



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 4: Αναλυτική μέθοδος επίλυσης πλακών Levy

Γιάννης Καλογεράς
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2024-2025

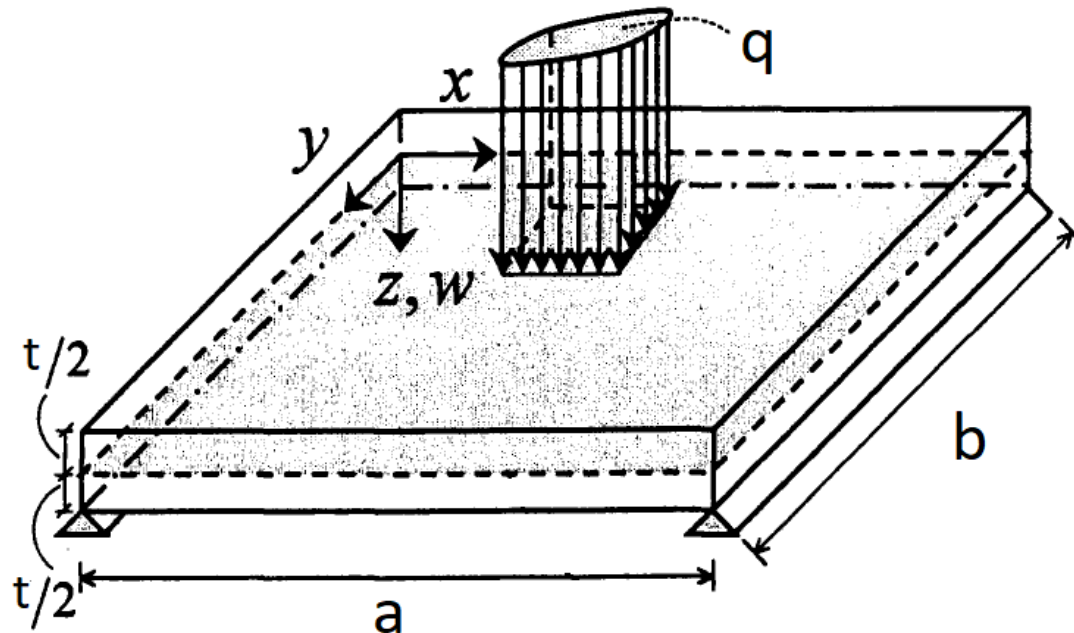
Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Διαφορική εξίσωση πλάκας

- Ορθογωνική πλάκα επί του επιπέδου xy , που φορτίζεται κατά z
- Διαφορική εξίσωση της πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Διάφορες συνοριακές συνθήκες στις παρειές της πλάκας.



Διαφορική εξίσωση πλάκας

- Ορίζουμε τον αρμονικό τελεστή

$$\nabla^2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

- δηλαδή

$$\nabla^2 \cdot f(x, y) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Ορίζουμε τον διαρμονικό τελεστή

$$\nabla^4 := \nabla^2 \nabla^2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 := \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right).$$

- δηλαδή

$$\nabla^4 \cdot f(x, y) = \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \cdot f(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$$

Διαφορική εξίσωση πλάκας

- Χρησιμοποιώντας τον διαρμονικό τελεστή

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$$

- Η διαφορική εξίσωση (δ.ε.) της πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Μπορεί να γραφτεί ως

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Και για συντομία:

$$\nabla^4 w = q/D$$

Η μέθοδος Levy

- Δ.ε. της πλάκας:

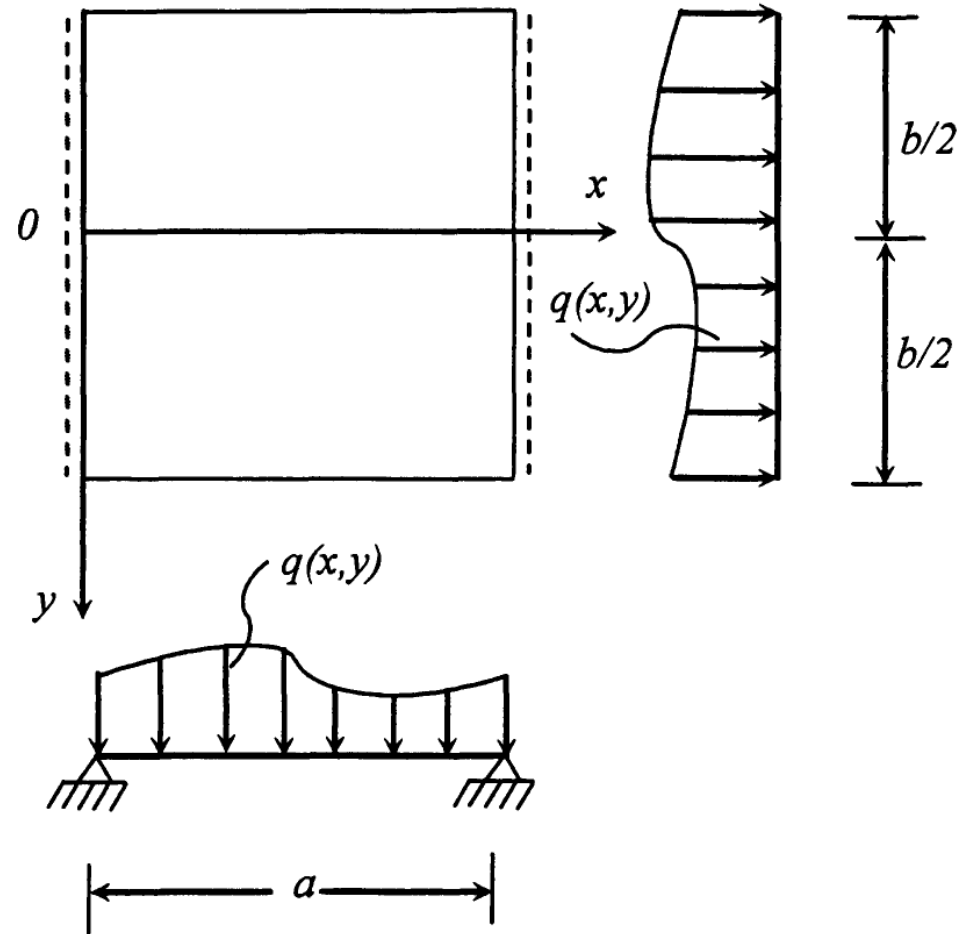
$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Συνοριακές συνθήκες:

- απλή έδραση σε 2 παρειές της πλάκας, έστω στις κάθετες στον άξονα x
- οποιεσδήποτε στις άλλες 2 παρειές.

- Φόρτιση: τυχαία κατα x, y

- Το σύστημα συντεταγμένων είναι μετατοπισμένο κατά $\Delta y = \frac{b}{2}$ σε σχέση με αυτό του Navier



Η μέθοδος Levy

- Δ.ε. της πλάκας:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}$$

- Ιδέα: η λύση της δ.ε. Ισούται με το άθροισμα $w = w_h + w_p$
 - w_h (homogeneous) είναι η λύση της ομογενούς εξίσωσης $\nabla^4 w_h = 0$
 - w_p (particular) είναι μία μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $\nabla^4 w_p = q/D$

- Έτσι η συνολική λύση w όντως ικανοποιεί τη δ.ε.

$$\nabla^4 w = \nabla^4 (w_h + w_p) = \nabla^4 w_h + \nabla^4 w_p = \frac{q}{D}$$

- Το φορτίο, η ομογενής και η μερική λύση αναλύονται σε σειρές Fourier:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$
$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Η μέθοδος Levy

- Το φορτίο, η ομογενής και μερική λύση αναλύονται σε σειρές Fourier:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

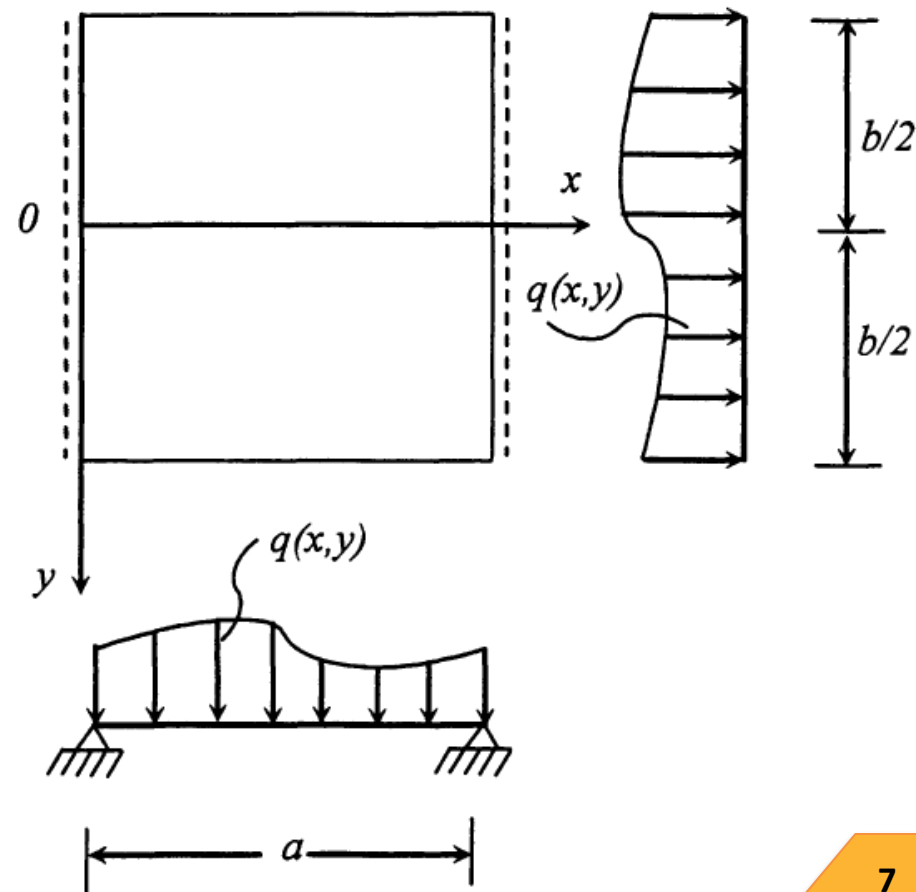
$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Αυτές είναι απλές ημιτονειδείς σειρές, σε αντίθεση με τη λύση του Navier
- Στον άξονα x όπου οι στηρίξεις είναι απλή έδραση, έχουμε ημιτονοειδή συμπεριφορά $\sin \frac{m\pi x}{a}$.

- Έτσι ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες στις θέσεις $x = 0$ και $x = a$:

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



Η μέθοδος Levy

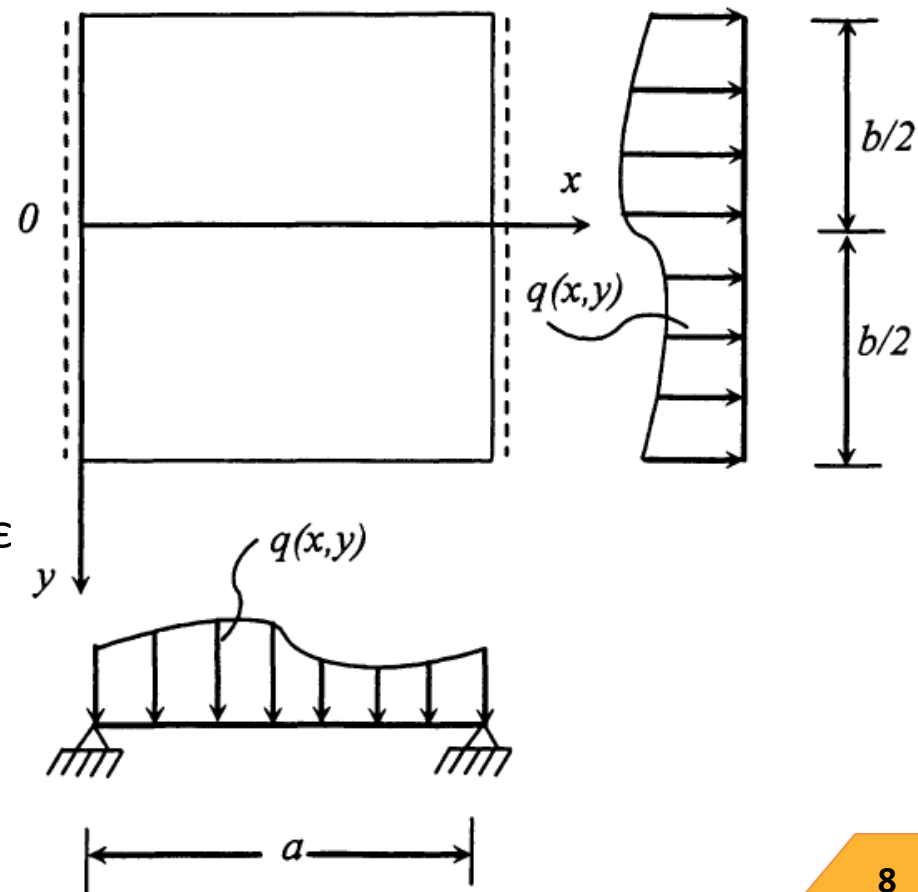
- Το φορτίο, η ομογενής και μερική λύση αναλύονται σε σειρές Fourier:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Στον άξονα y , η συμπεριφορά περιγράφεται από τις συναρτήσεις $k_m(y)$, $l_m(y)$, $q_m(y)$.
- Έτσι μπορεί να προσαρμοστεί ανάλογα με τις αυθαίρετες συνοριακές συνθήκες των παρειών που είναι κάθετες στον y .



Λύση ομογενούς δ.ε.

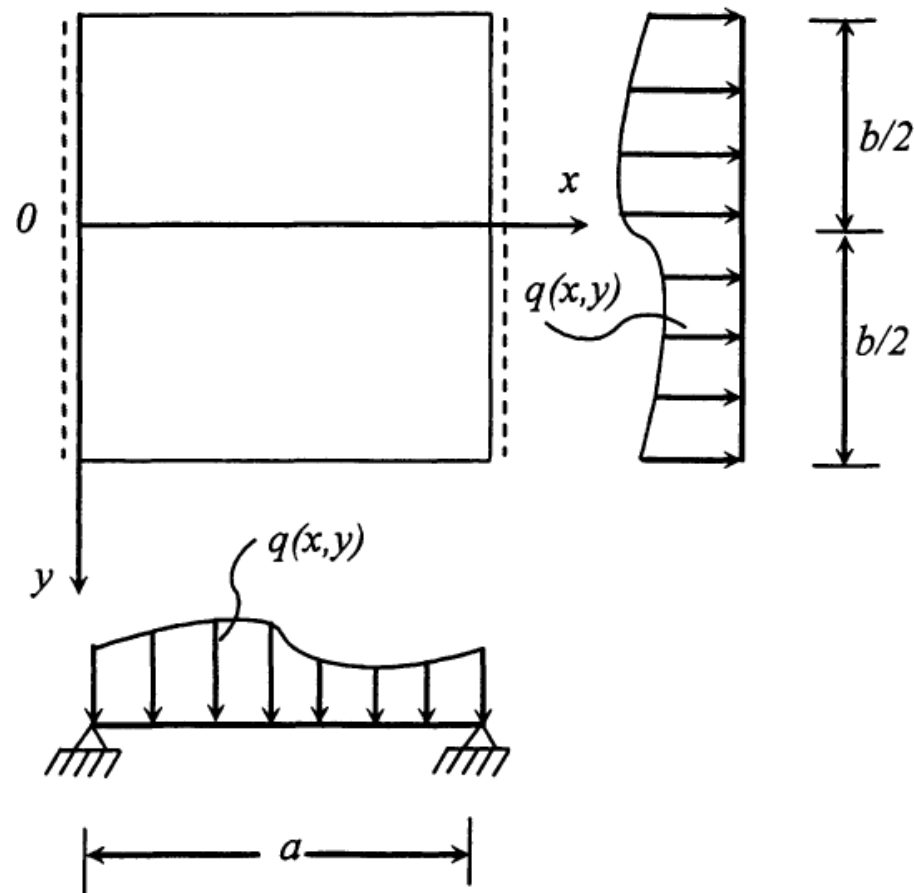
- Η ομογενής λύση προκύπτει από σύνθεση της σειράς Fourier:

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Η λύση της ομογενούς w_h προκύπτει εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στις θέσεις $y = \pm b/2$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

- Η λύση της ομογενούς δεν εξαρτάται από τη φόρτιση, αλλά μόνο από τις συνοριακές συνθήκες (στηρίξεις)!



Ανάλυση Fourier του φορτίου

Βήμα 1: Ανάλυση Fourier του εξωτερικού φορτίου

- Είναι γνωστή η συνάρτηση $q(x, y)$ του εξωτερικού φορτίου.
- Θέλουμε να το εκφράσουμε σε απλή σειρά Fourier ίδιας μορφής με αυτής των λύσεων w_h, w_p . Έτσι θα μπορέσουμε να εξισώσουμε τους συντελεστές των σειρών.

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές $q_m(y)$. Εργαζόμαστε όπως στη μέθοδο Navier.
- Πολλαπλασιάζοντας με $\sin \frac{m'\pi x}{a}$ και απαλοίφοντας τα μηδενικά γινόμενα λόγω ορθογωνικότητας προκύπτει

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

Μερική λύση

Βήμα 2: Εύρεση μερικής λύσης w_p

- Έχει ίδια μορφή με την w_h

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Και αυτή ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες στις άπλά εδραζόμενες παρειές $x = 0$ και $x = a$.
- Αντικαθιστώ στην μη ομογενή εξίσωση $\nabla^4 w_p = q/D$ την παραπάνω σειρά και την σειρά του φορτίου

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Στην εξίσωση που προκύπτει εξισώνουμε τους συντελεστές των σειρών, οπότε

$$\frac{d^4 l_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m = \frac{q_m(y)}{D}$$

Μερική λύση

- Καταλήξαμε στην συνήθη δ.ε.

$$\frac{d^4 l_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m = \frac{q_m(y)}{D}$$

- Όπου ψάχνουμε τη συνάρτηση $l_m(y)$, ενώ η $q_m(y)$ έχει υπολογιστεί από την προηγούμενη ανάλυση Fourier του φορτίου (βήμα 2)
- Όμως δεν χρειάζεται να λύσουμε πλήρως την παραπάνω συνήθη δ.ε. Μας ενδιαφέρει μόνο μία μερική λύση της!
- Μόλις την υπολογίσουμε, μπορούμε πλέον να συνθέσουμε τη μερική λύση της δ.ε. ισορροπίας της πλάκας

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Μερική λύση

Ειδική περίπτωση: φόρτιση ανεξάρτητη της μεταβλητής y

- $q(x, y) = q(x)$
- Άρα οι συντελεστές Fourier του φορτίου είναι σταθεροί όροι, ανεξάρτητοι του y

$$q_m(y) = q_m = \frac{2}{a} \int_0^a q(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

- Σε αυτή την περίπτωση

$$\frac{d^4 l_m(y)}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m(y)}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m(y) = \frac{q_m}{D} = \text{σταθ}$$

- Μία μερική λύση της παραπάνω είναι η σταθερή συνάρτηση

$$l_m(y) = l_m = \text{σταθ}$$

- Άρα την επαληθεύει. Όντως αντικαθιστώντας στην

$$\cancel{\frac{d^4 l_m}{dy^4}} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \cancel{\frac{d^2 l_m}{dy^2}} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m = \frac{q_m}{D}$$

Υπολογίζονται άμεσα οι συντελεστές

$$l_m = \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D}$$

Μερική λύση

Ειδική περίπτωση: φόρτιση ανεξάρτητη της μεταβλητής y

- Άρα αν οι συντελεστές $q_m(y)$ του $q(x, y)$ είναι ανεξάρτητοι του y , το ίδιο ισχύει και για τους συντελεστές $l_m(y)$ της $w_p(x, y)$:

$$l_m = \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D}$$

- Η μερική λύση γράφεται

$$w_p(x, y) = \frac{a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_m}{m^4} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Ισοδύναμα, η περίπτωση αυτή μπορεί να λυθεί θεωρώντας αμφιέρειστη πλακολωρίδα υποβαλλόμενη στο φορτίο $q(x)$, οπότε η μη ομογενής δ.ε. απλοποιείται σε

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{q(x)}{D}$$

- Η δ.ε. εξίσωση αυτή καταλήγει στην παραπάνω μερική λύση w_p

Λύση ομογενούς δ.ε.

Βήμα 3: Εύρεση λύσης ομογενούς w_h

- Αντικαθιστούμε την συνάρτηση της w_h

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

στην ομογενή δ.ε. $\nabla^4 w_h = 0$, οπότε προκύπτει

$$\sum_{m=1, \dots}^{\infty} \left[\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 k_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

- Για να ισχύει η παραπάνω για κάθε x θα πρέπει να μηδενίζει ο όρος

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 k_m = 0$$

- Η γενική λύση αυτής της συνήθους δ.ε. είναι

$$k_m = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}}$$

Λύση ομογενούς δ.ε.

- Η γενική της προηγούμενης συνήθους δ.ε. είναι

$$k_m = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}}$$

- Εισάγουμε τις υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

- Επειδή έχουν βολικές συμμετρίες

$$\sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \cosh(-z) = \cosh(z)$$

- Έτσι, η συνάρτηση $k_m(y)$ γράφεται ως

$$k_m = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

- Και λύση της ομογενούς ως

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Αυτή η λύση εξαρτάται μόνο από τις συνοριακές συνθήκες, όχι από την φόρτιση.

Λύση ομογενούς δ.ε.

- Η λύση της ομογενούς είναι

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Οι σταθερές A_m, B_m, C_m, D_m υπολογίζονται εφαρμόζοντας τις συνοριακές συνθήκες στην παραπάνω:
 - Παραγωγίζουμε την παραπάνω w_h μέχρι να εκφράσουμε όλες τις παραγώγους που υπεισέρχονται στις συνοριακές.
 - Αντικαθιστούμε τις σχέσεις της w_h και των παραγώγων της στις εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών για $y = \pm b/2$.
 - Έχουμε 2 συνοριακές συνθήκες σε καθεμία από τις 2 παρειές κάθετες στον y .
 - Από αυτές προκύπτει γραμμικό σύστημα 4x4 που λύνεται πάντα.
 - Σε κάποια προβλήματα, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την συμμετρία, ώστε να μηδενίσουμε άμεσα κάποιες σταθερές και να απλοποιηθεί το σύστημα.
 - Αυτές οι επιπλέον εξισώσεις λόγω συμμετρίας αντικαθιστούν ουσιαστικά κάποιες από τις συνοριακές συνθήκες (είναι γραμμικά εξαρτημένες εξισώσεις)

Τάσεις και εντατικά μεγέθη

Βήμα 4: Υπολογισμός τάσεων και εντατικών μεγεθών

- Προκύπτουν παραγωγίζοντας τη συνολική λύση: $w(x, y) = w_h(x, y) + w_p(x, y)$
- Εντατικά μεγέθη

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

- Τάσεις

$$\sigma_x = \frac{-E}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-E}{1 + \nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



Σύγκριση μεθόδων Navier-Levy

- Η μέθοδος Navier μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν όλες οι παρειές είναι απλά εδραζόμενες.
- Η μέθοδος Levy είναι πιο γενική και απαιτεί μόνο 2 απέναντι παρειές να είναι απλά εδραζόμενες
- Στη μέθοδο Navier τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται από τύπους διπλών σειρών Fourier που συγκλίνουν αργά (σε σχέση με τη βύθιση).
- Στη μέθοδο Levy τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται από τύπους απλών σειρών Fourier που συγκλίνουν ταχύτερα από ότι στη Navier.
- Στη μέθοδο Levy απαιτείται η επίλυση διαφορικής εξίσωσης για τον προσδιορισμό των συντελεστών $l_m(y)$
- Βέβαια, η παραπάνω δυσχέρεια αφαιρείται όταν το φορτίο είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής y .

Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Levy

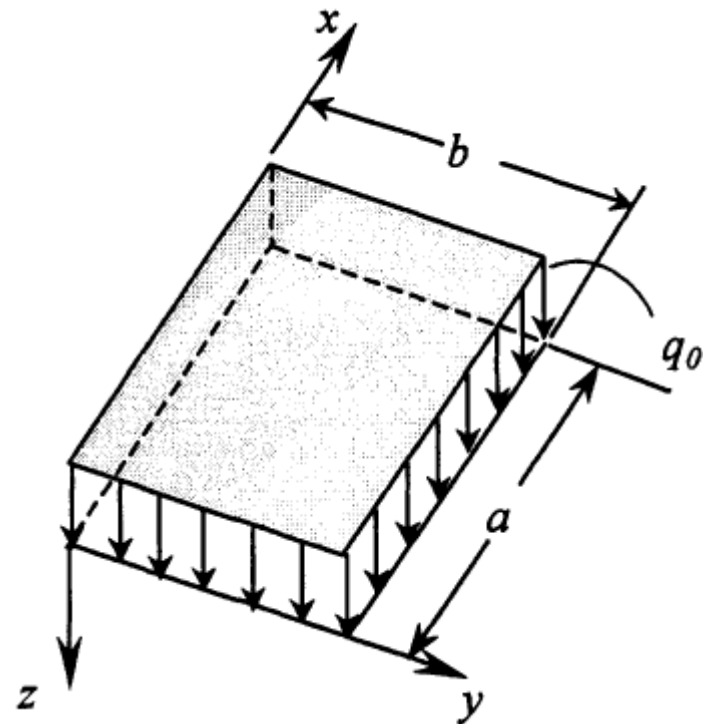
- Ομοιόμορφο φορτίο
 $q(x, y) = q_0$

- Συντελεστές

$$q_m = \frac{4q_0}{m\pi}$$

όπου

$$m = 1, 3, 5, \dots$$



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Levy

- Υδροστατικό φορτίο

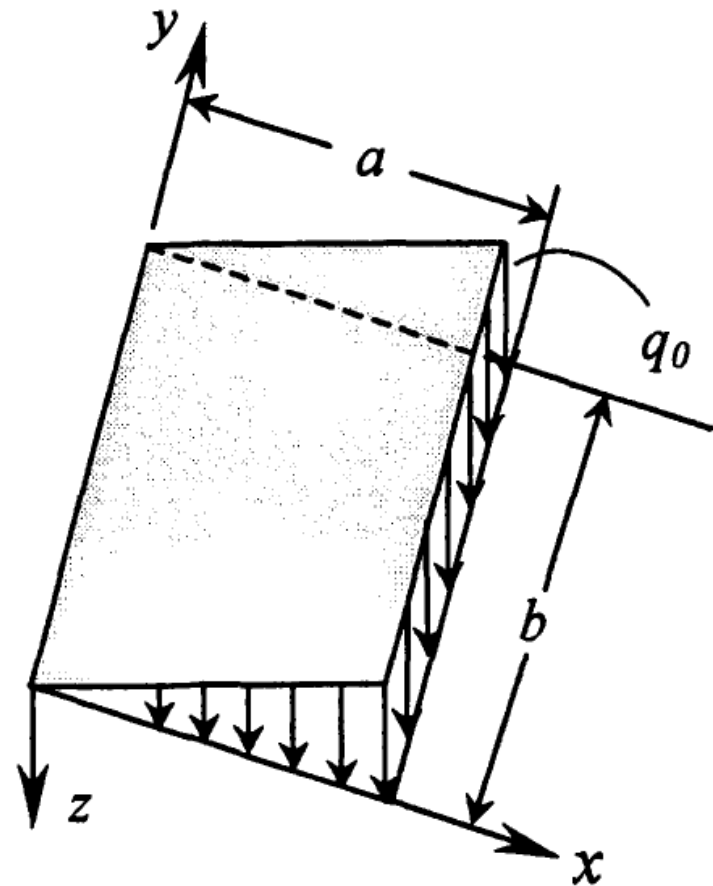
$$q(x, y) = q_0 \frac{x}{a}$$

- Συντελεστές

$$q_m = \frac{2q_0}{m\pi} (-1)^{m+1}$$

όπου

$$m = 1, 2, 3, \dots$$



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Levy

- Συγκεντρωμένο φορτίο Q_0

$$q(x, y) = Q_0 \delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0) = Q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

- στη θέση (x_0, y_0)

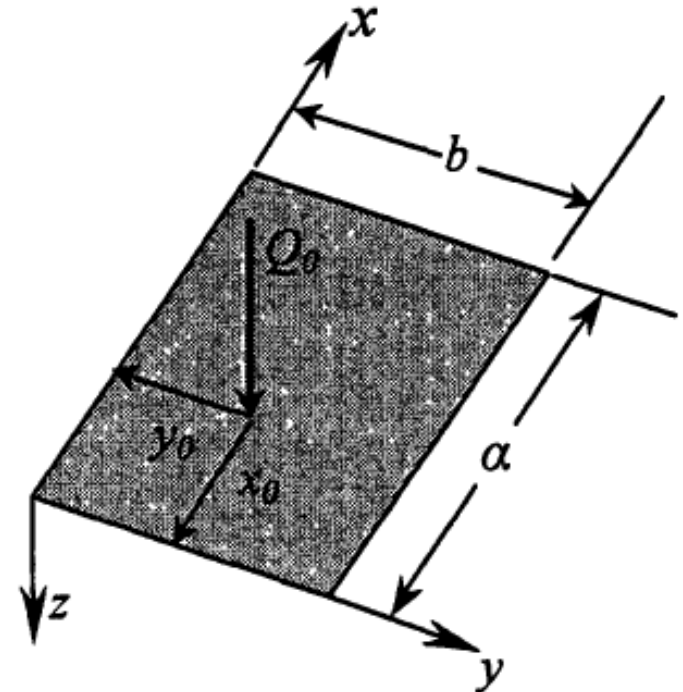
- Συντελεστές

$$q_m(y) = \frac{2Q_0}{a} \delta(y - y_0) \sin \frac{m\pi x_0}{a}$$

όπου

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

Μεταβάλλεται κατά y



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Levy

- Γραμμικό φορτίο q
 $q(x, y) = q_0 \delta(x - x_0)$

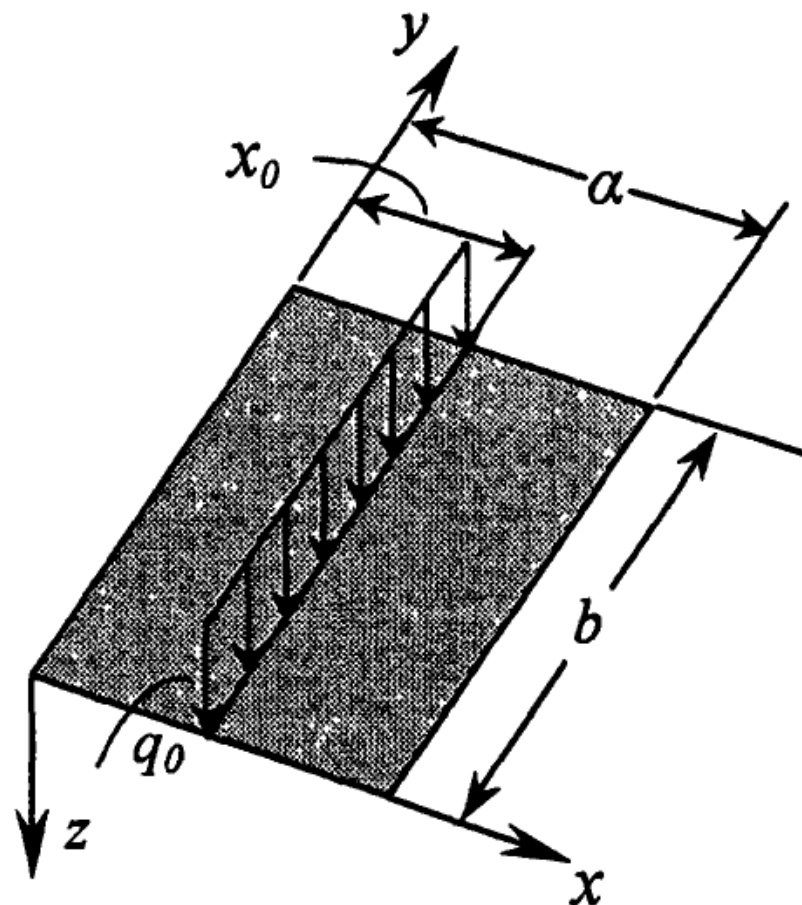
- στην ευθεία $x = x_0$

- Συντελεστές

$$q_m = \frac{2q_0}{a} \sin \frac{m\pi x_0}{a}$$

όπου

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

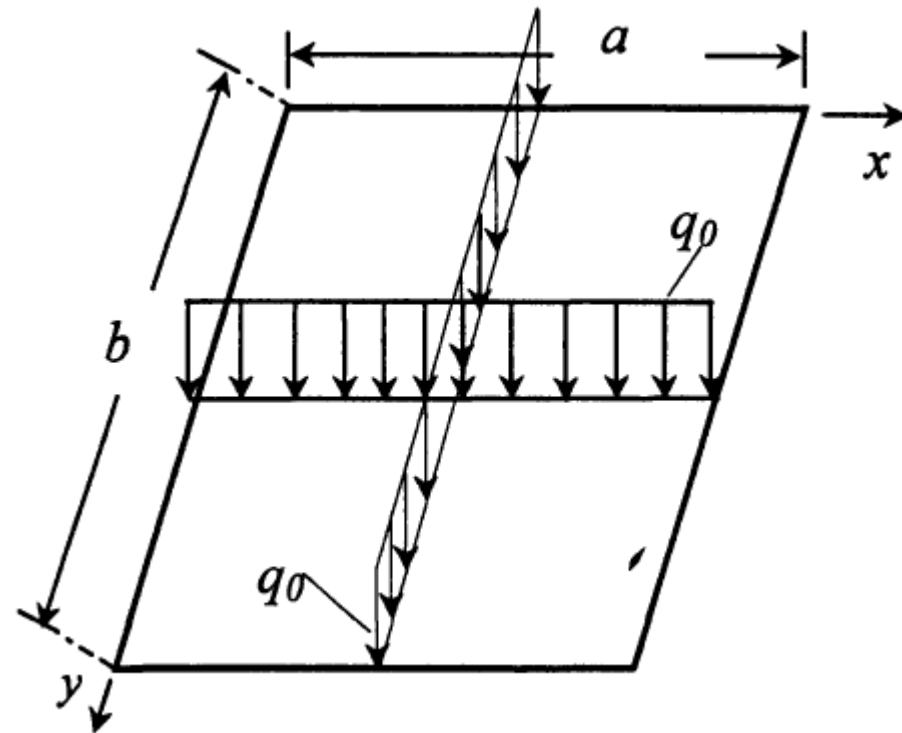


Παράδειγμα 1

Δίνεται ορθογωνική πλάκα με απλή έδραση σε όλες τις παρειές της και ομοιόμορφο φορτίο q_0 .

Να υπολογιστούν με τη μέθοδο Levy:

- Η αναλυτική έκφραση της βύθισης w
- Η μέγιστη βύθιση στην περίπτωση τετραγωνικής πλάκας



Παράδειγμα 1

Βήμα 1: Ανάλυση Fourier φορτίου

- Ομοιόμορφο φορτίο $q(x, y) = q_0$
- Αναλύεται ως

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Και οι συντελεστές $q_m(y)$ υπολογίζονται ως

$$q_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \dots = \frac{4q_0}{m\pi}$$

για $m = 1, 3, 5, \dots$

- Για $m = 2, 4, 6, \dots$ το παραπάνω ολοκλήρωμα δίνει $q_m = 0$. Θα προκύψει ότι οι αντίστοιχοι όροι στις σειρές w_p και w_h μηδενίζουν και αυτοί. Αυτό είναι λογικό, αφού η πλάκα δεν διεγείρεται σε αυτές τις συχνότητες από την εξωτερική φόρτιση.

Παράδειγμα 1

Βήμα 2: Μερική λύση (γενικός τρόπος)

- Η μερική λύση έχει τη μορφή

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Όπου οι συναρτήσεις $l_m(y)$ υπολογίζονται από τη συνήθη διαφορική

$$\begin{aligned} \frac{d^4 l_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m &= \frac{q_m(y)}{D} \\ \Rightarrow \frac{d^4 l_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m &= \frac{4q_0}{m\pi D} \end{aligned}$$

- Η πλήρης λύση αυτής της δ.ε. είναι σχετικά πολύπλοκη. Ωστόσο εμείς χρειαζόμαστε μόνο μια μερική λύση.
- Μια τέτοια μερική λύση είναι η σταθερή συνάρτηση $l_m(y) = l_m = \text{σταθ.}$. Αντικαθιστώντας στην δ.ε. Προκύπτει

$$l_m = \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \quad m = 1, 3, 5, \dots$$

Παράδειγμα 1

Βήμα 2: Μερική λύση (ειδική περίπτωση)

- Η μερική λύση έχει τη μορφή

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Επειδή το φορτίο είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής y , οι συντελεστές $l_m(y)$ υπολογίζονται άμεσα από τη σχέση

$$l_m = \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D} = \begin{cases} \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} & m = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

- Και τελικά

$$w_p(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Από την παραπάνω φαίνεται ότι η φόρτιση σε συγκεκριμένες συχνότητες (που εξαρτώνται από το m), διεγείρει τη βύθιση μόνο σε αυτές τις συχνότητες.

Παράδειγμα 1

Βήμα 3: Λύση ομογενούς δ.ε.

- Η μερική λύση είναι συμμετρική ως προς x , αφού $w_p(x, -y) = w_p(x, y)$

$$w_p(x, y) = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Επίσης η γεωμετρία της πλάκας, οι συνοριακές συνθήκες και η φόρτιση είναι επίσης συμμετρικές ως προς τον άξονα x .
- Άρα και η λύση w_h της ομογενούς θα είναι συμμετρική. Άρα οι συντελεστές των αντισυμμετρικών όρων της θα μηδενίζονται.

$$w_h = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Συμμετρικοί όροι	$B_m \cosh \frac{m\pi y}{a}$	$C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a}$
Αντισυμμετρικοί όροι	$A_m \sinh \frac{m\pi y}{a}$	$D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a}$

- Άρα $A_m = D_m = 0$

Παράδειγμα 1

- Αφού $A_m = D_m = 0$
- Η λύση της ομογενούς έχει τη μορφή

$$w_h(x, y) = \sum_{m=1,3, \dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Η μερική λύση βρέθηκε ως

$$w_p = \frac{4q_0 a^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1, \dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \sin \frac{m\pi x}{a}, \quad m = 1, 3, \dots$$

- Η συνολική λύση είναι $w = w_h + w_p \Rightarrow$

$$w = \sum_{m=1,3, \dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Οι τιμές των B_m και C_m υπολογίζονται από την απαίτηση η συνολική λύση να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα 1

- Η συνολική λύση είναι $w = w_h + w_p \Rightarrow$

$$w = \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Οι συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης στις παρειές $x = 0$ και $x = a$ ικανοποιούνται αυτομάτως λόγω της μορφής της διαφορικής (όρος $\sin \frac{m\pi x}{a}$).
- Τα B_m, C_m υπολογίζονται από τις συνοριακές συνθήκες στις παρειές $y = \pm \frac{b}{2}$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

- Αντικαθιστώντας την παραπάνω συνολική λύση και θέτοντας $\beta_m = \frac{m\pi b}{2a}$

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \left(B_m \cosh \beta_m + \frac{C_m b}{2} \sinh \beta_m + \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

$$\sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{m\pi}{a} \left[2 \left(B_m \frac{\beta_m}{b} + C_m \right) \cosh \beta_m + C_m \beta_m \sinh \beta_m \right] \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

Παράδειγμα 1

- Οι προηγούμενες σχέσεις πρέπει να ισχύουν για κάθε $x \in [0, a]$, άρα

$$B_m \cosh \beta_m + \frac{C_m b}{2} \sinh \beta_m + \frac{4q_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} = 0$$
$$2 \left(B_m \frac{\beta_m}{b} + C_m \right) \cosh \beta_m + C_m \beta_m \sinh \beta_m = 0$$

- Λύνοντας το παραπάνω 2x2 γραμμικό σύστημα παίρνουμε

$$B_m = - \frac{4q_0 a^4 + 2m\pi q_0 a^3 b \tanh \beta_m}{m^5 \pi^5 D \cosh \beta_m}$$

$$C_m = \frac{4q_0 a^3}{m^4 \pi^4 D \cosh \beta_m}$$

Παράδειγμα 1

- Οπότε η συνολική λύση είναι

$$w = \frac{4q_0 a^4}{\pi^4 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left(-\frac{1 + \beta_m \tanh \beta_m}{\cosh \beta_m} \cosh \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi}{a \cosh \beta_m} y \sinh \frac{m\pi y}{a} + 1 \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Η μέγιστη βύθιση εμφανίζεται στο κέντρο της πλάκας

$$x = \frac{a}{2} \quad y = 0$$

- Για τετραγωνική πλάκα

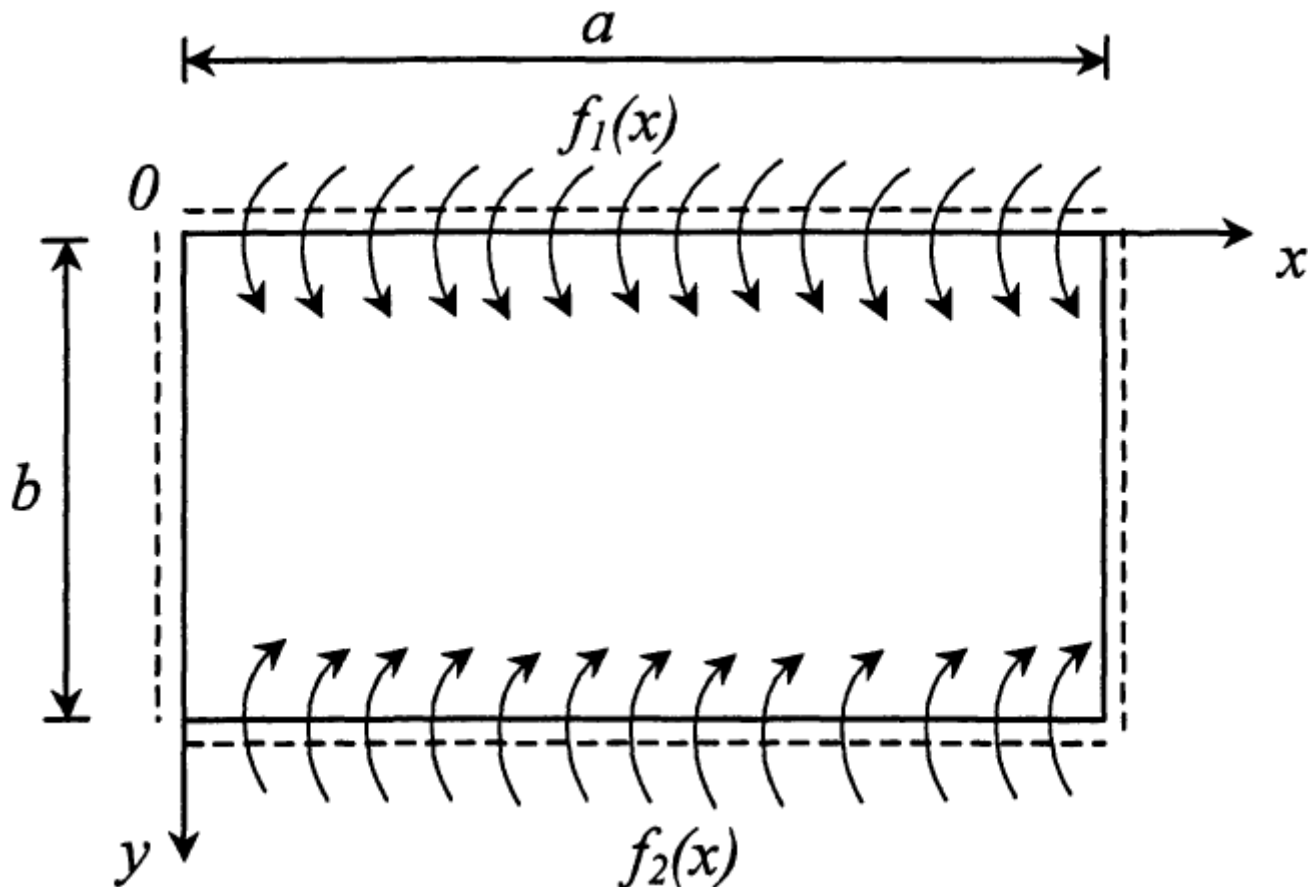
$$a = b \Rightarrow \beta_m = \frac{m\pi}{2}$$

- Αντικαθιστώντας στην συνάρτηση της βύθισης και μετά από πράξεις προκύπτει

$$w_{max} \cong 0,00406 \frac{q_0 a^4}{D}$$

Παράδειγμα 2

Δίνεται ορθογωνική πλάκα με απλή έδραση σε όλες τις παρειές της. Στις παρειές της $y = 0$ και $y = b$ υπόκειται σε κατανεμημένες καμπτικές ροπές $f_1(x)$ και $f_2(x)$ αντίστοιχα. Να υπολογισθεί η βύθιση w της πλάκας



Παράδειγμα 2

- Θεωρούμε το σύστημα συντεταγμένων της μεθόδου Navier ($y \in [0, b]$), αντί για το συνηθισμένο σύστημα της μεθόδου Levy ($y \in [-\frac{b}{2}, +\frac{b}{2}]$).
- Αυτό διευκολύνει τις πράξεις κατά την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών
- Η μέθοδος Levy μπορεί να χρησιμοποιηθεί κανονικά σε αυτό το σύστημα, όπου μετακινήσαμε τον άξονα Oy .
- Η σχέση του w ως προς το y θα προκύψει διαφορετική από ότι θα προέκυπτε με το συνηθισμένο σύστημα συντεταγμένων της Levy.
- Αυτό όμως θα προκύψει μέσα από τις συναρτήσεις $k_m(y)$, $l_m(y)$ που εμφανίζονται στις σειρές Fourier της βύθισης.
- Θα μπορούσαμε να μετακινήσουμε και τον άξονα Ox . Ωστόσο θα έπρεπε να προσαρμόσουμε τον τριγωνομετρικό όρο $\sin \frac{m\pi x}{a}$ που εμφανίζεται στις σειρές Fourier, ώστε να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης $\left(w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0\right)$ στις παρειές $x = 0, x = a$.

Παράδειγμα 2

- Δεν υπάρχει κατανεμημένο φορτίο: $q(x, y) = 0$
- Στην περίπτωση αυτή η μερική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης $\nabla^4 w_p = \frac{q}{D} = 0$ είναι $w_p = 0$.
- Εναλλακτικά, το φορτίο $q(x, y) = 0$ είναι ανεξάρτητο της μεταβλητής y , άρα οι συντελεστές $l_m(y)$ υπολογίζονται άμεσα από τη σχέση

$$l_m = \frac{q_m a^4}{m^4 \pi^4 D} = 0$$

Άρα η μερική λύση είναι

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$

- Επομένως χρειάζεται να προσδιορίσουμε μόνο τη λύση της ομογενούς εξίσωσης $\nabla^4 w_h = 0$
- Αυτή θα προκύψει χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες, όπου ασκείται η εξωτερική φόρτιση (συνοριακές κατανεμημένες ροπές $f_1(x)$ και $f_2(x)$)

Παράδειγμα 2

- Ψάχνουμε λοιπόν τη λύση της ομογενούς που έχει τη μορφή

$$w_h = \sum_{m=1}^{\infty} k_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$k_m(y) = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

- Οι σταθερές A_m, B_m, C_m, D_m θα προκύψουν από αντικατάσταση της πλήρους λύσης στις συνοριακές συνθήκες.

- Εδώ η πλήρης λύση της δ.ε. $\nabla^4 w = \frac{q}{D} = 0$ είναι $w = w_h + w_p \Rightarrow w = w_h$

- Οι συνοριακές συνθήκες είναι

a) $w(x, 0) = 0$

b) $M_y(x, 0) = f_1(x)$

c) $w(x, b) = 0$

d) $M_y(x, b) = f_2(x)$

} Απλή έδραση και εξωτερική ροπή στην παρειά $y = 0$

} Απλή έδραση και εξωτερική ροπή στην παρειά $y = b$

Παράδειγμα 2

- Λόγω της συνοριακής συνθήκης α) $w(x, 0)$:

$$w(x, 0) = w_h(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} (0 + B_m \cdot 1 + 0 + 0) \sin \frac{m\pi x}{a} = 0$$
$$\Rightarrow B_m = 0$$

- Αυτός ήταν ο λόγος αλλαγής του συστήματος συντεταγμένων. Άρα

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a} \right) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Αντικαθιστώντας στην συνοριακή συνθήκη (b) $M_y(x, 0) = f_1(x)$ προκύπτει:

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} C_m \sin \frac{m\pi x}{a} = f_1(x)$$

- Όπου χρησιμοποιήθηκε ότι

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

Παράδειγμα 2

- Από την συνοριακή συνθήκη (b) προέκυψε

$$-2D \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{a} C_m \sin \frac{m\pi x}{a} = f_1(x)$$

- Ως συνήθως, αναλύω την $M_y(x, 0) = f_1(x)$ σε απλή σειρά Fourier όμοια με την παραπάνω για να εξισώσω συντελεστές

$$f_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^1 \sin \frac{m\pi x}{a}$$

- Όπου οι συντελεστές F_m^1 υπολογίζονται κατά τα γνωστά

$$F_m^1 = \frac{2}{a} \int_0^L f_1(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

- Εξισώνοντας τους συντελεστές των παραπάνω απλών σειρών προκύπτει

$$C_m = -\frac{F_m^1 a}{2m\pi D}$$

Παράδειγμα 2

- Αντίστοιχα αναλύω την $f_2(x)$ σε απλή σειρά Fourier

$$f_2(x) = \sum_{m=1}^{\infty} F_m^2 \sin \frac{m\pi x}{a} = M_y(x, b) \quad F_m^2 = \frac{2}{a} \int_0^L f_2(x) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

- Από την συνοριακή συνθήκη (c) $w(x, b) = 0$ προκύπτει

$$bD_m \cosh \frac{m\pi b}{a} + (A_m + C_m b) \sinh \frac{m\pi b}{a} = 0$$

- Από την συνοριακή συνθήκη (d) $M_y(x, b) = f_2(x)$ προκύπτει

$$-2D \frac{m\pi}{a} \left(D_m \sinh \frac{m\pi b}{a} + C_m \cosh \frac{m\pi b}{a} \right) = F_m^2$$

- Λύνοντας το παραπάνω 2×2 γραμμικό σύστημα, έχω πλέον όλους τους συντελεστές A_m, B_m, C_m, D_m

$$A_m = \frac{ab}{2m\pi D \sinh^2 \frac{m\pi b}{a}} \left(F_m^2 \cosh \frac{m\pi b}{a} - F_m^1 \right)$$

$$D_m = \frac{ab}{2m\pi D \sinh \frac{m\pi b}{a}} \left(F_m^1 \cosh \frac{m\pi b}{a} - F_m^2 \right)$$