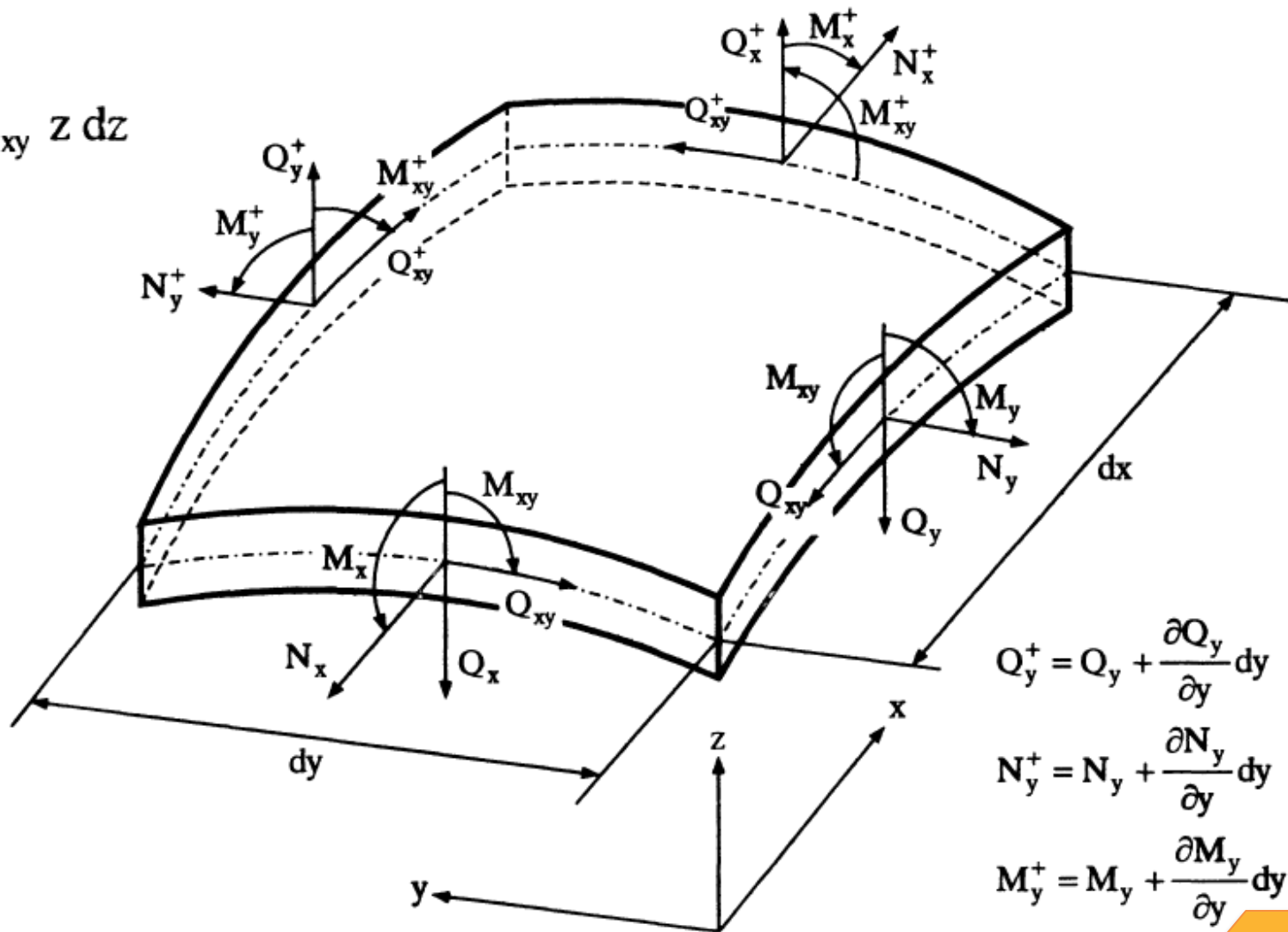
Ανάλυση κελυφών

- Ροπές κάμψης και συστροφής

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z \, dz$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z \, dz$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z \, dz$$



$$Q_y^+ = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$

$$N_y^+ = N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy$$

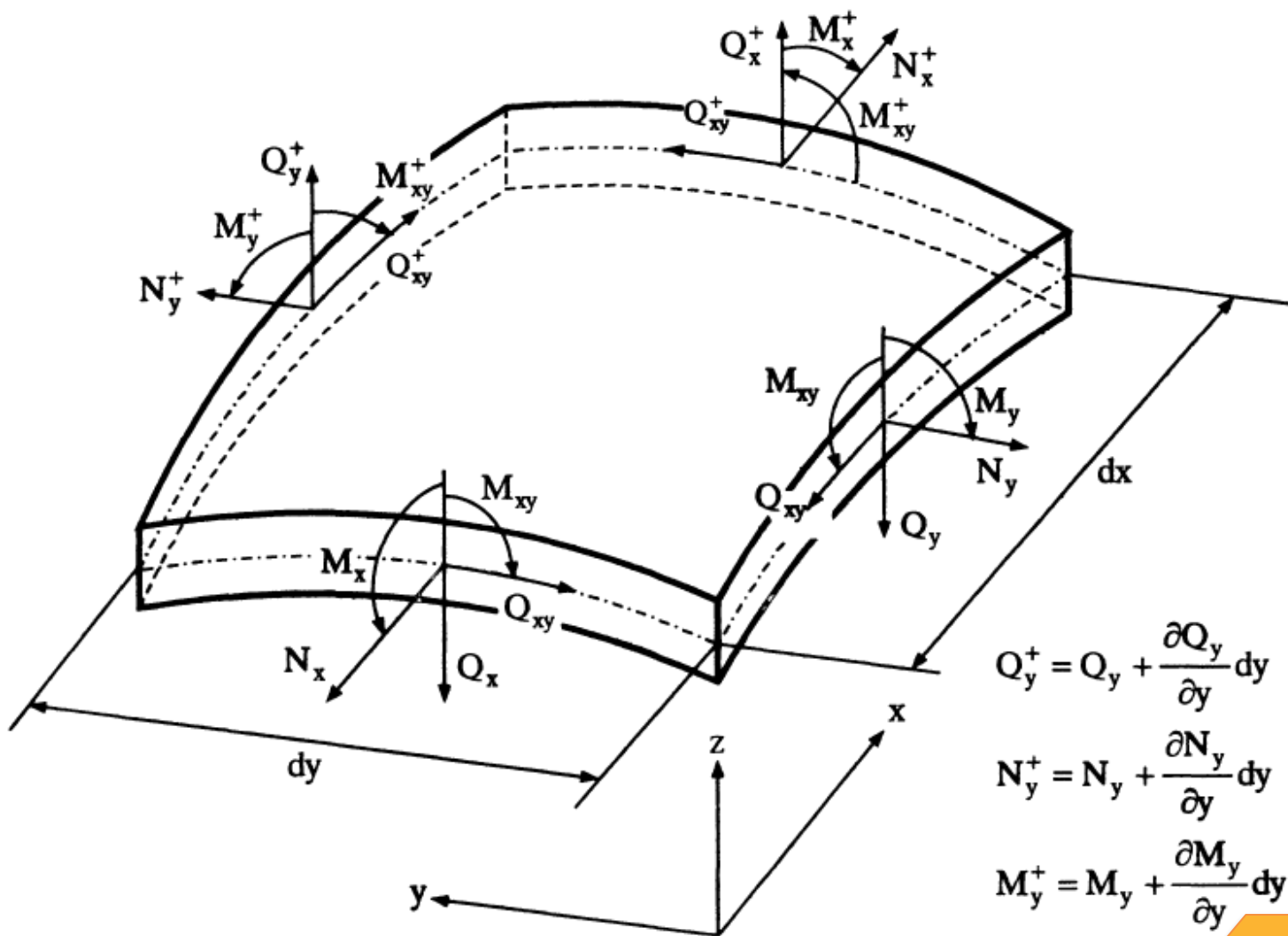
$$M_y^+ = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

Ανάλυση κελυφών

- Τέμνουσες δυνάμεις

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{zx} dz$$

$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$



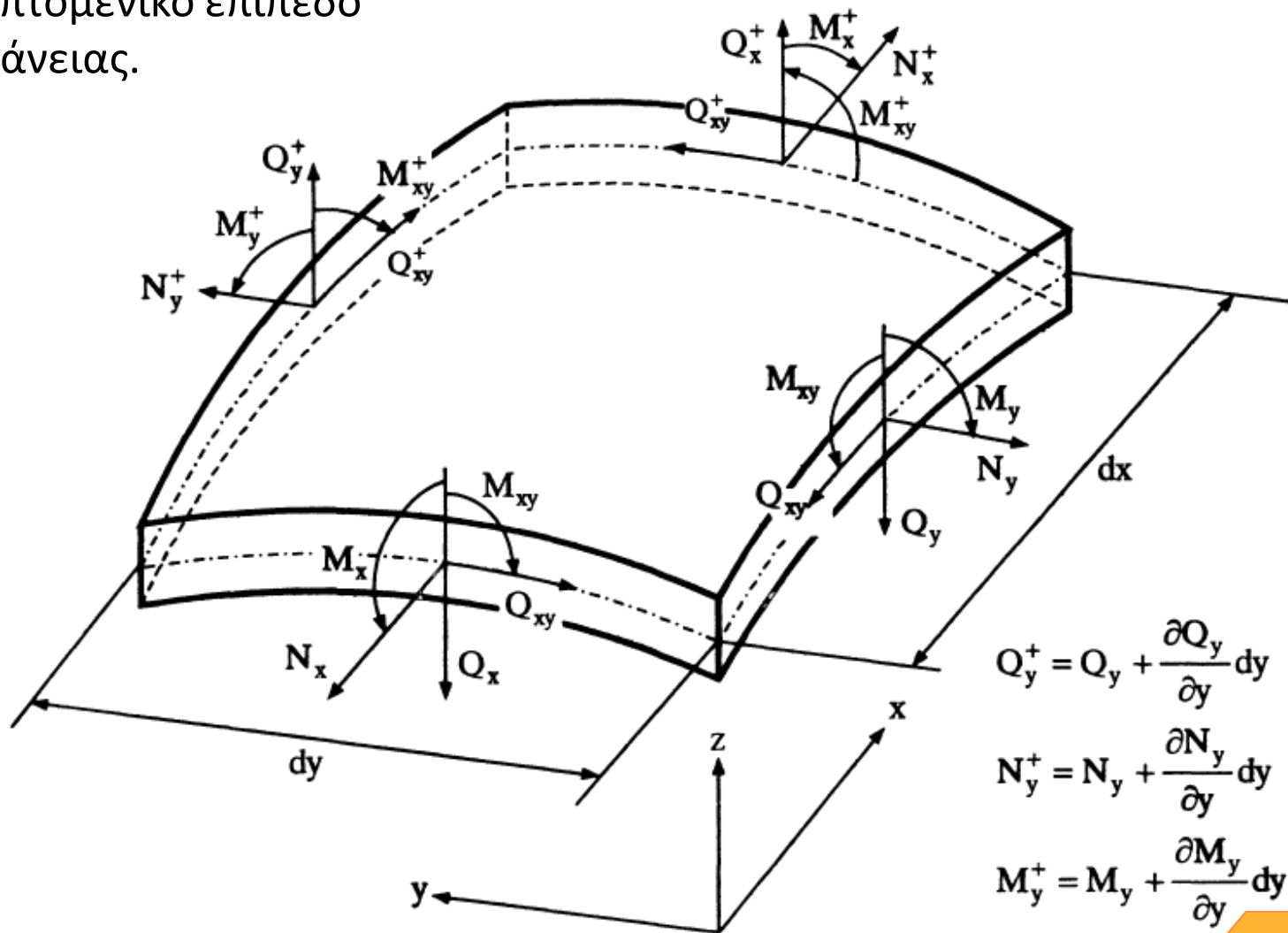
Ανάλυση κελυφών

- Μεμβρανικές δυνάμεις: προκαλούν τάσεις στο εφαπτομενικό επίπεδο της μέσης επιφάνειας.

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

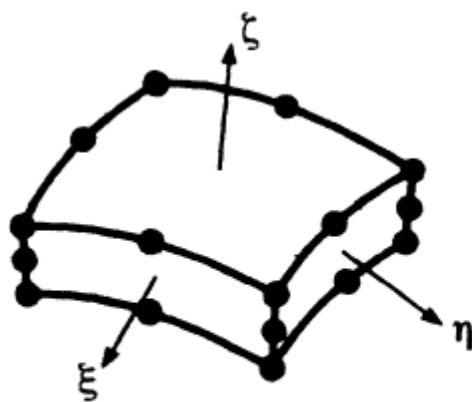
$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz$$

$$Q_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz$$

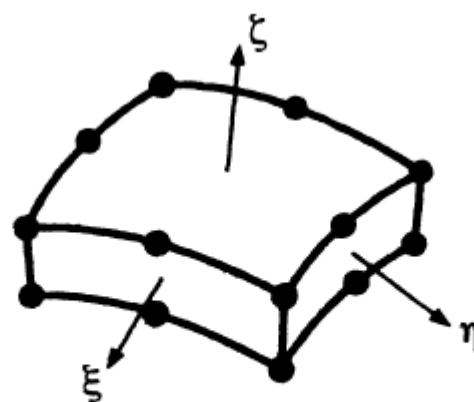


Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους

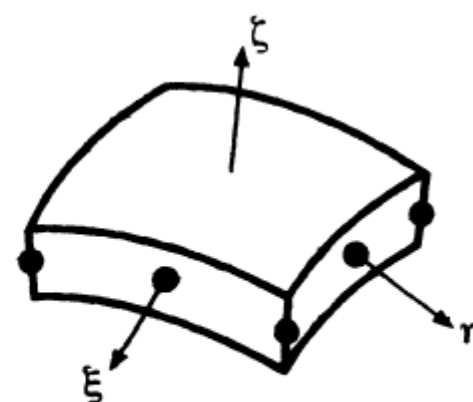
- Πολύπλοκη γεωμετρία => προτιμούμε ισοπαραμετρικά στοιχεία.
- Κάποια ισοπαραμετρικά στοιχεία
 - α) 20 κόμβων – 60 β.ε.
 - β) 16 κόμβων – 48 β.ε.
 - γ) 8 κόμβων – 40 β.ε.



(α)



(β)

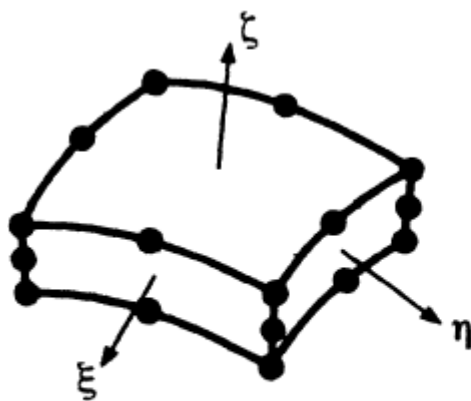


(γ)

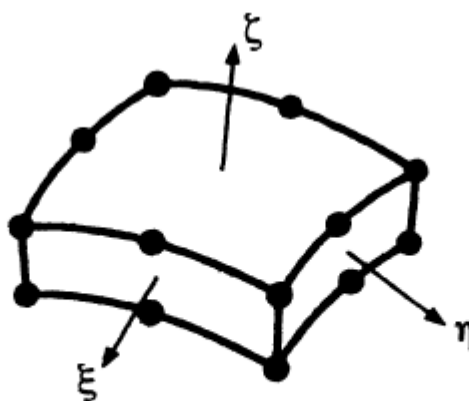
Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους

α) Ισοπαραμετρικό στοιχείο 20 κόμβων – 60 β.ε.

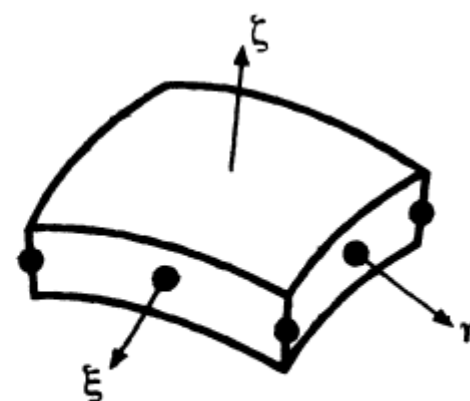
- 3 β.ε. ανά κόμβο (μετακινήσεις κατά x, y, z)
- Είναι ένα απλό στοιχείο τρισδιάστατης ελαστικότητας (βλέπετε μάθημα Πεπερασμένων Στοιχείων), όπου το πάχος είναι πολύ μικρό.
- Δεν συμφέρει. Οι ενδιάμεσοι κόμβοι κατά το πάχος αυξάνουν το κόστος (χρόνος και μνήμη) της ανάλυσης, χωρίς σημαντική βελτίωση στην ακρίβεια.



(α)



(β)

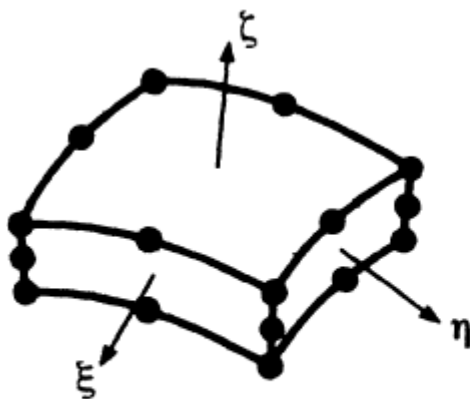


(γ)

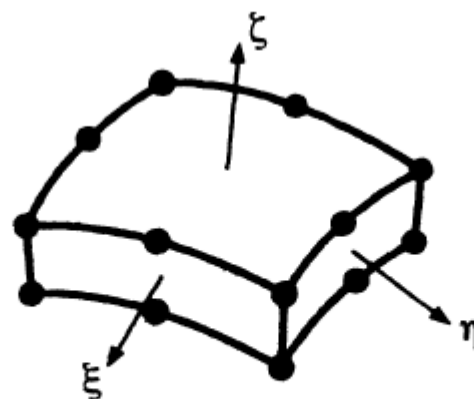
Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους

β) Ισοπαραμετρικό στοιχείο 16 κόμβων – 48 β.ε.

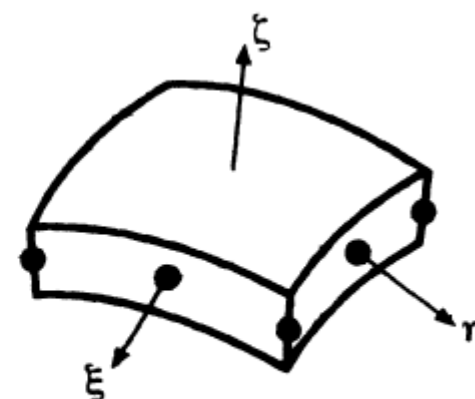
- 3 β.ε. ανά κόμβο (μετακινήσεις κατά x, y, z)
- Η ε_z θεωρείται σταθερή κατά το πάχος. Έτσι δεν υπάρχουν ενδιάμεσοι κόμβοι.
- Όμως για μικρά πάχη δημιουργούνται αριθμητικά προβλήματα κατά την επίλυση των εξισώσεων ισορροπίας.



(α)



(β)

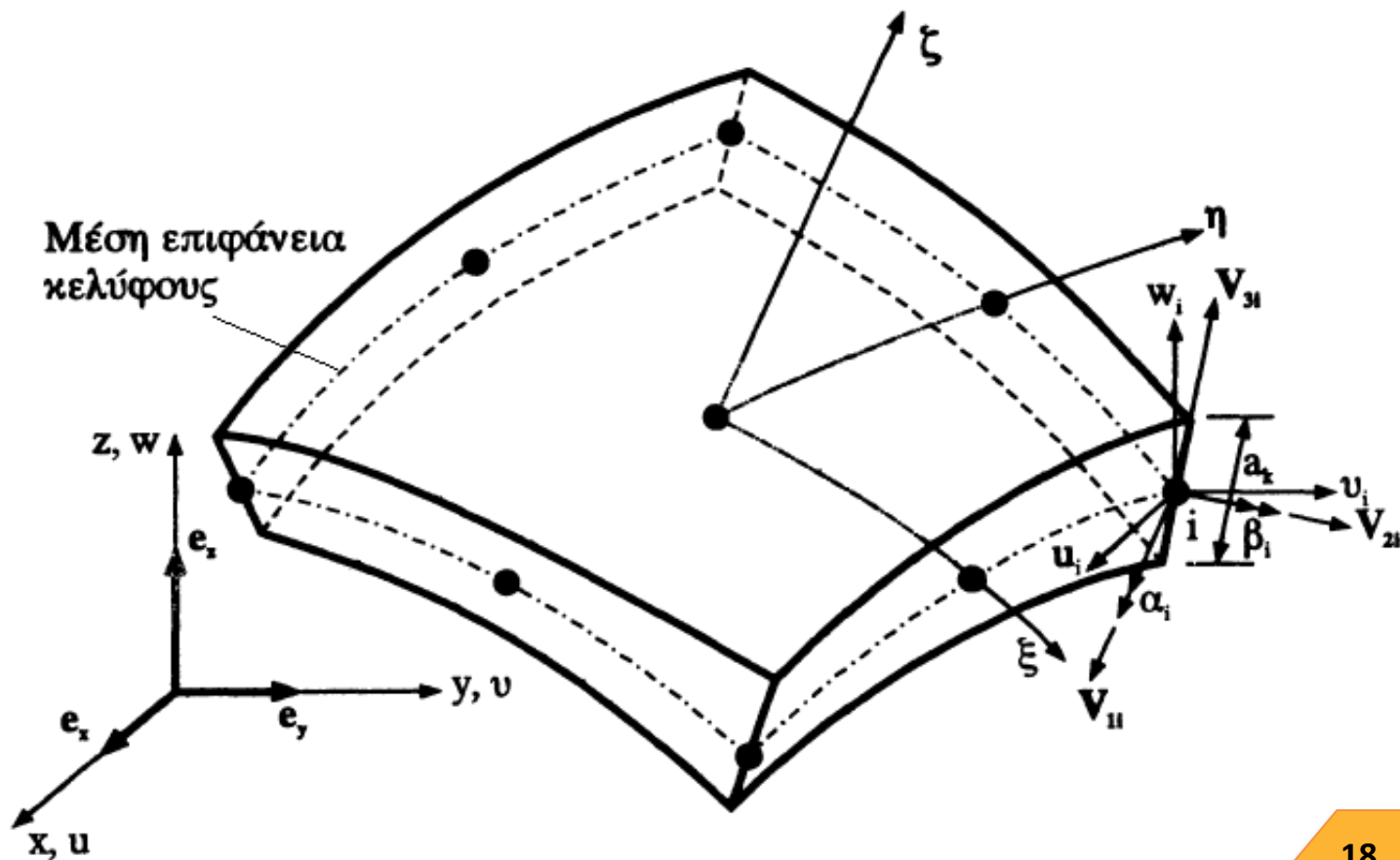


(γ)

Πεπερασμένα στοιχεία κελύφους

γ) Ισοπαραμετρικό στοιχείο 8 κόμβων – 40 β.ε.

- 5 β.ε. ανά κόμβο (3 μετακινήσεις και 2 στροφές)
- Εκφυλισμένο στοιχείο: έχει κόμβους μόνο κατά την μέση επιφάνεια
- Οι κόμβοι της άνω και κάτω επιφάνειας δεσμεύονται να έχουν την ίδια μετατόπιση με τον αντίστοιχο κόμβο της μέσης επιφάνειας.



Γεωμετρία στοιχείου 5 κόμβων

- Το τοπικό σύστημα σε κάθε κόμβο i καθορίζεται από 3 διανύσματα $\{V_{1i}\}, \{V_{2i}\}, \{V_{3i}\}$.
 - Τα διανύσματα αυτά είναι ανεξάρτητα από τους καθολικούς άξονες x, y, z

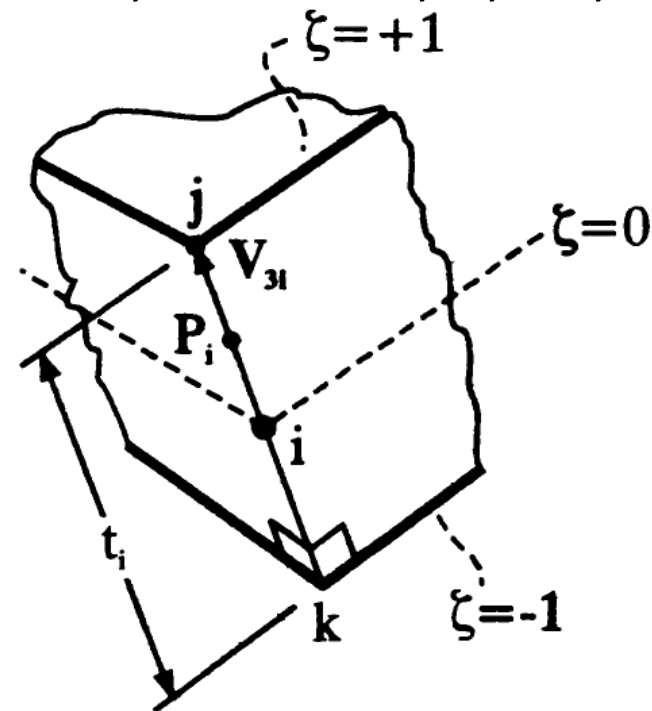
- Κάθετο διάνυσμα στη μέση επιφάνεια

$$\{V_{3i}\} = t_i \begin{bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{bmatrix}$$

- Όπου

$$\begin{bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{bmatrix} = \frac{1}{t_i} \begin{bmatrix} x_j - x_k \\ y_j - y_k \\ z_j - z_k \end{bmatrix}$$

είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του τμήματος $k-i-j$



Γνωστές συντεταγμένες κόμβων j, k της άνω και κάτω επιφάνειας

Γεωμετρία στοιχείου 5 κόμβων

- Συναρτήσεις σχήματος

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$

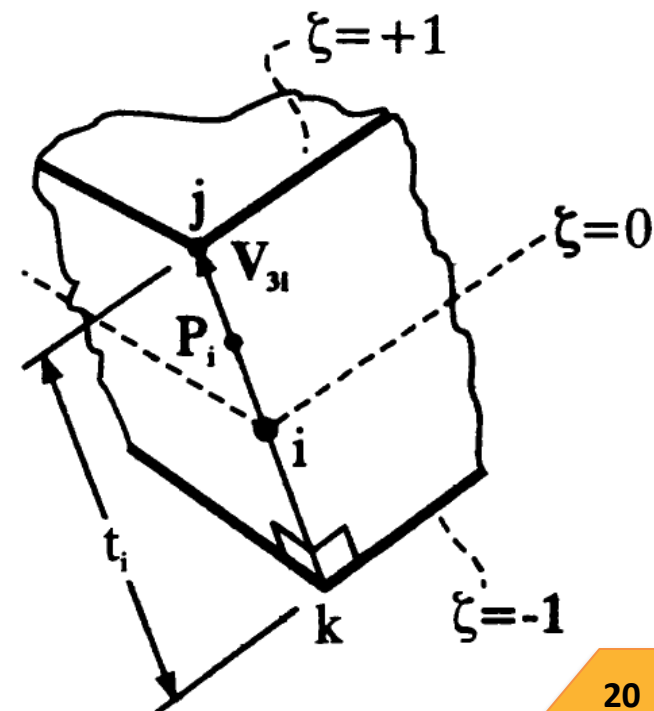
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$

- Καθολικές συντεταγμένες σημείου $P_i(x, y, z)$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\xi, \eta) \zeta \frac{t_i}{2} \begin{bmatrix} l_{3i} \\ m_{3i} \\ n_{3i} \end{bmatrix}$$

- όπου x_i, y_i, z_i, t_i είναι οι συντεταγμένες και το πάχος του κόμβου i της μέσης επιφάνειας.

- Είναι δεδομένα του προβλήματος



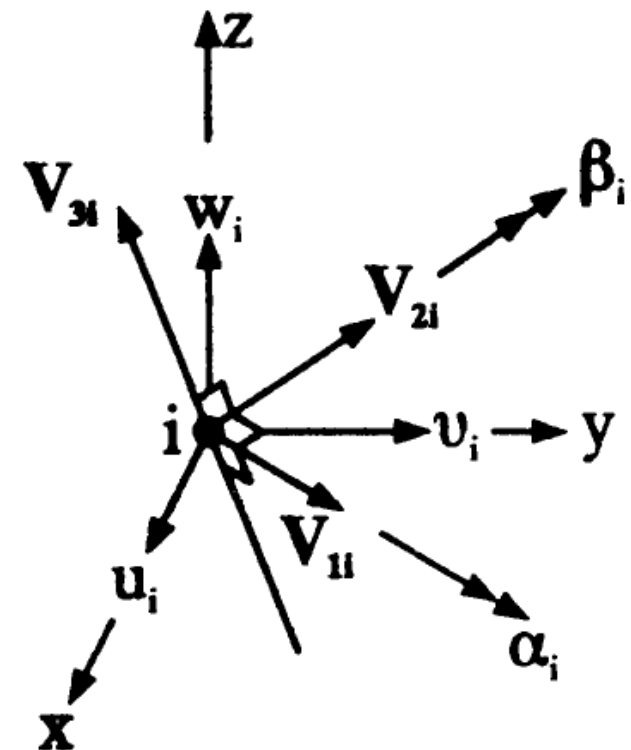
Γεωμετρία στοιχείου 5 κόμβων

- Τα διανύσματα $\{V_{1i}\}, \{V_{2i}\}$, που εφάπτονται στη μέση επιφάνεια, είναι κάθετα μεταξύ τους και με το $\{V_{3i}\}$
- Έστω $\Delta\xi$ μια μικρή ποσότητα που εκφράζει μήκο κατά τον άξονα ξ του φυσικού συστήματος $\xi - \eta - \zeta$. Τότε

$$\{V_{1i}\} = \begin{bmatrix} \sum_i N_{i,\xi} x_i \Delta\xi \\ \sum_i N_{i,\xi} y_i \Delta\xi \\ \sum_i N_{i,\xi} \eta_i \Delta\xi \end{bmatrix} \quad \{V_{2i}\} = \{V_{3i}\} \times \{V_{1i}\}$$

- Συνημίτονα κατεύθυνσης

$$\begin{bmatrix} l_{1i} \\ m_{1i} \\ n_{1i} \end{bmatrix} = \frac{\{V_{1i}\}}{\|V_{1i}\|} \quad \begin{bmatrix} l_{2i} \\ m_{2i} \\ n_{2i} \end{bmatrix} = \frac{\{V_{2i}\}}{\|V_{2i}\|}$$



Μητρώο παραμόρφωσης

- Το Ιακωβιανό μητρώο

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & y, \xi & z, \xi \\ x, \eta & y, \eta & z, \eta \\ x, \zeta & y, \zeta & z, \zeta \end{bmatrix}$$

- Περιέχει όρους της μορφής

$$x, \xi = \sum_{i=1}^{n_e} N_{i, \xi} \left(x_i + \zeta t_i \frac{l_{3i}}{2} \right)$$

$$x, \eta = \sum_{i=1}^{n_e} N_{i, \eta} \left(x_i + \zeta t_i \frac{l_{3i}}{2} \right)$$

$$x, \zeta = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \left(t_i \frac{l_{3i}}{2} \right)$$

- Αν το αντιστρέψουμε, παίρνουμε

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \end{bmatrix}$$

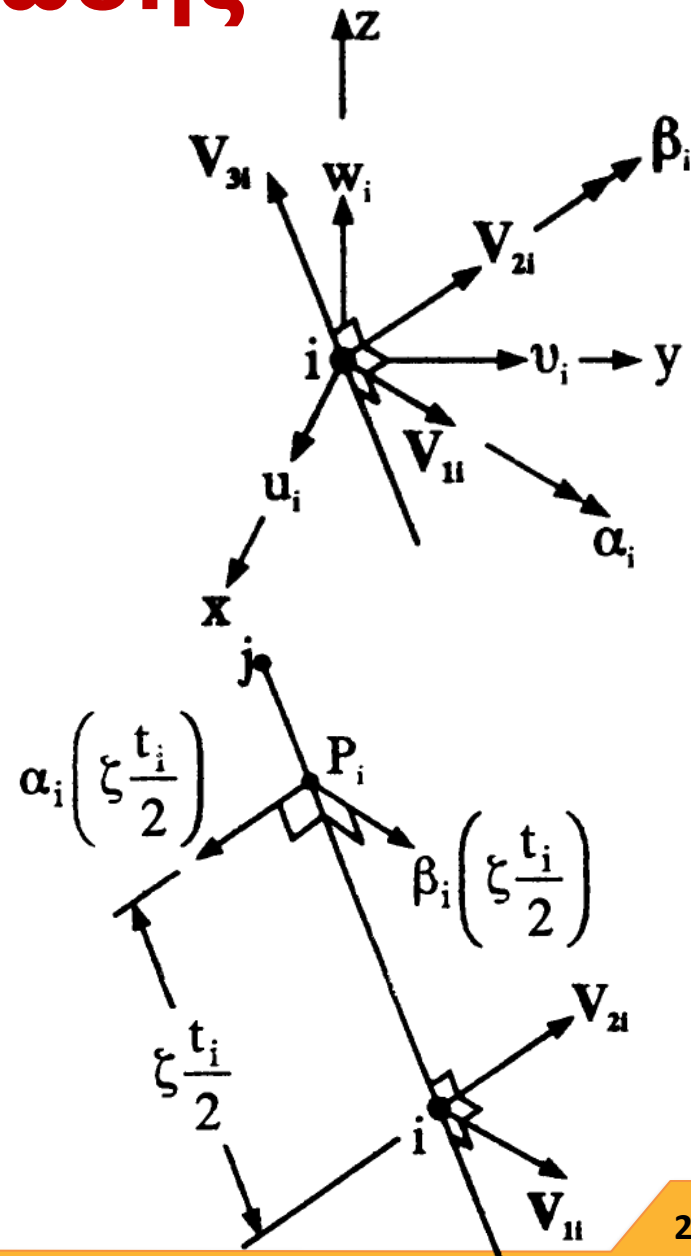
Μητρώο παραμόρφωσης

• Οι μετατοπίσεις ενός σημείου P_i πάνω στο $\{V_{3i}\}$ εξαρτώνται από τις μετατοπίσεις u_i, v_i, w_i και τις στροφές α_i, β_i του κόμβου i

• Π.χ η μετατόπιση u_{P_i} κατά τον καθολικό άξονα x

$$u_{P_i}(\zeta) = u_i - \alpha_i \left(\zeta \frac{t_i}{2} \right) l_{2i} + \beta_i \left(\zeta \frac{t_i}{2} \right) l_{1i}$$

• Ομοίως προκύπτουν οι μετατοπίσεις v_{P_i}, w_{P_i} κατά τους καθολικούς άξονες y, z .



Μητρώο παραμόρφωσης

- Για ένα τυχαίο σημείο $Q(\xi, \eta, \zeta)$ του στοιχείου

$$u_Q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i u_{P_i}(\zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i u_i + \sum_{i=1}^{n_e} N_i \zeta \frac{t_i}{2} [-l_{2i} \quad l_{1i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

$$v_Q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i v_{P_i}(\zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i v_i + \sum_{i=1}^{n_e} N_i \zeta \frac{t_i}{2} [-m_{2i} \quad m_{1i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

$$w_Q(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i w_{P_i}(\zeta) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i w_i + \sum_{i=1}^{n_e} N_i \zeta \frac{t_i}{2} [-n_{2i} \quad n_{1i}] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

- Η ισοδύναμα

$$\{u\} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{n_e} N_i \zeta \frac{t_i}{2} [l_i] \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

- όπου

$$[l_i] = \begin{bmatrix} -l_{2i} & l_{1i} \\ -m_{2i} & m_{1i} \\ -n_{2i} & n_{1i} \end{bmatrix}$$

Μητρώο παραμόρφωσης

- Οι παραμορφώσεις προκύπτουν από παραγωγή των μετακινήσεων ως προς τις καθολικές συντεταγμένες x, y, z .
- Ο κανόνας αλυσίδας δίνει

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* \\ J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & J_{21}^* & J_{22}^* & J_{23}^* \\ J_{31}^* & J_{32}^* & J_{33}^* & 0 & 0 & 0 & J_{11}^* & J_{12}^* & J_{13}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix}$$

- Ή ισοδύναμα

$$\begin{matrix} \{\varepsilon\} = [B_1] \{u_{,\xi}\} \\ (6 \times 1) \quad (6 \times 9) \quad (9 \times 1) \end{matrix}$$



Μητρώο παραμόρφωσης

- Παράγωγοι των μετακινήσεων ως προς το φυσικό σύστημα:

$$\{u_{,\xi}\} = \begin{bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ v_{,\eta} \\ v_{,\zeta} \\ w_{,\xi} \\ w_{,\eta} \\ w_{,\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n_e}$$

$$\begin{bmatrix} N_{i,\xi} & 0 & 0 & -N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ N_{i,\eta} & 0 & 0 & -N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} l_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} l_{1i} \\ \hline 0 & N_{i,\xi} & 0 & -N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & N_{i,\eta} & 0 & -N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} m_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} m_{1i} \\ \hline 0 & 0 & N_{i,\xi} & -N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\xi} \zeta \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & N_{i,\eta} & -N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_{i,\eta} \zeta \frac{t_i}{2} n_{1i} \\ 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{t_i}{2} n_{2i} & N_i \frac{t_i}{2} n_{1i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$$

Μητρώο παραμόρφωσης

- Η ισοδύναμα

$$\underset{(9 \times 1)}{[u, \xi]} = \sum_{i=1}^{n_e} \underset{(9 \times 5)}{[B_{2i}]} \underset{(5 \times 1)}{\{d_i\}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(9 \times 1)}{[u, \xi]} = \underset{(9 \times 5n_e)}{[B_2]} \underset{(5n_e \times 1)}{\{d\}}$$

- Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εξισώσεις μπορούμε να εκφράσουμε τις παραμορφώσεις $\{\varepsilon\}$ ενός τυχαίου σημείου συναρτήσει των μετατοπίσεων $\{d\}$ των κόμβων

$$\underset{(6 \times 1)}{\{\varepsilon\}} = \underset{(6 \times 9)}{[B_1]} \underset{(9 \times 5n_e)}{[B_2]} \underset{(5n_e \times 1)}{\{d\}}$$

$$\Leftrightarrow \underset{(6 \times 1)}{\{\varepsilon\}} = \underset{(6 \times 5n_e)}{[B]} \underset{(5n_e \times 1)}{\{d\}}$$

Μητρώο ελαστικότητας

- Ως προς το τοπικό σύστημα $\{V_{1i}\}, \{V_{2i}\}, \{V_{3i}\}$:

$$\{\sigma'\} = [E']\{\varepsilon'\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & c_s \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_s \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \end{bmatrix}$$

- Όπου $\sigma_3 = 0$
- Ο συντελεστής $c_s = 5/6$ διορθώνει την ορθογωνική κατανομή των διατμητικών τάσεων τ_{23}, τ_{31} σε παραβολική

Μητρώο ελαστικότητας

- Ως προς το τοπικό σύστημα $\{V_{1i}\}, \{V_{2i}\}, \{V_{3i}\}$: $\{\sigma'\} = [E']\{\varepsilon'\}$
- Εμείς όμως χρειαζόμαστε το μητρώο ελαστικότητας $[E]$ στο φυσικό σύστημα του στοιχείου: $\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}$

- Αν περιστρέψουμε τους τανυστές τάσεων και παραμορφώσεων

$$\{\sigma\} = [T\varepsilon]^T \{\sigma'\} \quad \{\varepsilon'\} = [T\varepsilon] \{\varepsilon\}$$

(6×1) (6×6) (6×1)

- Οπότε το ζητούμενο μητρώο ελαστικότητας σε τυχαίο σημείο είναι

$$[E] = [T\varepsilon]^T [E'] [T\varepsilon]$$

(6×6) (6×6) (6×6)(6×6)

- Όπου το $[T\varepsilon]$ εξαρτάται από τα συνημίτονα κατεύθυνσης για την περιστροφή

$$[T\varepsilon] = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ \hline 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix}$$

Μητρώο ελαστικότητας

- Το $[T\varepsilon]$ εξαρτάται από τα συνημίτονα κατεύθυνσης για την περιστροφή

$$[T\varepsilon] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ \hline 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{array} \right]$$

- Τα συνημίτονα κατεύθυνσης είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων κατεύθυνσης

$$\{V_1\} = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \quad \{V_2\} = \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad \{V_3\} = \begin{bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

- Το $[T\varepsilon]$ και άρα τα διανύσματα $\{V_1\}, \{V_2\}, \{V_3\}$ πρέπει να υπολογιστούν σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης.

Μητρώο ελαστικότητας

- Υπενθυμίζεται ότι η ολοκλήρωση του μητρώου δυσκαμψίας, όπου εμφανίζονται τα παραπάνω, γίνεται με αριθμητικό τρόπο, δηλαδή
 - Υπολογίζουμε την ποσότητα προς ολοκλήρωση σε συγκεκριμένα σημεία ολοκλήρωσης
 - Πολλαπλασιάζουμε με τον συντελεστή του κάθε σημείου ολοκλήρωσης
 - Αθροίζουμε τις ποσότητες από όλα τα σημεία.

- Τα διανύσματα $\{V_1\}, \{V_2\}, \{V_3\}$

$$\{V_1\} = \begin{bmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{bmatrix} \quad \{V_2\} = \begin{bmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad \{V_3\} = \begin{bmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{bmatrix}$$

- Υπολογίζονται σε κάθε σημείο ολοκλήρωσης κάνοντας παρεμβολή από τις γνωστές επικόμβιες τιμές τους $\{V_{1i}\}, \{V_{2i}\}, \{V_{3i}\}$

$$\{\mathbf{V}_1\} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{N}_i \{\mathbf{V}_{1i}\} , \quad \{\mathbf{V}_2\} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{N}_i \{\mathbf{V}_{2i}\} , \quad \{\mathbf{V}_3\} = \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{N}_i \{\mathbf{V}_{3i}\}$$

Μητρώο δυσκαμψίας

- Για ένα στοιχείο κελύφους με n_e κόμβους, η γενική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας είναι

$$[k]_{(5n_e \times 5n_e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [E] [B] \det[J] d\xi d\eta d\zeta$$

$(5n_e \times 6) \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 5n_e)$

- Παραδοχές απλοποίησης:
 - Οι ιδιότητες των υλικών και το $[E]$ δεν εξαρτώνται από το πάχος και το ζ
 - Το στοιχείο δεν έχει έντονη καμπυλότητα, οπότε οι όροι του Ιακωβιανού μητρώου $[J]$, που εξαρτώνται από τη φυσική συντεταγμένη ζ , είναι πολύ μικροί και μπορούν να αμεληθούν.
- Τότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε αναλυτικά κατά το πάχος. Το μητρώο $[B]$ χωρίζεται σε ένα τμήμα ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη ζ και ένα γραμμικά εξαρτημένο από το ζ

$$[B] = [B'] + \zeta[B'']$$

- Όπου $\int_{-1}^1 \zeta[B''] d\zeta = 0$

Μητρώο δυσκαμψίας

- Με βάση τις προηγούμενες παραδοχές, η γενική σχέση

$$[\mathbf{k}]_{(5n_e \times 5n_e)} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}]^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}] \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta d\zeta$$

$(5n_e \times 6) \quad (6 \times 6) \quad (6 \times 5n_e)$

- Καταλήγει σε

$$[\mathbf{k}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(2[\mathbf{B}']^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}'] + \frac{2}{3}[\mathbf{B}']^T [\mathbf{E}] [\mathbf{B}'] \right) \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta$$

- Όπου το Ιακωβιανό μητρώο $[\mathbf{J}]$ διατηρεί τις διαστάσεις του (3×3) , αλλά υπολογίζεται σε σημεία ολοκλήρωσης Gauss με $\zeta = 0$.
- Όπως και στα στοιχεία πλάκας είναι δυνατόν να εμφανιστούν φαινόμενα παρασιτικής δυσκαμψίας ή μηχανισμών.
- Για να αμβλυνθούν αυτά τα φαινόμενα, προτιμάται ολοκλήρωση Gauss μειωμένης τάξης ή επιλεκτική ολοκλήρωση.