



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

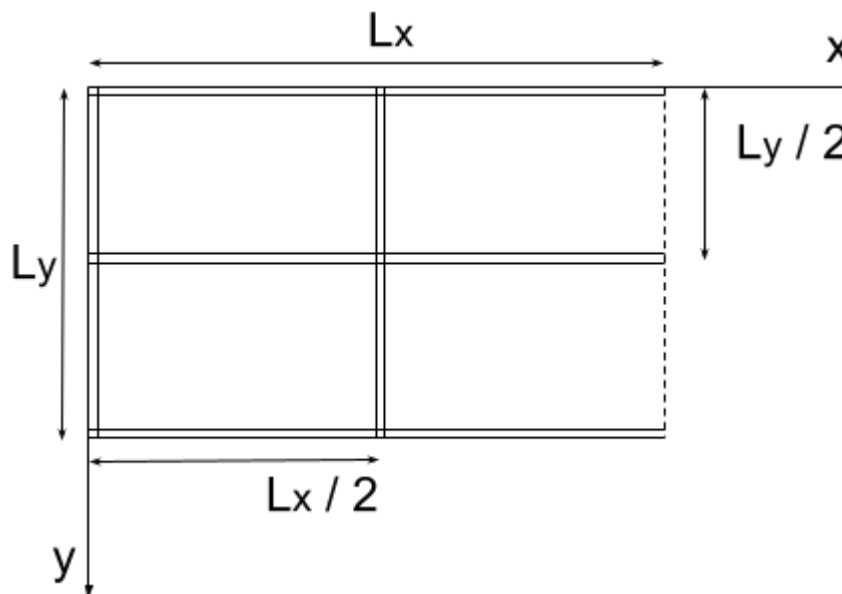
Ενότητα 5: Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (μέρος Β)

Γιάννης Καλογερός
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2024-2025

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

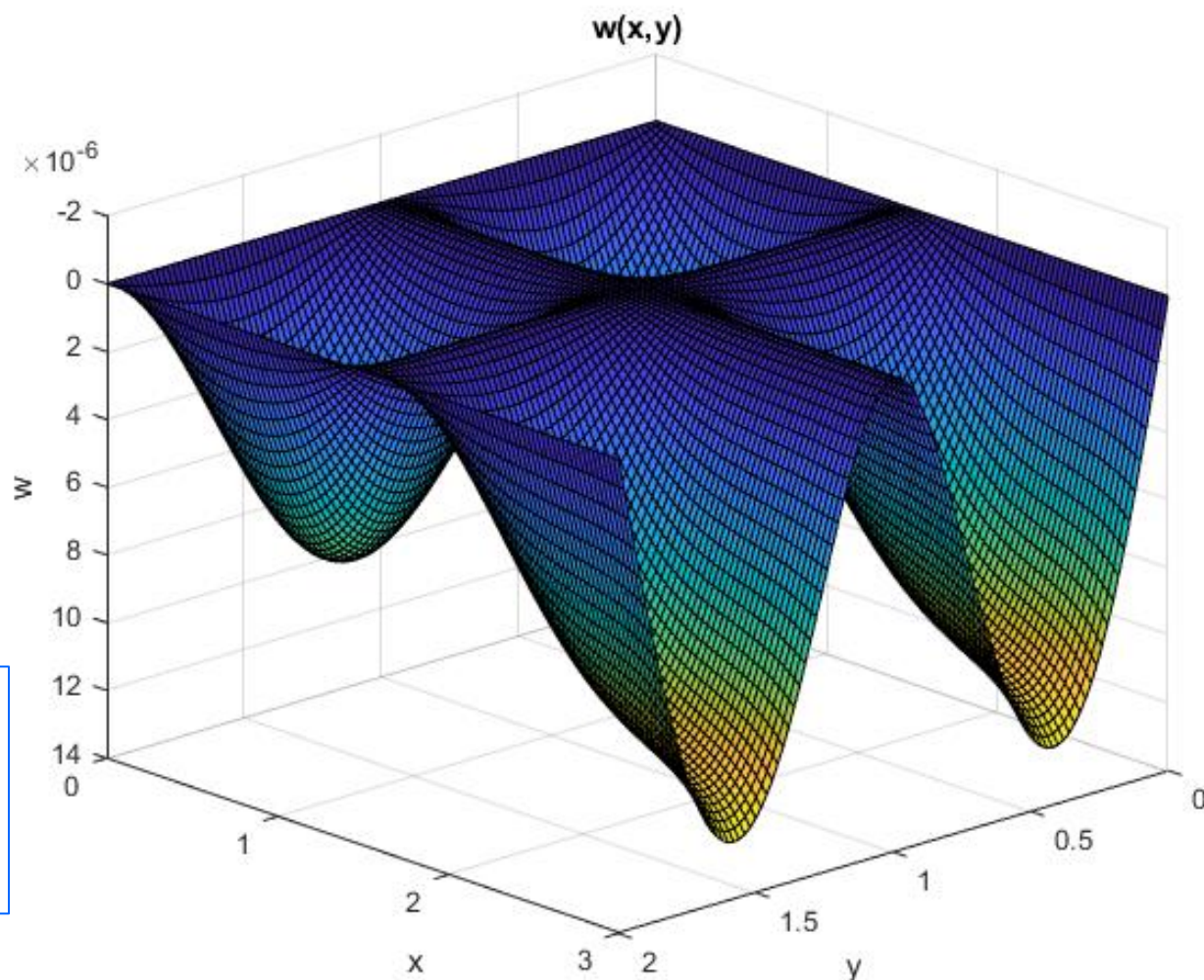
Παράδειγμα 2

- Στην πλάκα του σχήματος με $L_x = 3m$, $L_y = 2m$ ασκείται φορτίο $q(x, y) = \frac{10kN}{m^2}$. Η πλάκα στηρίζεται σε δοκούς εσωτερικά και περιμετρικά, εκτός από την παρειά $x = L_x$, που είναι ελεύθερη.
- Να βρεθούν με τη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων:
 - Η βύθιση της πλάκας
 - Διαγράμματα ροπών
- Δίνονται
 - $D = 5000 kNm$
 - $\nu = 0,3$
- Να θεωρηθεί ότι οι δοκοί είναι απαραμόρφωτες. → Άρα απλή έδραση



Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

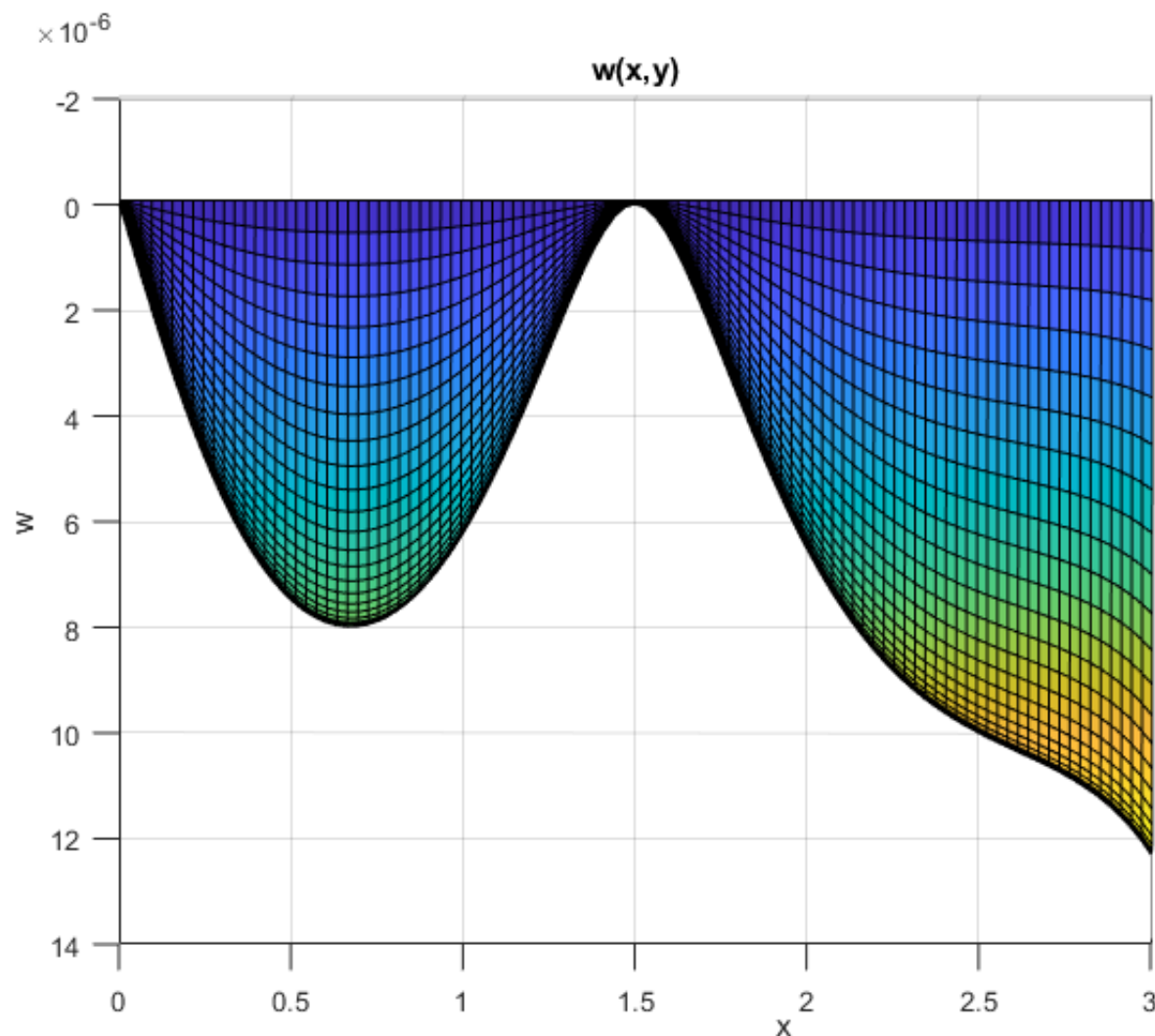
- Με κάνναβο 49×33 κόμβων, οι βυθίσεις είναι



Σχεδιάζονται οι βυθίσεις σε πολλά σημεία, όχι μόνο στους κόμβους

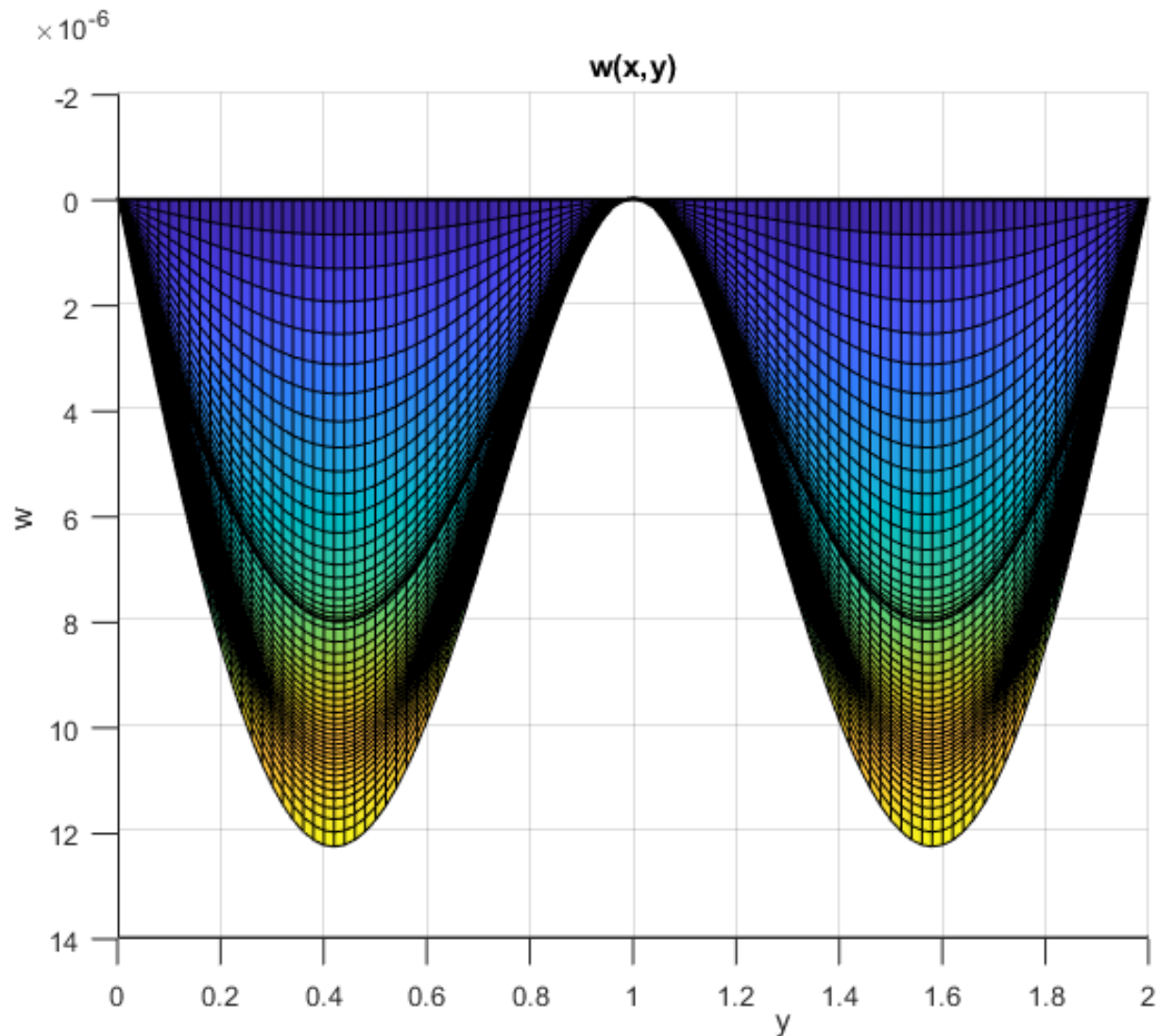
Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

- Με κάνναβο 49×33 κόμβων οι βυθίσεις είναι



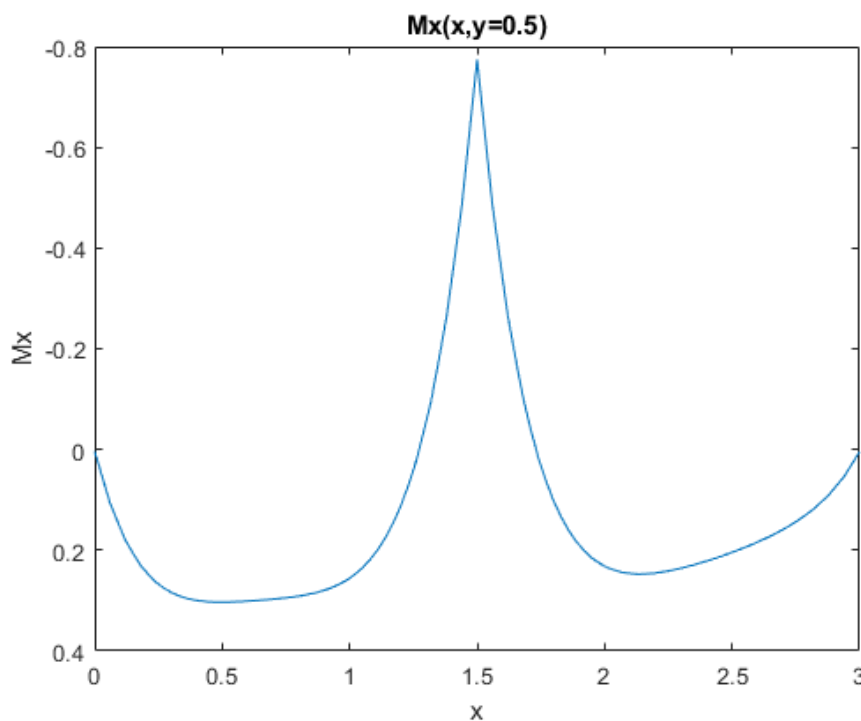
Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

- Με κάνναβο 49×33 κόμβων, οι βυθίσεις είναι

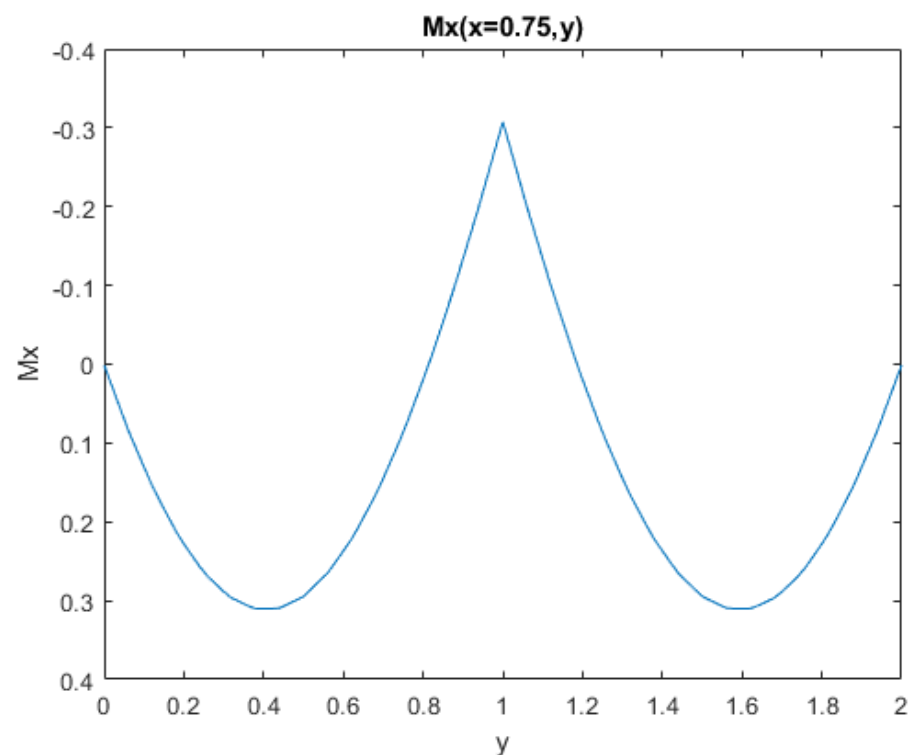


Παράδειγμα 2: Ροπές

παράλληλα στον άξονα x

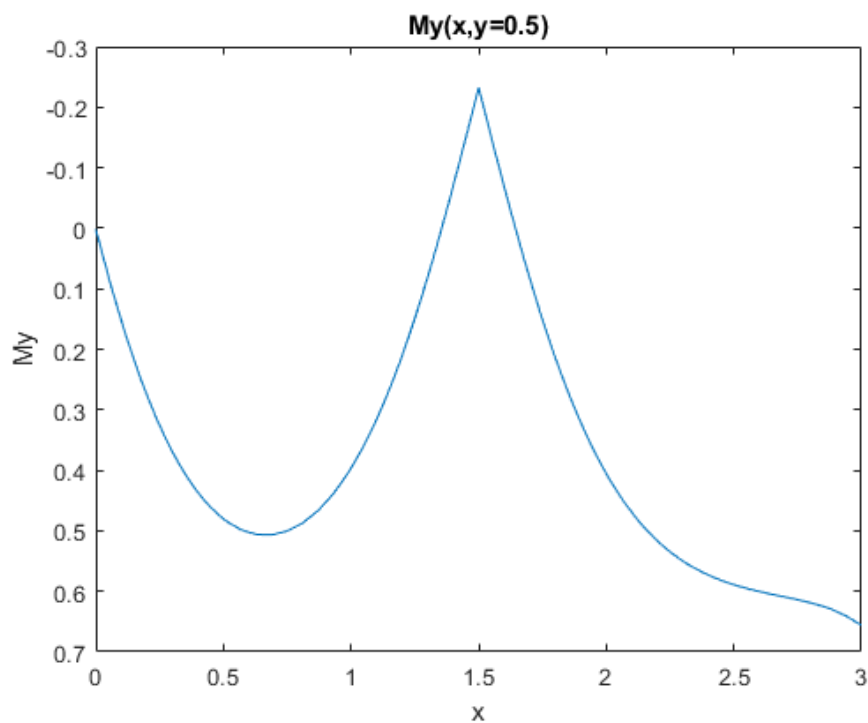


παράλληλα στον άξονα y

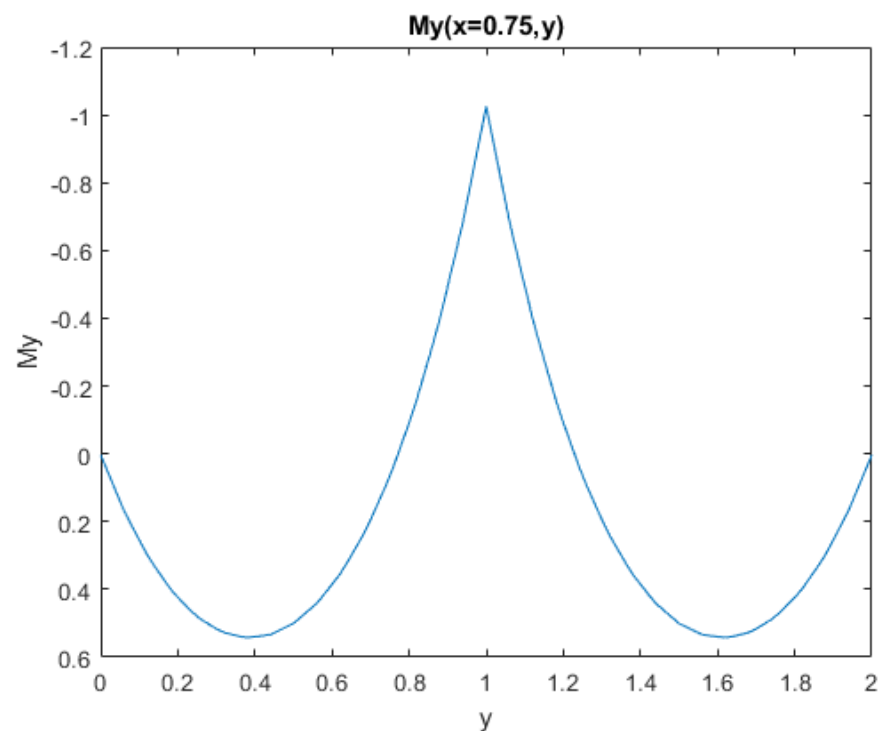


Παράδειγμα 2: Ροπές

παράλληλα στον άξονα x

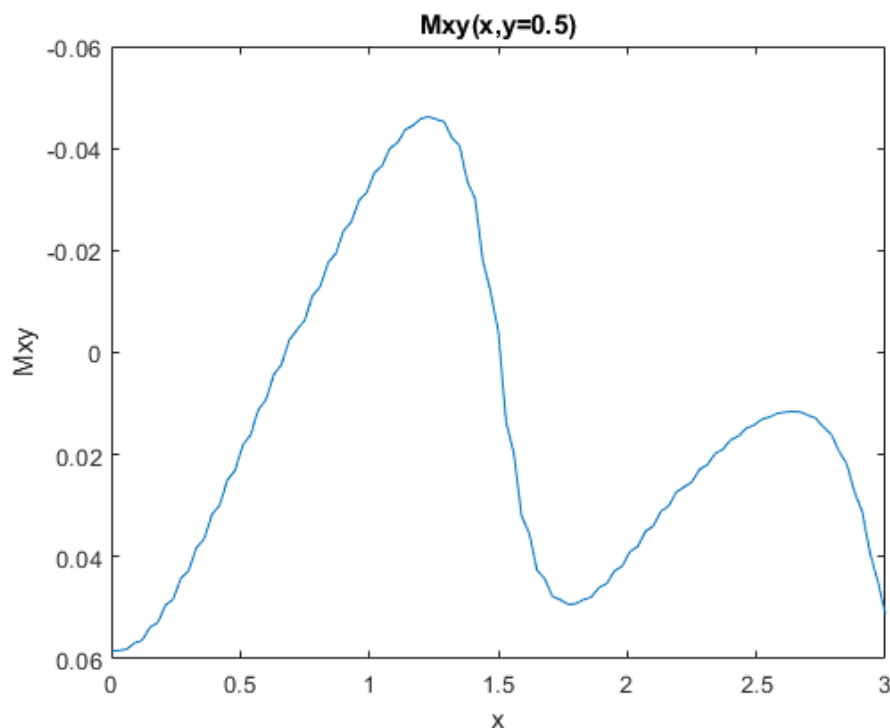


παράλληλα στον άξονα y

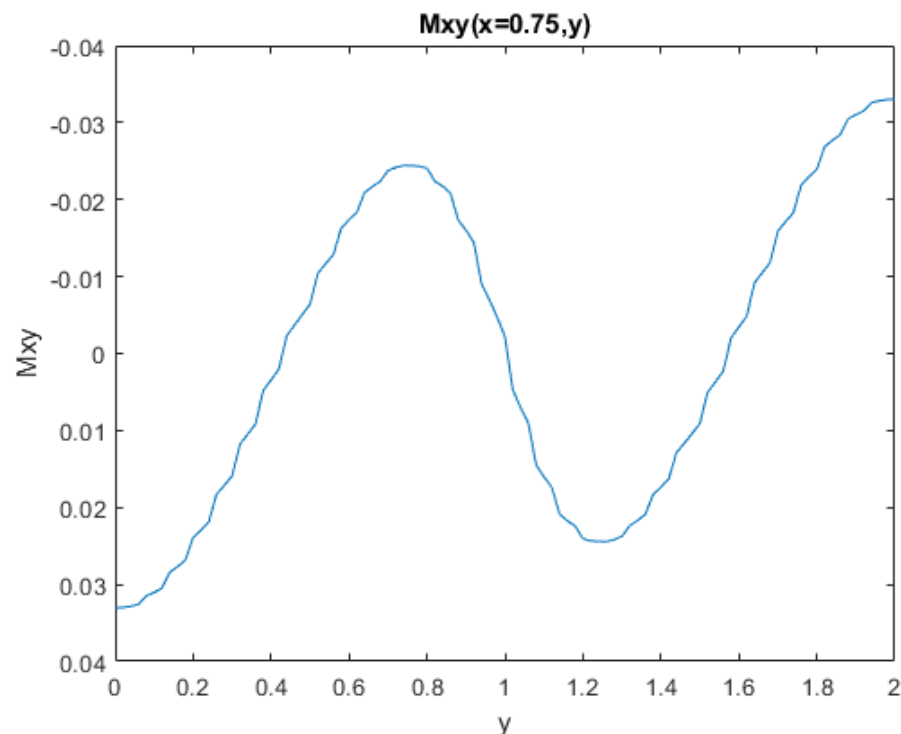


Παράδειγμα 2: Ροπές

παράλληλα στον άξονα x



παράλληλα στον άξονα y



- Σχεδιάζεται η ροπή M_{xy} σε πολλά σημεία, τα περισσότερα από τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό των στοιχείων.
- Το στοιχείο 4 κόμβων – 12 β.ε. δεν είναι σύμμορφο, οπότε η ροπή M_{xy} δεν είναι συνεχής μεταξύ 2 γειτονικών στοιχείων.
- Άλλα, πιο σύνθετα, στοιχεία πλάκας δεν έχουν αυτό το μειονέκτημα.

Ακρίβεια και σύγκλιση

- Για να βελτιωθεί η ακρίβεια στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων, χρησιμοποιούμε πιο πυκνό πλέγμα.
- Εναλλακτικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε άλλα είδη πεπερασμένων στοιχείων.
 - Άλλα στοιχεία χρησιμοποιούν διαφορετικές συναρτήσεις σχήματος, που πετυχαίνουν καλύτερη προσέγγιση της βύθισης w
 - Γενικώς η ακρίβεια αυξάνεται όταν αυξάνεται η τάξη των πολυωνύμων που χρησιμοποιούνται για συναρτήσεις σχήματος.
- Μειονέκτημα: Αυξάνεται το μέγεθος του γραμμικού συστήματος $\Rightarrow$ απαιτείται περισσότερος χρόνος και μνήμη για την επίλυση.
- Η Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (FEM) συγκλίνει γρηγορότερα από τη Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών (FDM)
 - Δηλαδή, για το ίδιο επίπεδο ακρίβειας η FEM χρειάζεται πιο αραιό πλέγμα από ότι η FDM.

Στοιχεία ανώτερης τάξης

- Ορθογωνικό στοιχείο 4 κόμβων – 16 β.ε.
- Έχουμε ως β.ε. και τη συστροφή, οπότε σε κάθε κόβο οι β.ε. είναι

$$w \quad \theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- Χρειαζόμαστε 16 όρους από το τρίγωνο Pascal
- Έτσι εξαλείφεται η ασυνέχεια στις κλίσεις $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ κατά μήκος των συνόρων του στοιχείου.
- Επομένως το στοιχείο αυτό είναι σύμμορφο.
- Μειονέκτημα: δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν δύο γειτονικά σημεία έχουν διαφορετικό πάχος.
 - Αυτό χρειάζεται π.χ. για πλάκες με μεταβλητό πάχος.
- Έχουν προταθεί και άλλα ορθογωνικά στοιχεία με 24 ή 36 β.ε. Αυτά έχουν καλύτερη ακρίβεια απο το στοιχείο 16 β.ε., αλλά και πάλι είναι ακατάλληλα για πλάκες με μεταβλητό πάχος.

Στοιχεία ανώτερης τάξης

- Για το ορθογωνικό στοιχείο 4 κόμβων – 16 β.ε., προκύπτει ότι η βύθιση και οι συναρτήσεις σχήματος είναι

$$\begin{aligned}
 w(x, y) = & \frac{I}{a^3 \beta^3} \left[(a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)w_1 + (3ax^2 - 2x^3)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)w_2 \right. \\
 & + (3ax^2 - 2x^3)(3\beta y^2 - 2y^3)w_3 + (a^3 + 2x^3 - 3ax^2)(3\beta y^2 - 2y^3)w_4 \\
 & + ax(x-a)^2(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1 + a(x^3 - ax^2)(\beta^3 + 2y^3 - 3\beta y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2 \\
 & + a(x^3 - ax^2)(3\beta y^2 - 2y^3)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_3 + ax(x-a)^2(3\beta y^2 - 2y^3)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_4 \\
 & + \beta(\alpha^3 + 2x^3 - 3ax^2)y(y-\beta)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1 + \beta(3ax^2 - 2x^3)y(y-\beta)^2\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2 \\
 & + \beta(3ax^2 - 2x^3)(y^3 - \beta y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_3 + \beta(\alpha^3 + 2x^3 - 3ax^2)(y^3 - \beta y^2)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_4 \\
 & + a\beta xy(x-a)^2(y-\beta)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_1 + a\beta xy(x^2 - ax)(y-\beta)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_2 \\
 & \left. + a\beta xy(x^2 - ax)(y-\beta y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_3 + a\beta xy(x-a)^2(y^2 - \beta y)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_4 \right]
 \end{aligned}$$

Τριγωνικά στοιχεία πλάκας

- Απλό στοιχείο 3 κόμβων – 9 β.ε.
 - Ασύμμορφο και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για ορισμένους προσανατολισμούς.
- Τριγωνικό στοιχείο Morley (6 κόμβοι – 6 β.ε.)
 - Ασύμμορφο, αλλά πολύ απλό και συγκλίνει προς τη λύση όσο πυκνώνουμε το πλέγμα.
- Τριγωνικό στοιχείο Bazeley et. al. (3 κόμβοι – 9 β.ε.)
 - Ασύμμορφο και η σταθερότητα των αποτελεσμάτων εξαρτάται από τη γεωμετρία του πλέγματος, αλλά τα αριθμητικά σφάλματα είναι μικρά.
- Τριγωνικά στοιχεία ανωτέρας τάξης
 - 6 κόμβοι – 12 β.ε.
 - 3 κόμβοι – 18 β.ε.
 - 6 κόμβοι – 21 β.ε.
 - Σύμμορφα και με καλύτερη ακρίβεια (όσο περισσότεροι β.ε. χρησιμοποιούνται)

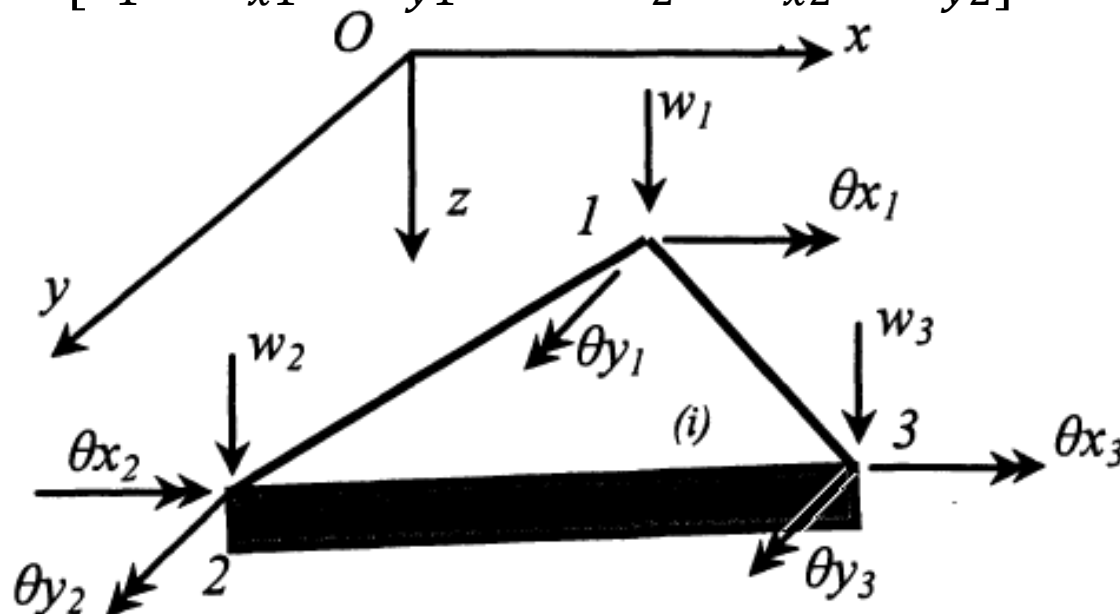


Απλό τριγωνικό στοιχείο 3 κόμβων-9 β.ε

- Κόμβοι στις κορυφές του τριγώνου
- 3 β.ε. σε κάθε κόμβο: βύθιση (w), κλίση ως προς y ($\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$) και κλίση ως προς x ($\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$)
- Διανύσματα επικόμβιων μετακινήσεων και ισοδύναμων δράσεων

$$\{d\} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2}]^T$$

$$\{r\} = [P_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad \dots \quad P_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2}]^T$$



Απλό τριγωνικό στοιχείο 3 κόμβων-9 β.ε

- Έχουμε 9 παραμέτρους, άρα παίρνουμε πολυώνυμο παρεμβολής με 9 όρους από το τρίγωνο Pascal

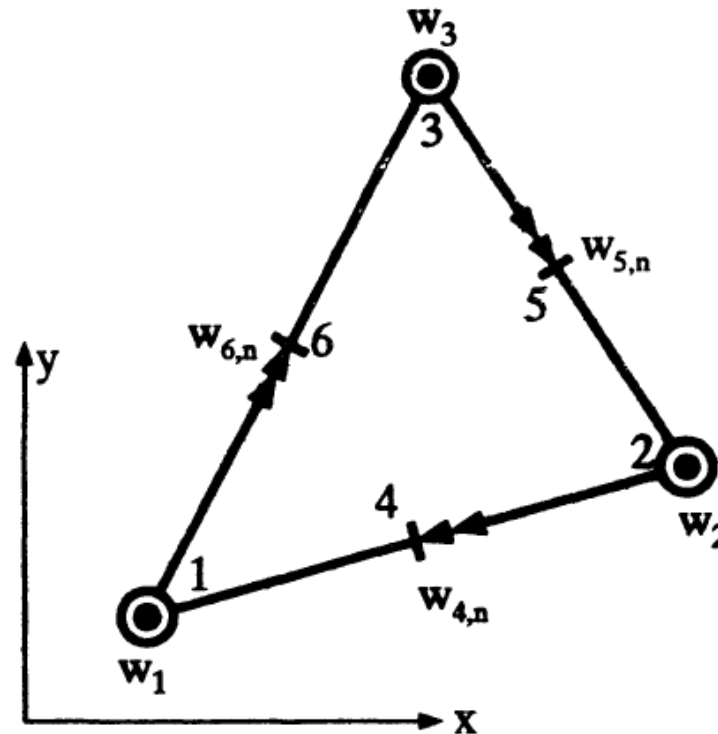
$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & & x & & y \\ & & & x^2 & & xy & & y^2 \\ & & x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \\ & x^4 & & x^3y & & x^2y^2 & & xy^3 & & y^4 \\ x^5 & & x^4y & & x^3y^2 & & x^2y^3 & & xy^4 & & y^5 \end{array}$$

- Μειονεκτήματα
 - Αυτή η συνάρτηση βύθισης είναι ασταθής.
 - Για ορισμένες διευθύνσεις των πλευρών του τριγώνου, ο πίνακας $[A]$ της εξίσωσης $\{\delta\} = [A]\{\alpha\}$ δεν αντιστρέφεται. Άρα δεν μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_9$

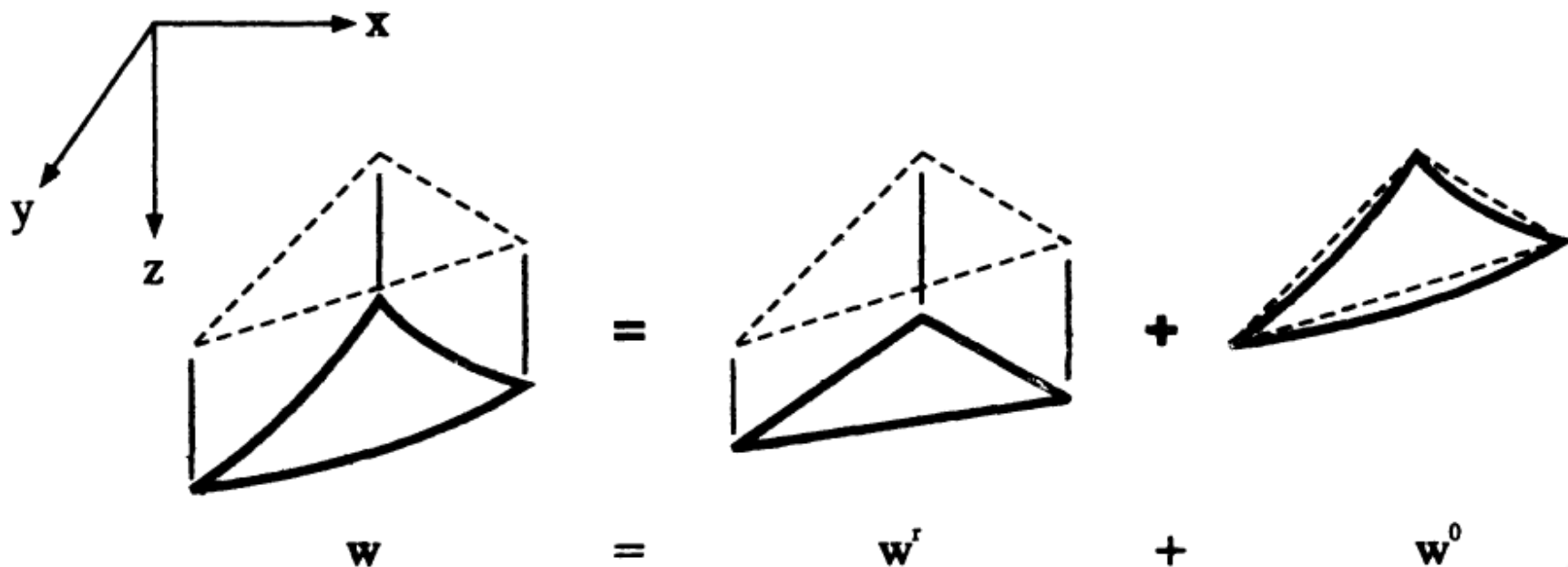
Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Διαφορετικά: στοιχείο 6 κόμβων – 6 β.ε.
- Κόμβοι στις κορυφές του τριγώνου και στα μέσα των πλευρών
- 1 β.ε. σε κάθε κόμβο-κορυφή: βύθιση (w)
- 1 β.ε. σε κάθε κόμβο-μέσο: κάθετη κλίση στην πλευρά ($w_{,n} = \frac{\partial w}{\partial n}$)



Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Η συνολική βύθιση προκύπτει από επαλληλία 2 επιμέρους βυθίσεων
$$w = w^r + w^0$$
- w^r είναι η βύθιση λόγω μετατόπισης του στοιχείου ως στερεό σώμα (απαραμόρφωτο). Εξαρτάται μόνο από τις βυθίσεις των κόμβων.
- w^0 είναι η βύθιση λόγω παραμόρφωσης του στοιχείου, θεωρώντας το στηριγμένο στους κόμβους του με απλή έδραση. Εξαρτάται μόνο από τις κλίσεις στα μέσα των πλευρών, αφού αυτές προκαλούν παραμόρφωση.

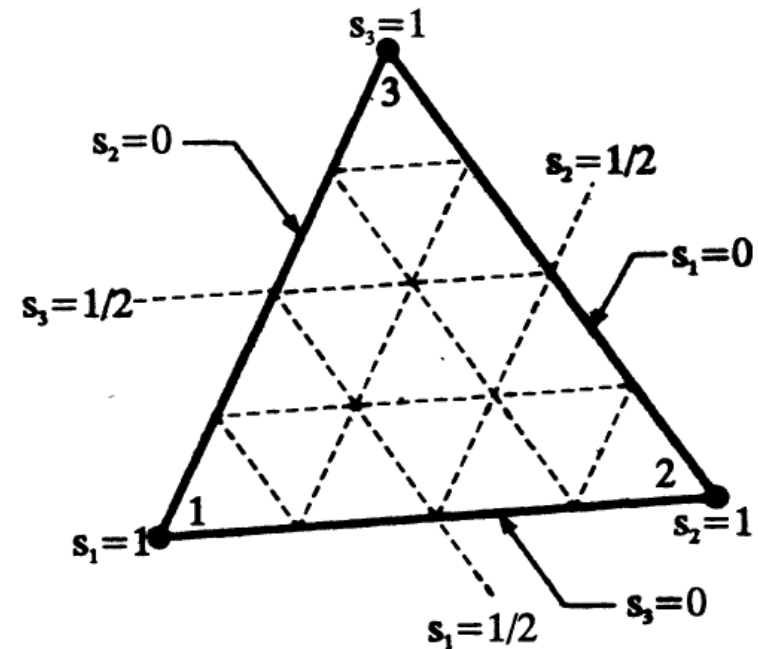
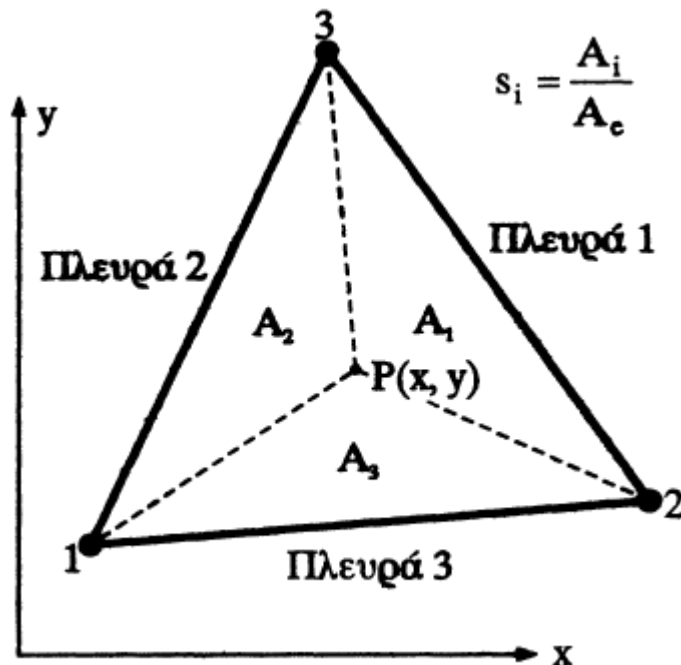


Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Η βύθιση w^r είναι γραμμική συνάρτηση της βύθισης των κόμβων

$$w^r = s_1 w_1^r + s_2 w_2^r + s_3 w_3^r$$
- Οι επιφανειακές συντεταγμένες s_i ενός σημείου, ορίζονται από τους λόγους των επιμέρους εμβαδών A_i προς το συνολικό εμβαδό του στοιχείου A_e

$$s_1 = \frac{A_1}{A_e} \quad s_2 = \frac{A_2}{A_e} \quad s_3 = \frac{A_3}{A_e}$$



Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Η βύθιση w^0 εξαρτάται μόνο από τις κλίσεις $\frac{\partial w_4^0}{\partial n}$, $\frac{\partial w_5^0}{\partial n}$, $\frac{\partial w_6^0}{\partial n}$ των μέσων των πλευρών. Εκφράζεται ως

$$w^0 = N_4 \frac{\partial w_4^0}{\partial n} + N_5 \frac{\partial w_5^0}{\partial n} + N_6 \frac{\partial w_6^0}{\partial n}$$

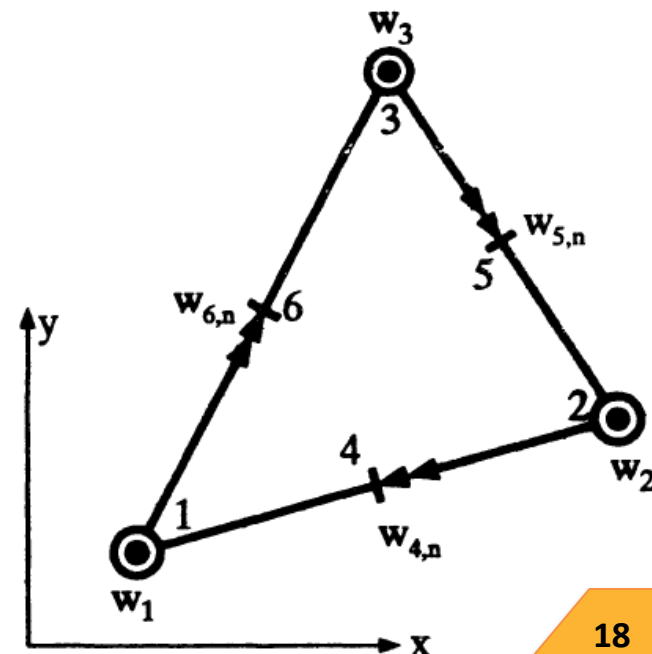
- Οι συναρτήσεις σχήματος πρέπει να ικανοποιούν τις εξής συνθήκες

- $N_i = 0$ στους κορυφές
- $\frac{\partial N_i}{\partial n} = 1$, στο μέσο i της ίδιας πλευράς
- $\frac{\partial N_i}{\partial n} = 0$, στο μέσο $j \neq i$, άλλης πλευράς

- Παραγωγίζοντας την $w = w^r + w^0$ έχουμε

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w^r}{\partial n} + \frac{\partial w^0}{\partial n}$$

- Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις, προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος.



Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις, προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος.

$$N_1 = s_1^2 - \frac{\gamma_2 \gamma_1 + \delta_2 \delta_1}{L_{31}^2} (s_2 - s_2^2) - \frac{\gamma_3 \gamma_1 + \delta_3 \delta_1}{L_{12}^2} (s_3 - s_3^2)$$

$$N_4 = \frac{2A_e}{L_{12}} s_3 (1 - s_3)$$

- Όπου
 - L_{ij} είναι το μήκος της πλευράς $i - j$
 - $\gamma_1 = y_2 - y_3 \quad \gamma_2 = y_3 - y_1 \quad \gamma_3 = y_1 - y_2$
 - $\delta_1 = x_3 - x_2 \quad \delta_2 = x_1 - x_3 \quad \delta_3 = x_2 - x_1$
 - $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ είναι οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου στο καθολικό σύστημα.
- Οι συναρτήσεις σχήματος N_2, N_3 προκύπτουν σαν την N_1 και οι N_5, N_6 σαν την N_4 , με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.

Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Έχοντας τις συναρτήσεις σχήματος, τις τοποθετούμε σε πίνακα-γραμμή

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_6]$$

- Η συνολική βύθιση γράφεται ως

$$w = N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 \frac{\partial w_4}{\partial n} + N_5 \frac{\partial w_5}{\partial n} + N_6 \frac{\partial w_6}{\partial n}$$
$$\Leftrightarrow w = [N] \cdot \{d\}$$

- Το μητρώο παραμόρφωσης B_k προκύπτει παραγωγίζοντας τις συναρτήσεις σχήματος. Χρειαζόμαστε τις παραγώγους που δίνουν τις καμπυλότητες, οπότε

$$[B_k] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

Τριγωνικό στοιχείο Morley

- Μητρώο παραμόρφωσης B_k

$$[B_k] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

- Έτσι το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου προκύπτει από τη σχέση

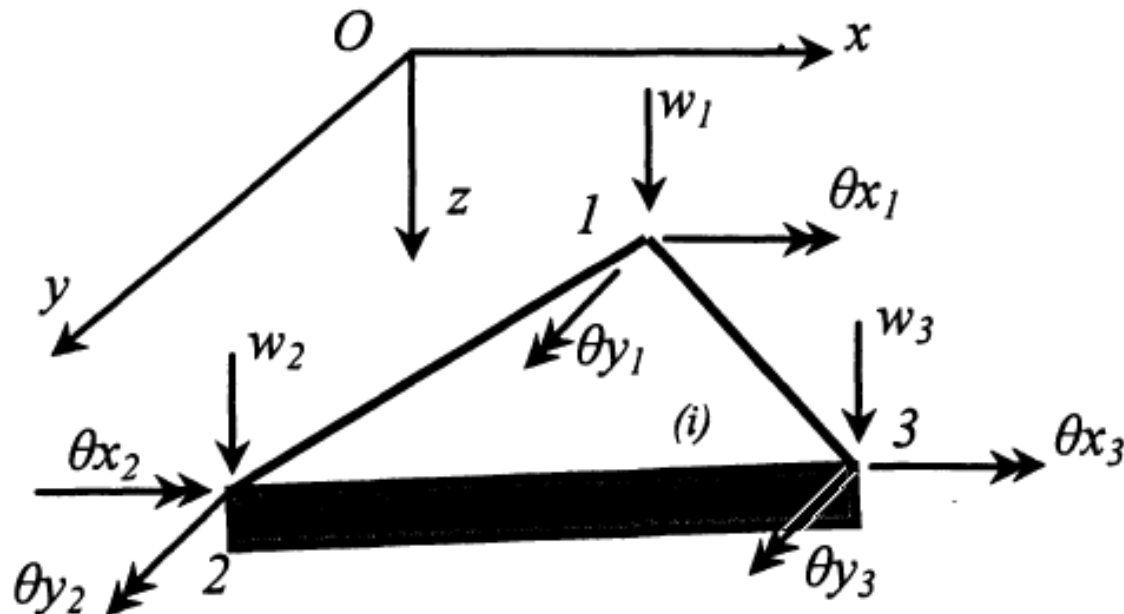
$$[k] = \int_{A_e} [B_k]^T [E_k] [B_k] dA_e$$

- Όπου $[E_k] = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$

- Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί με αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης.

Τριγωνικό στοιχείο Bazeley et.al.

- Κόμβοι στις 3 κορυφές του τριγώνου
- 3 β.ε. σε κάθε κόμβο: βύθιση (w), κλίση ως προς y ($\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$) και κλίση ως προς x ($\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$)
- Άρα είναι και αυτό στοιχείο με 3 κόμβους – 9 β.ε.
- Ωστόσο χρησιμοποιείται διαφορετικό πολυώνυμο παρεμβολής από πριν.



Τριγωνικό στοιχείο Bazeley et.al.

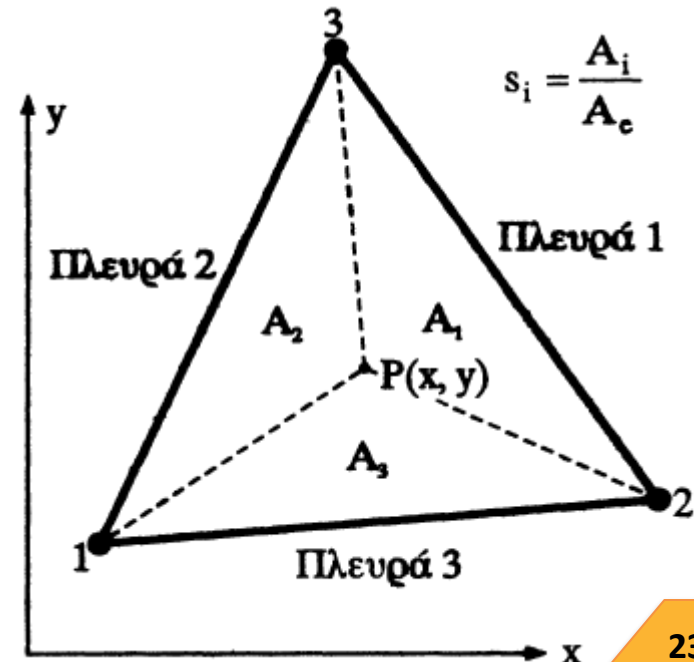
- Η βύθιση εκφράζεται ως μη πλήρες πολυώνυμο, συναρτήσει των επιφανειακών συντεταγμένων

$$w = \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \alpha_3 s_3$$

$$+ \alpha_4 \left(s_2^2 s_1 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + \alpha_5 \left(s_3^2 s_2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + \alpha_6 \left(s_1^2 s_3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) \\ + \alpha_7 \left(s_1^2 s_2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + \alpha_8 \left(s_2^2 s_3 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + \alpha_9 \left(s_3^2 s_1 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right)$$

- Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές $\alpha_1, \dots, \alpha_9$, παρατηρούμε ότι

- Το γινόμενο $s_1 s_2 s_3$ μηδενίζει πάνω στις πλευρές του τριγώνου
- Το γινόμενο $s_1 s_2 s_3$ έχει μηδενικές παραγώγους στις κορυφές του τριγώνου.



Τριγωνικό στοιχείο Bazeley et.al.

- Έτσι προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος

$$w = N_1 w_1 + N_2 \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_3 \frac{\partial w_1}{\partial y} + N_4 w_2 + N_5 \frac{\partial w_2}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w_2}{\partial y} + N_7 w_3 + N_8 \frac{\partial w_3}{\partial x} + N_9 \frac{\partial w_3}{\partial y}$$

- Τώρα οι συναρτήσεις σχήματος εξαρτώνται από τις επιφανειακές συντεταγμένες

$$N_1(s_1, s_2, s_3) = s_1 + s_1^2 s_2 + s_1^2 s_3 - s_1 s_2^2 - s_1 s_3^2$$

$$N_2(s_1, s_2, s_3) = (x_2 - x_1) \left(s_1^2 s_2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + (x_3 - x_1) \left(s_3 s_1^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right)$$

$$N_3(s_1, s_2, s_3) = (y_2 - y_1) \left(s_1^2 s_2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right) + (y_3 - y_1) \left(s_3 s_1^2 + \frac{1}{2} s_1 s_2 s_3 \right)$$

- Οι N_4, N_7 προκύπτουν σαν την N_1 με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.
- Οι N_5, N_8 προκύπτουν σαν την N_2 με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.
- Οι N_6, N_9 προκύπτουν σαν την N_3 με κυκλική εναλλαγή των δεικτών.



Τριγωνικό στοιχείο Bazeley et.al.

- Ακολουθούμε την καθιερωμένη μέθοδο πεπερασμένων στοιχείων για το μητρώο δυσκαμψίας του στοιχείου (όπως στο στοιχείο Morley)
- Βύθιση

$$w = [N] \cdot \{d\}$$

- Μητρώο παραμόρφωσης

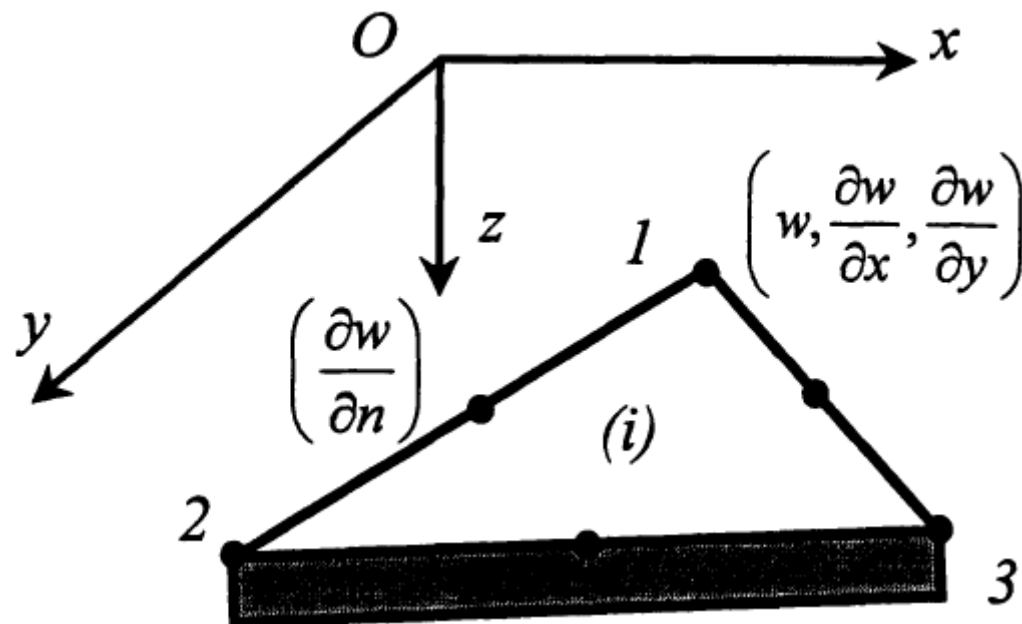
$$[B_k] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_1}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_1}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_6}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 N_1}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_2}{\partial x \partial y} & 2 \frac{\partial^2 N_6}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}$$

- Μητρώο δυσκαμψίας

$$[k] = \int_{A_e} [B_k]^T [E_k] [B_k] dA_e$$

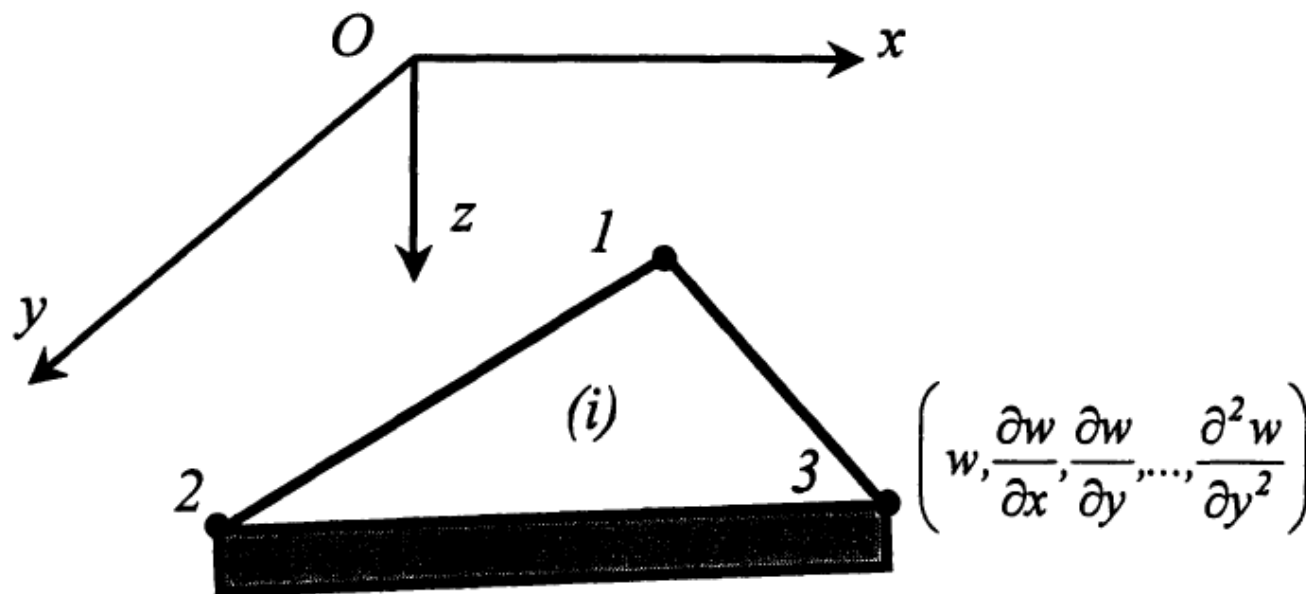
Τριγωνικά στοιχεία ανωτέρας τάξης

- Στοιχείο 6 κόμβων – 12 β.ε.
- Κόμβοι στις κορυφές του τριγώνου και στα μέσα των πλευρών
- 3 β.ε. σε κάθε κόμβο-κορυφή: βύθιση (w) και κλίσεις ως προς x, y $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}\right)$
- 1 β.ε. σε κάθε κόμβο-μέσο: κάθετη κλίση στην πλευρά $\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)$
- Το στοιχείο είναι σύμμορφο.



Τριγωνικά στοιχεία ανωτέρας τάξης

- Στοιχείο 3 κόμβων – 18 β.ε.
- Κόμβοι στις κορυφές του τριγώνου
- 6 β.ε. σε κάθε κόμβο-κορυφή: βύθιση (w), 1^ες και 2^ες παράγωγοι ως προς x, y $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$
- Το στοιχείο είναι σύμμορφο και έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από το στοιχείο 6 κόμβων – 12 β.ε.



Τριγωνικά στοιχεία ανωτέρας τάξης

- Στοιχείο 6 κόμβων – 21 β.ε.
- Κόμβοι στις κορυφές του τριγώνου και στα μέσα των πλευρών
- 6 β.ε. σε κάθε κόμβο-κορυφή: βύθιση (w), 1^ε και 2^ε παράγωγοι ως προς τους άξονες x, y $\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$
- 1 β.ε. σε κάθε κόμβο-μέσο: κάθετη κλίση στην πλευρά $\left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)$

- Το στοιχείο είναι σύμμορφο και έχει μεγαλύτερη ακρίβεια από το στοιχείο 3 κόμβων – 18 β.ε.

