



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

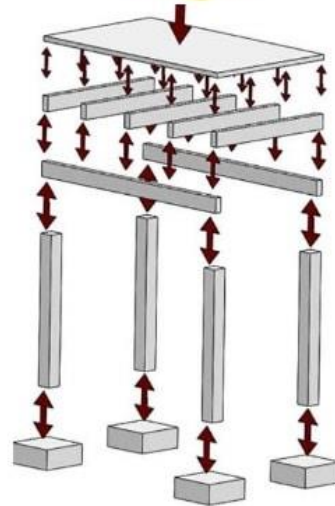
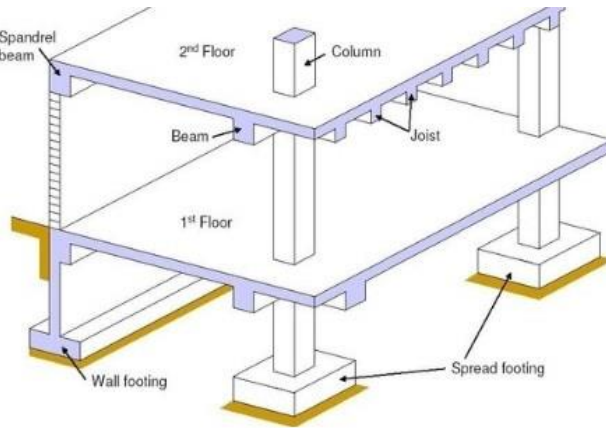


Ανάλυση επιφανειακών φορέων

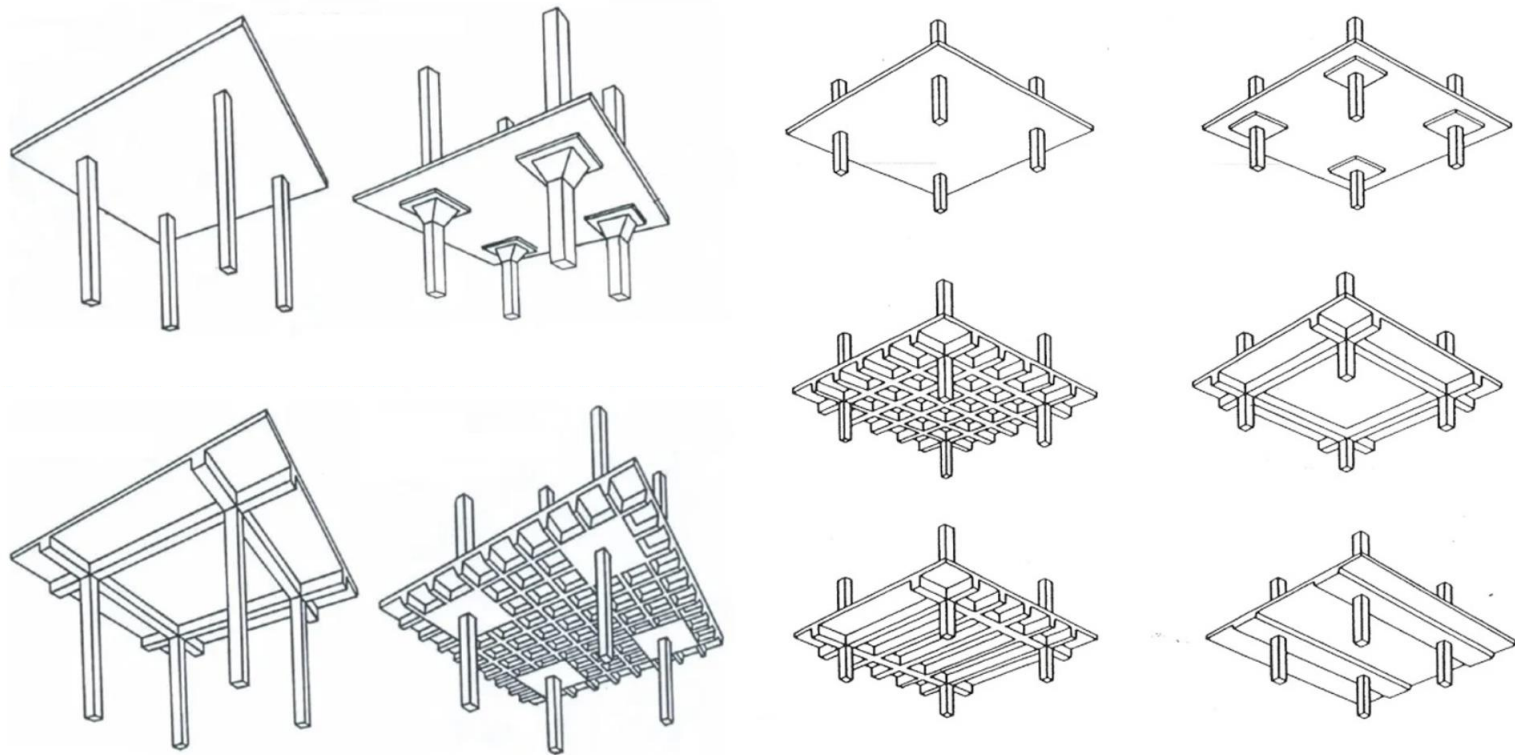
Ενότητα 1: Κλασική θεωρία πλακών Kirchhoff

Γιάννης Καλογεράς &
Σεραφείμ Μπακαλάκος
2024-2025

Φορέας πλάκα



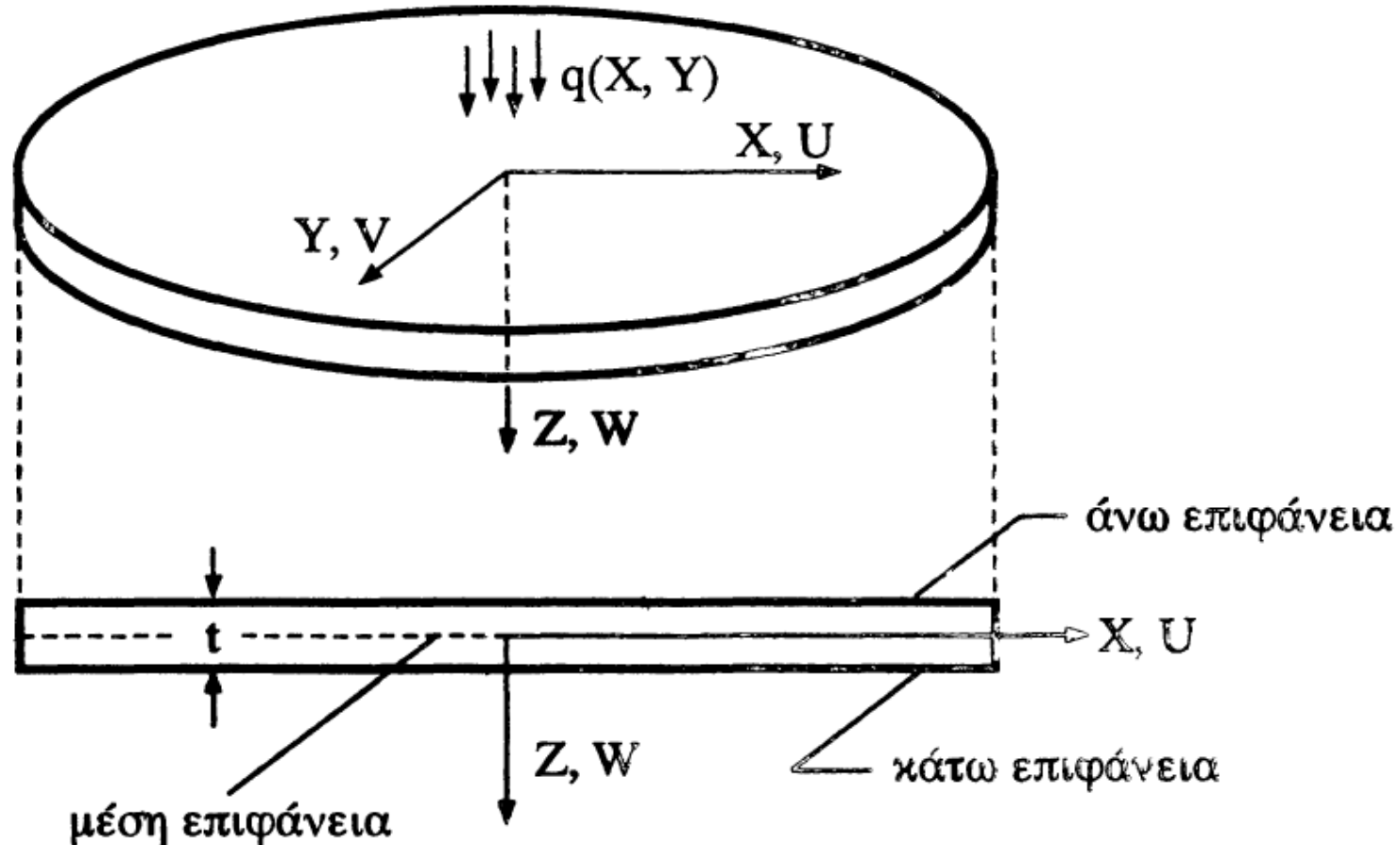
Φορέας πλάκα



Τύποι πλακών

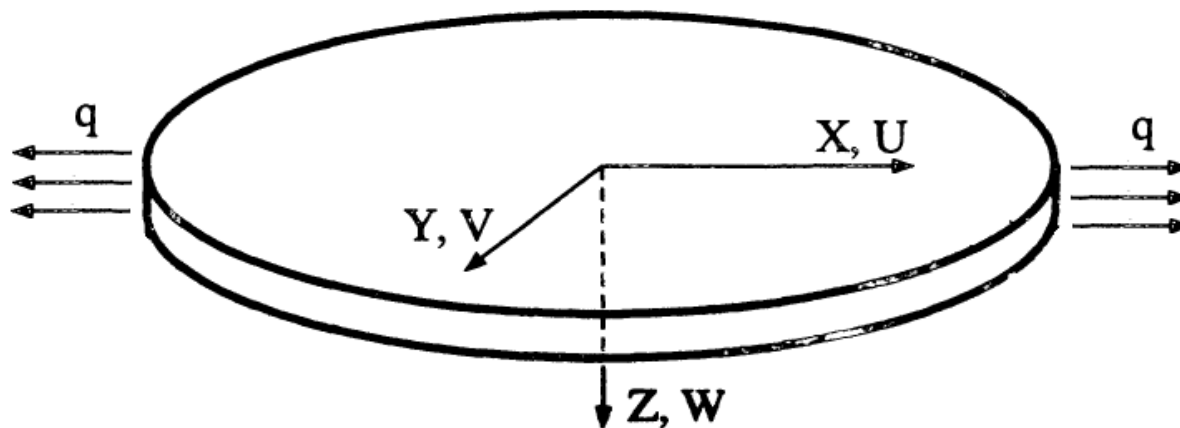
Μαθηματικό Προσομοίωμα

- Η διάσταση t κατά z είναι πολύ μικρότερη από ότι τις διαστάσεις x, y
- Φορτίζεται κατά z
- Δουλεύουμε με τη μέση επιφάνεια ($z = 0$) παράλληλη στις άνω και κάτω



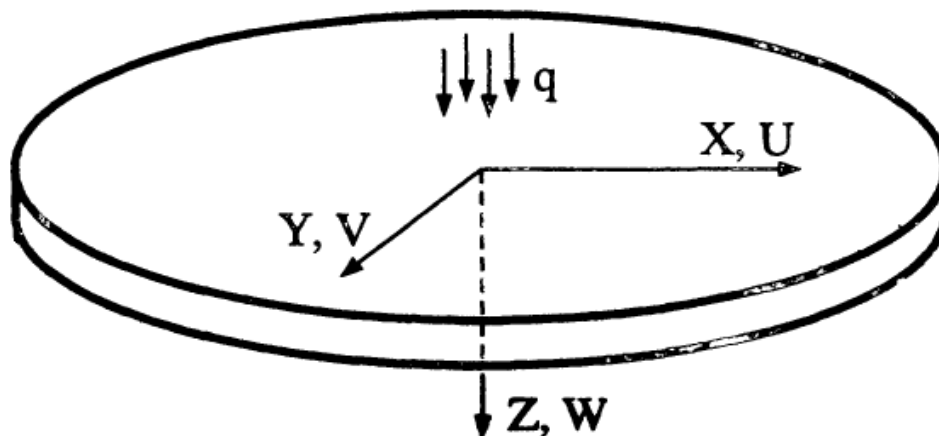
Μαθηματικό Προσομοίωμα

- Ίδια γεωμετρία με φορέα επίπεδης έντασης
- Στην επίπεδη ένταση το φορτίο είναι εντός του επιπέδου του φορέα



Μεμβρανική
λειτουργία

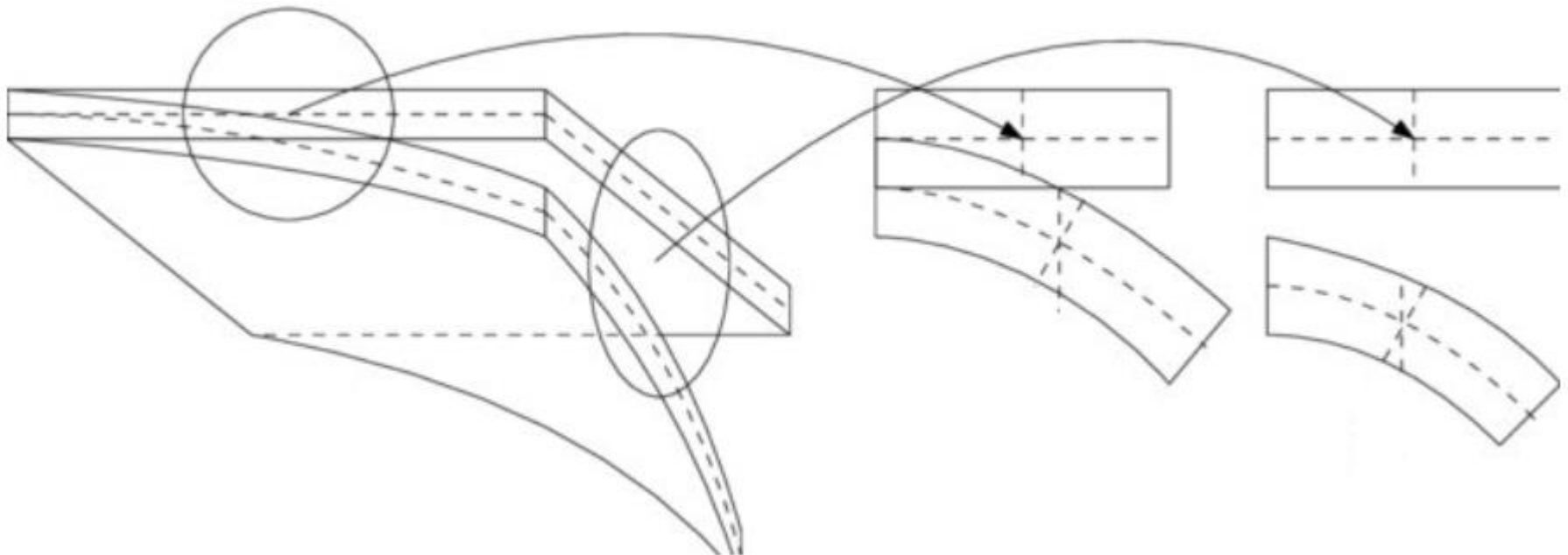
- Στην **πλάκα** το φορτίο είναι κάθετο στο επίπεδο του φορέα



Καμπτική
λειτουργία

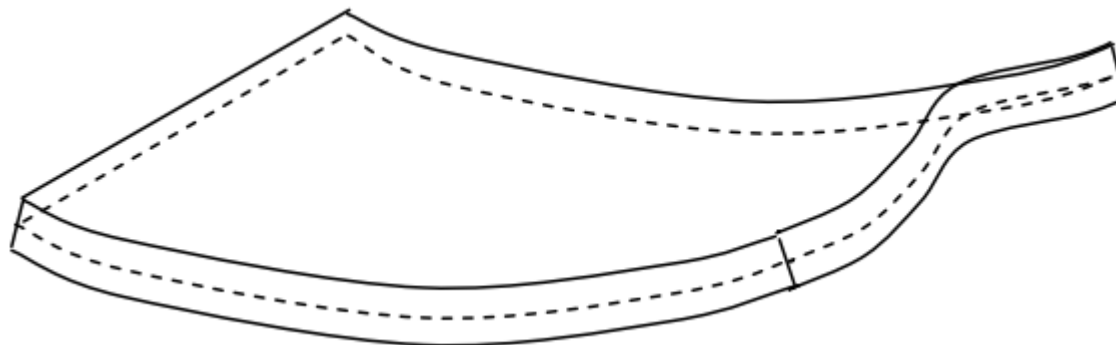
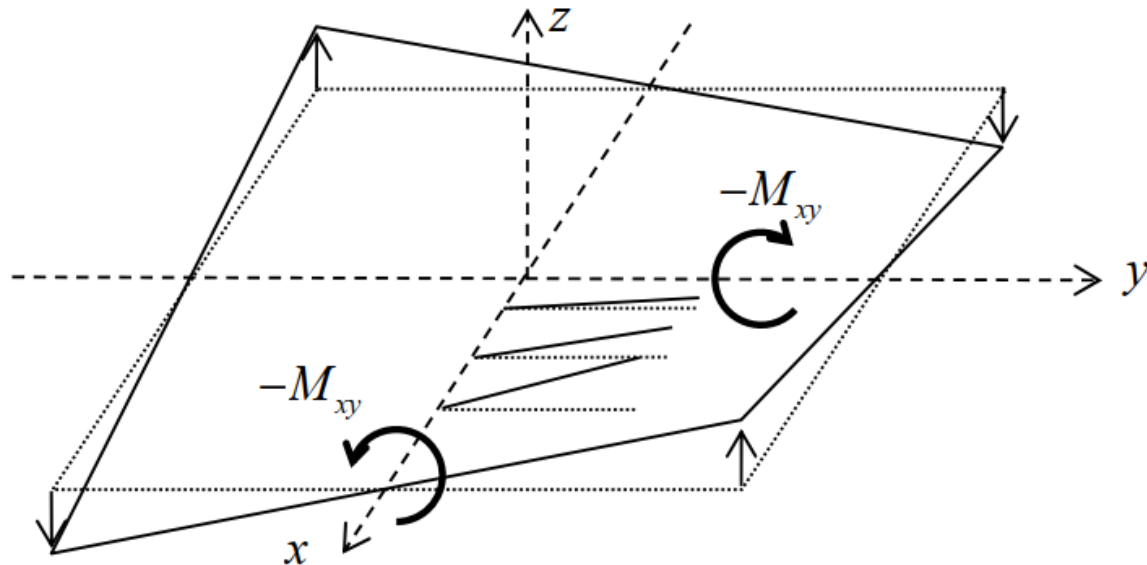
Παραμόρφωση πλάκας

- Κάμψη περί τους άξονες x, y



Παραμόρφωση πλάκας

- Στρέψη / συστροφή περί τους άξονες x, y



Θεωρίες πλακών

- Ξεκινώντας από τη θεωρία 3D ελαστικότητας γίνονται παραδοχές:
 - Απλοποίηση του προβλήματος
 - Μικρή μείωση ακρίβειας
- Πλάκες Kirchhoff αντιστοιχούν στις δοκούς Euler-Bernoulli
 - Μικρό πάχος πλάκας / κρέμαση δοκού
 - Αμελητέα διατμητική παραμόρφωση καθ' ύψος της διατομής
- Πλάκες Mindlin αντιστοιχούν στις δοκούς Timoshenko
 - Μεγάλο πάχος πλάκας / κρέμαση δοκού
 - Η διατμητική παραμόρφωση καθ' ύψος της διατομής λαμβάνεται υπόψη



Παραδοχές θεωρίας Kirchhoff

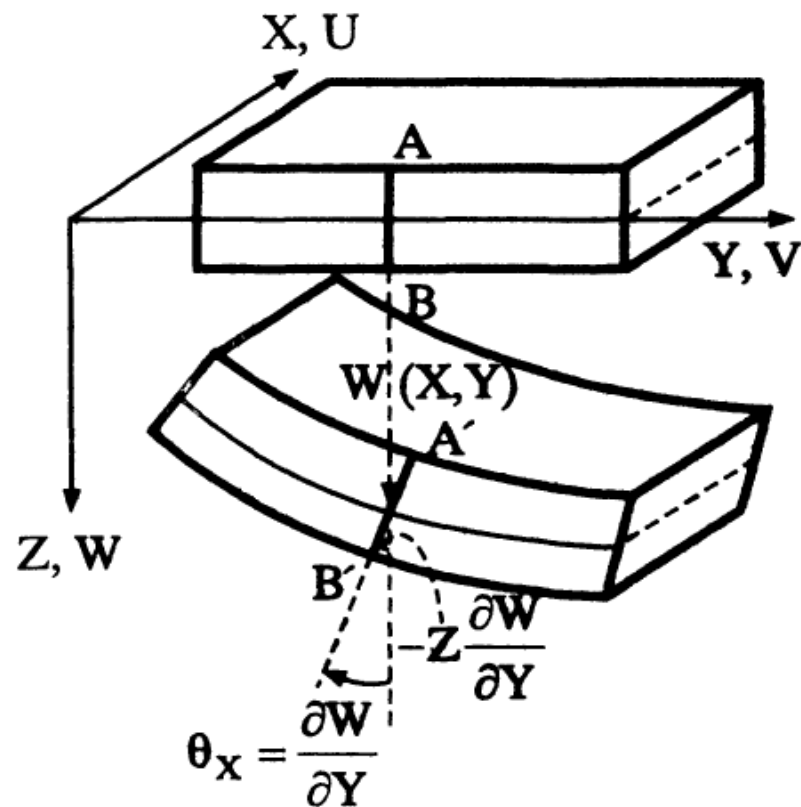
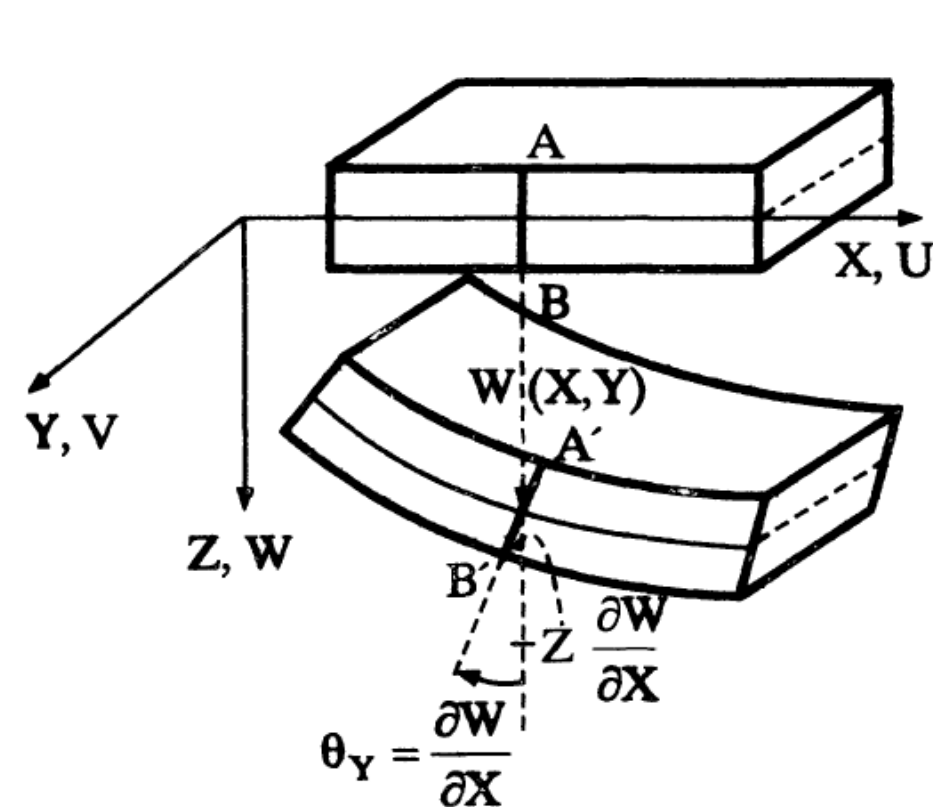
1. Το πάχος της πλάκας είναι πολύ μικρό σε σχέση με τις άλλες διαστάσεις στο επίπεδό της.
2. Η βύθιση της πλάκας (μετατόπιση κατά z) είναι πολύ μικρή σε σχέση με το πάχος της
3. Οι στροφές της παραμορφωμένης μέσης επιφάνειας είναι πολύ μικρές σε σχέση με τη μονάδα.
4. Επίπεδες επιφάνειες κάθετες στη μέση επιφάνεια πριν την παραμόρφωση, μετά την παραμόρφωση παραμένουν επίπεδες και κάθετες στη μέση επιφάνεια.
5. Στη μέση επιφάνεια ($z = 0$) οι τάσεις σ_x , σ_y , τ_{xy} γίνονται μηδενικές.

Μετατοπίσεις και στροφές

- Λόγω της παραδοχής 1, η κατακόρυφη μετατόπιση σε ένα επίπεδο κάθετο στη μέση επιφάνεια είναι σταθερή:

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

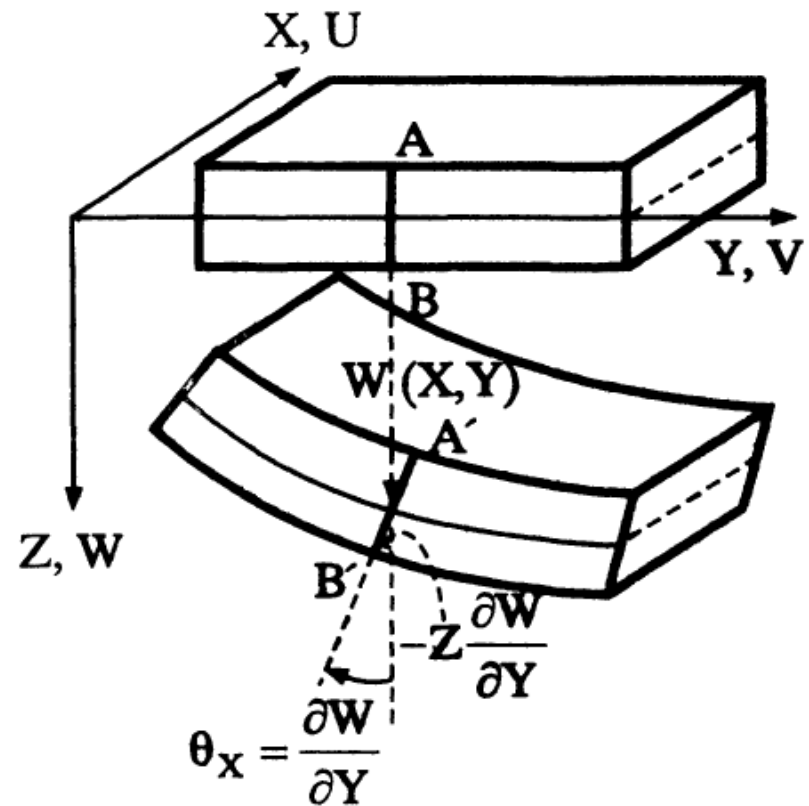
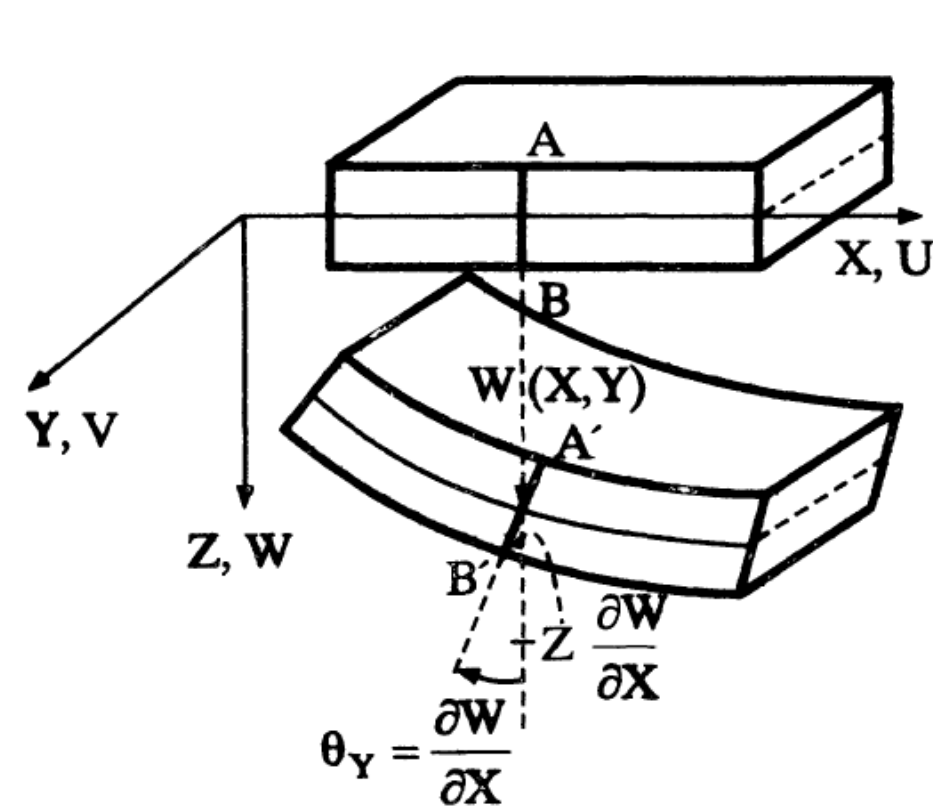
$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$$



Μετατοπίσεις και στροφές

- Λόγω της παραδοχής 4: $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ και $\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$
- $u(x, y, z) = -\theta_y z = -z \frac{\partial w}{\partial x} = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}$
- $v(x, y, z) = -\theta_x z = -z \frac{\partial w}{\partial y} = -z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}$

Μόνος
άγνωστος η
μετατόπιση w



Παραμορφώσεις

- Από γνωστή θεωρία ελαστικότητας (χωρίς παραδοχές)

❖ Ορθές παραμορφώσεις:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

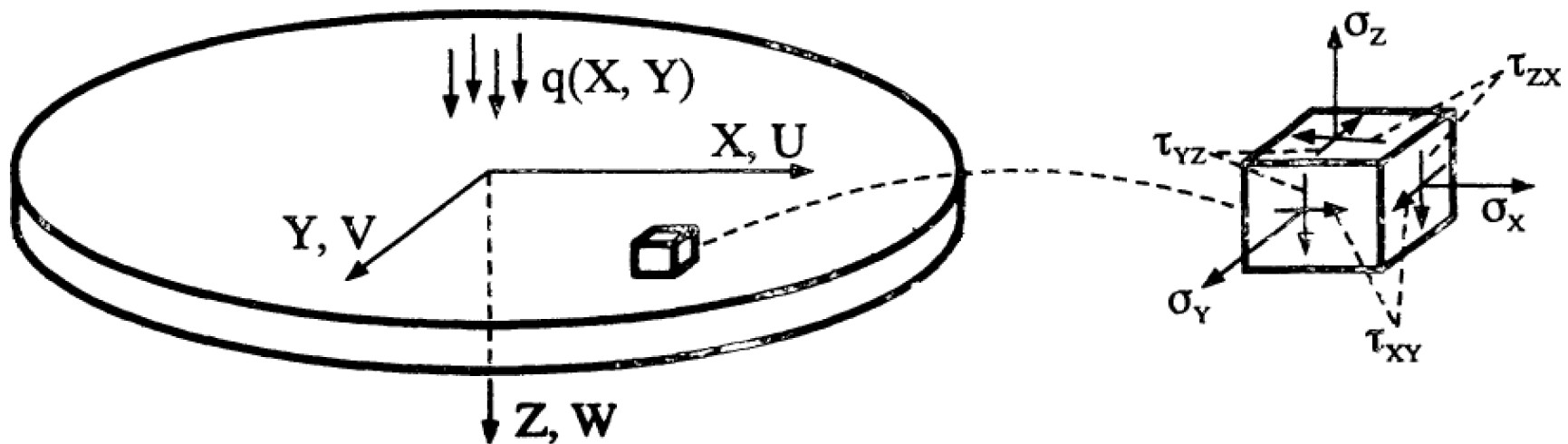
❖ Διατμητικές παραμορφώσεις:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

Τάσεις και καταστατικός νόμος



- 3D ελαστικότητα

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

Τάσεις και καταστατικός νόμος

- 3D ελαστικότητα

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

- Επειδή $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$



Τάσεις και καταστατικός νόμος

- Από

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

- Και

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- Προκύπτουν:

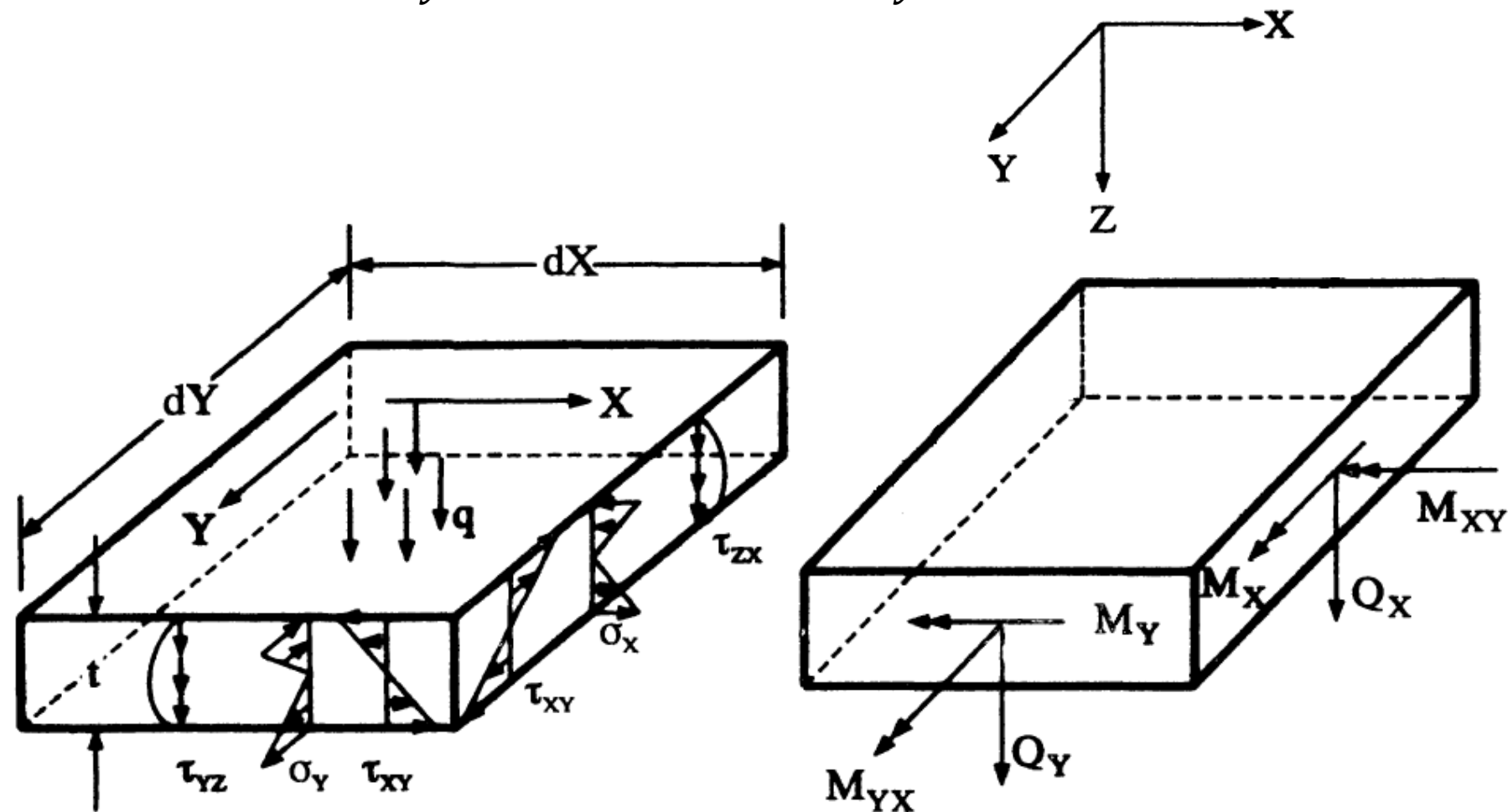
$$\sigma_x = \frac{-E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1-\nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{-E}{1+\nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

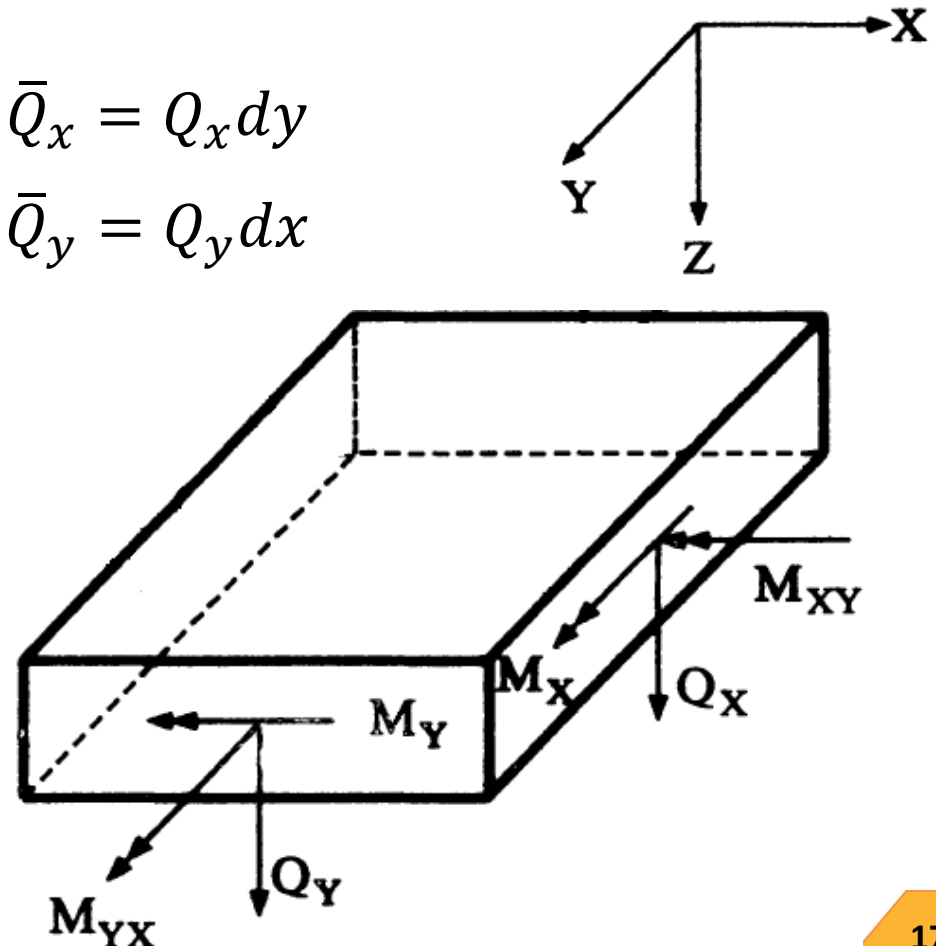
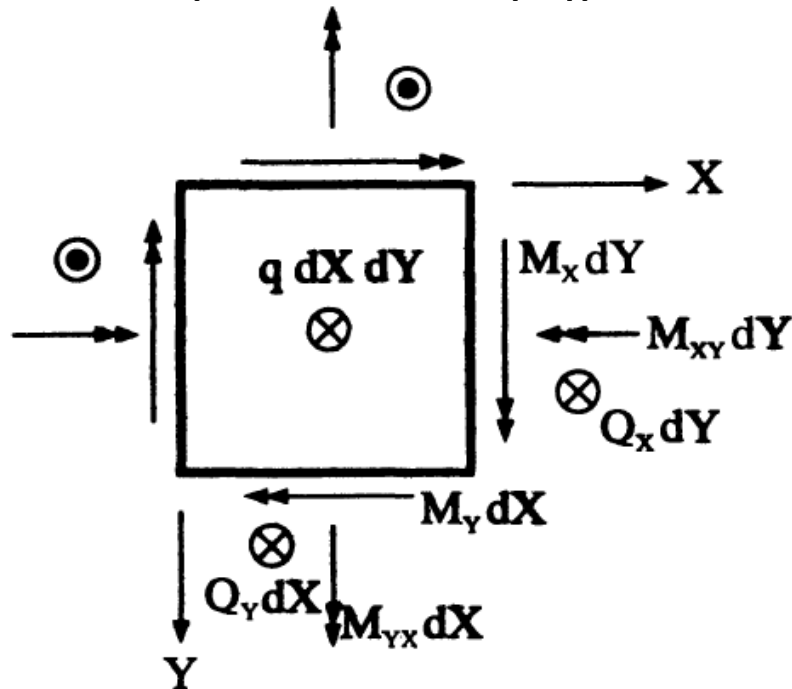
Εντατικά μεγέθη

- Η τέμνουσα Q_x προκύπτει από τις τ_{xz}
- Η τέμνουσα Q_y προκύπτει από τις τ_{yz}



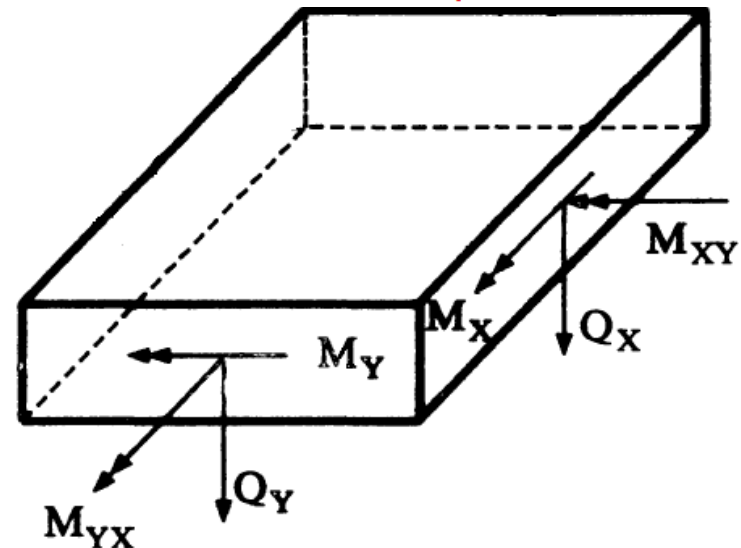
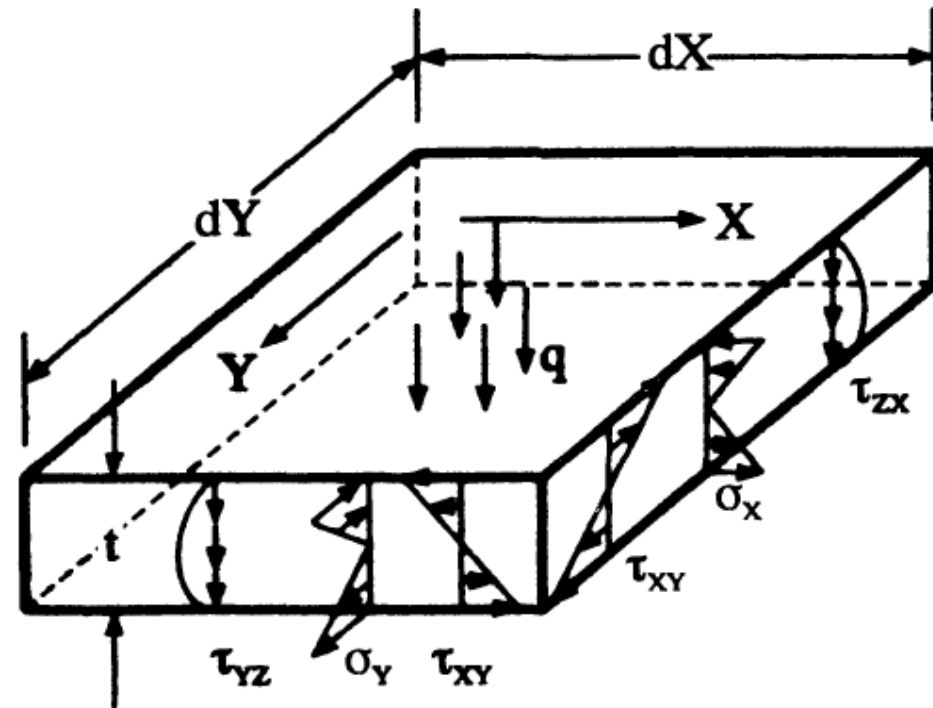
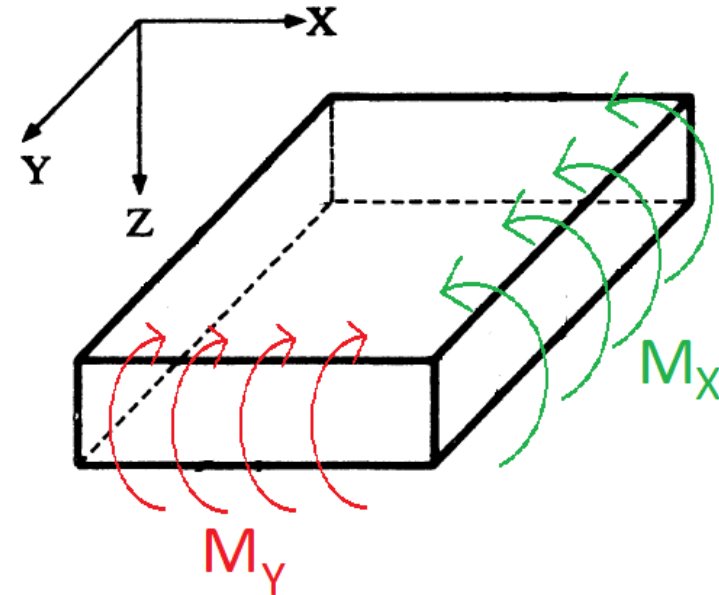
Εντατικά μεγέθη

- Οι Q_x και Q_y είναι τέμνουσες σε τμήματα $dy = 1$ και $dx = 1$ στις ακμές της πλάκας κάθετα στους άξονες x και y αντίστοιχα.
- Έχουν μονάδες N/m
- Η τέμνουσα σε τμήμα dy είναι $\bar{Q}_x = Q_x dy$
- Η τέμνουσα σε τμήμα dx είναι $\bar{Q}_y = Q_y dx$



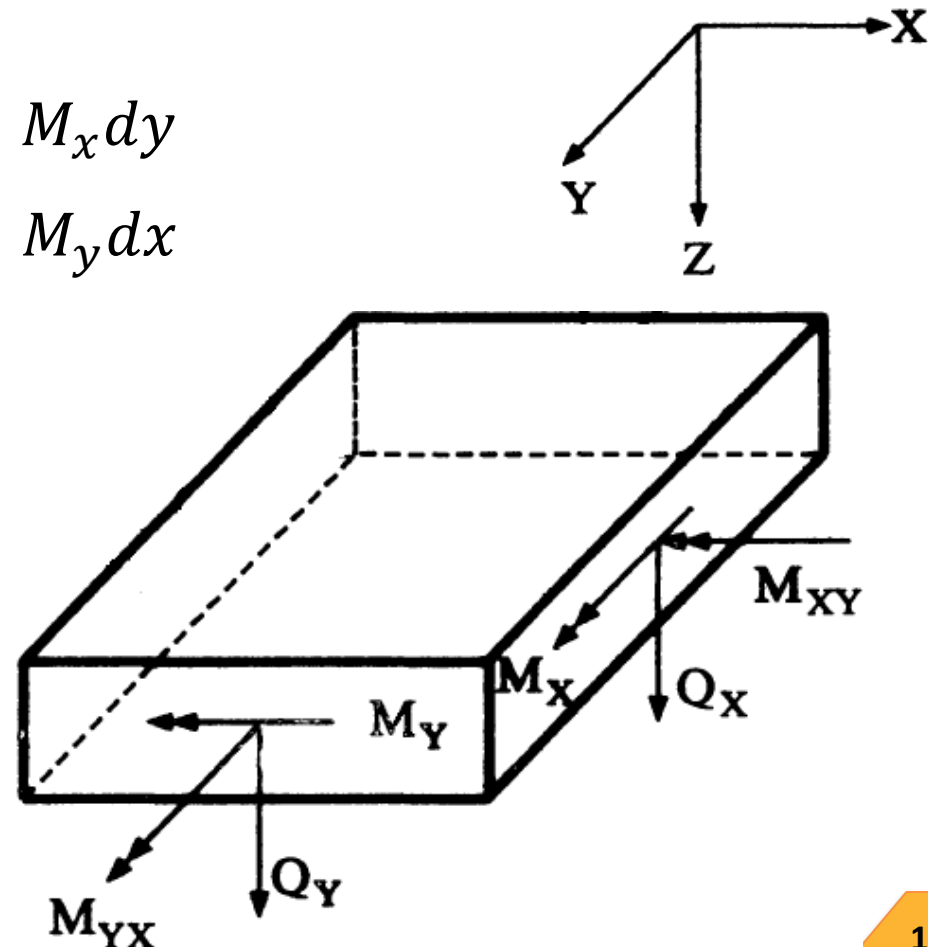
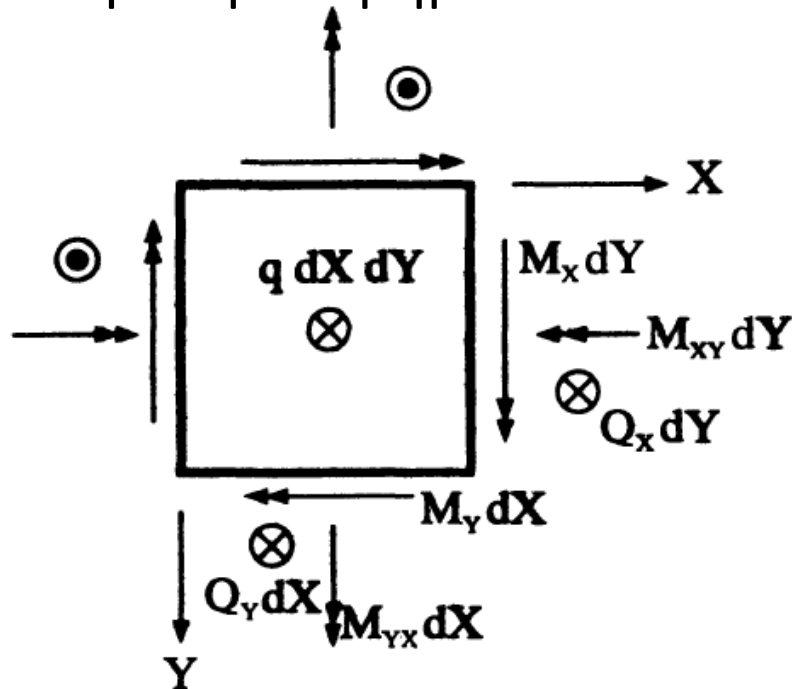
Εντατικά μεγέθη

- Η ροπή κάμψης M_x προκύπτει από τις σ_x
- Η ροπή κάμψης M_y προκύπτει από τις σ_y
- Διαφορετική σύμβαση από ότι στη θεωρία δοκών.



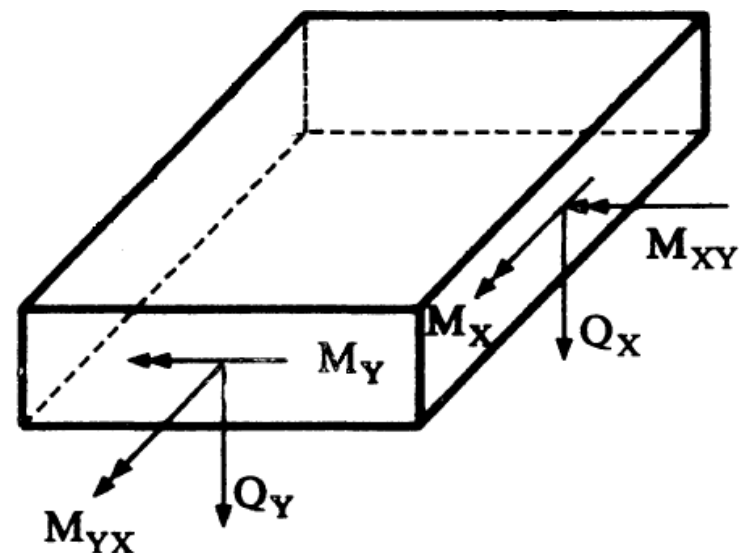
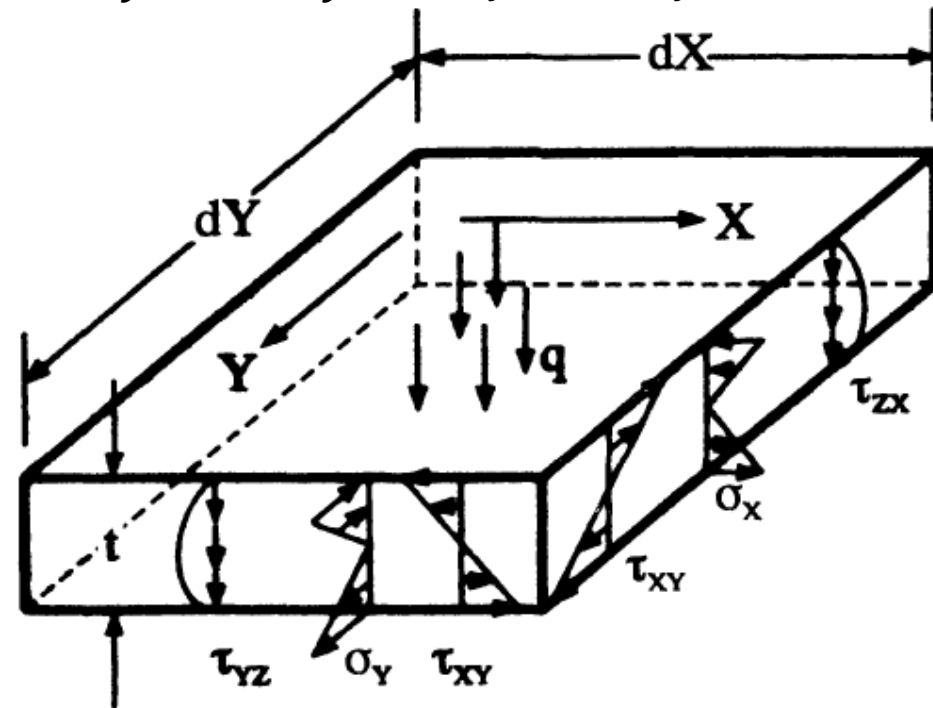
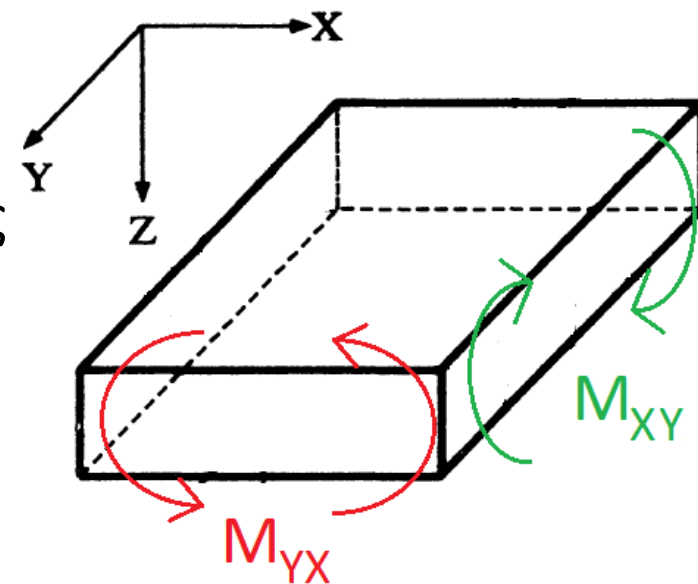
Εντατικά μεγέθη

- Οι M_x και M_y είναι ροπές σε τμήματα $dy = 1$ και $dx = 1$ στις ακμές της πλάκας κάθετα στους άξονες x και y αντίστοιχα.
- Έχουν μονάδες $\frac{Nm}{m} = N$
- Η ροπή σε τμήμα dy είναι $\bar{M}_x = M_x dy$
- Η ροπή σε τμήμα dx είναι $\bar{M}_y = M_y dx$



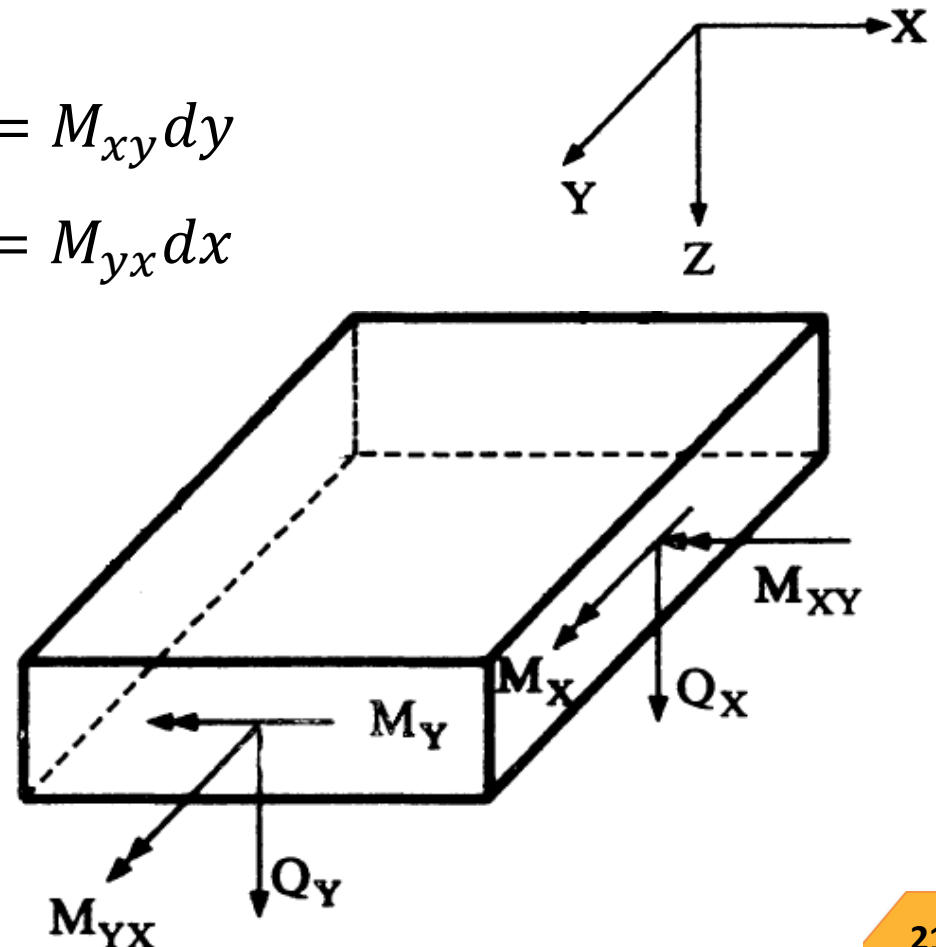
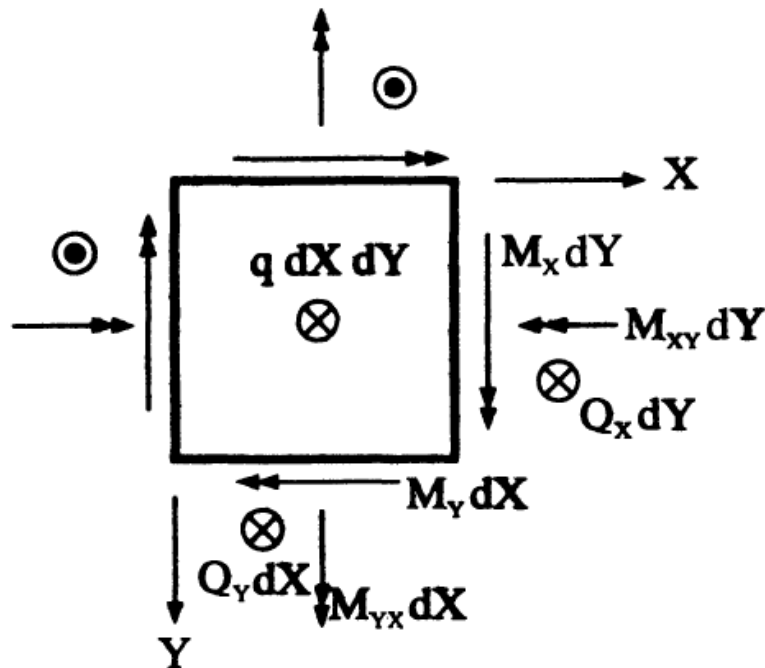
Εντατικά μεγέθη

- Η ροπή συστρώφής (twist) M_{xy} προκύπτει από τις τ_{xy} .
- Η ροπή συστρώφής M_{yx} προκύπτει από τις τ_{yx} .
- $\tau_{yx} = \tau_{xy} \Rightarrow M_{yx} = M_{xy}$



Εντατικά μεγέθη

- Οι M_{xy} και M_{yx} είναι ροπές σε τμήματα $dy = 1$ και $dx = 1$ στις ακμές της πλάκας κάθετα στους άξονες x και y αντίστοιχα.
- Έχουν μονάδες $\frac{Nm}{m} = N$
- Η ροπή σε τμήμα dy είναι $\bar{M}_{xy} = M_{xy}dy$
- Η ροπή σε τμήμα dx είναι $\bar{M}_{yx} = M_{yx}dx$

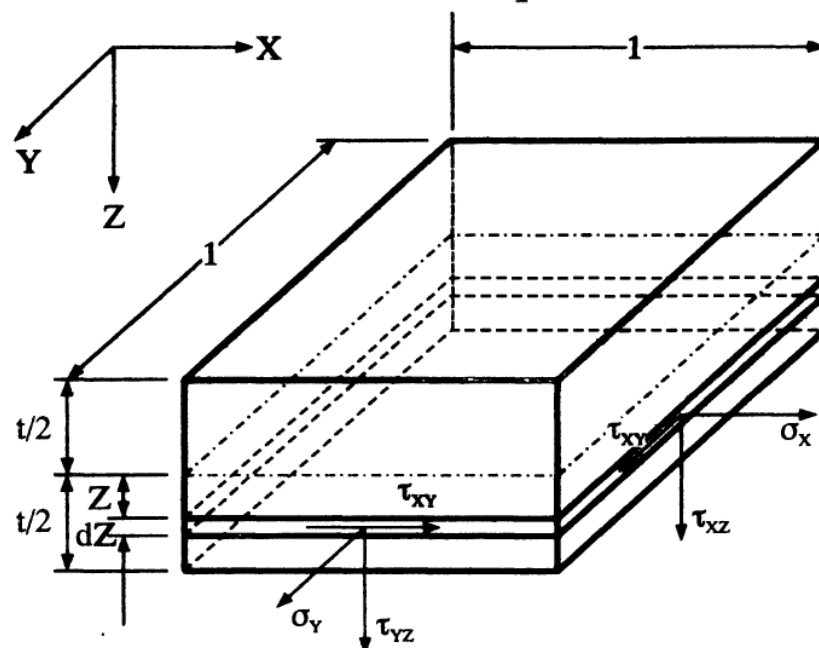
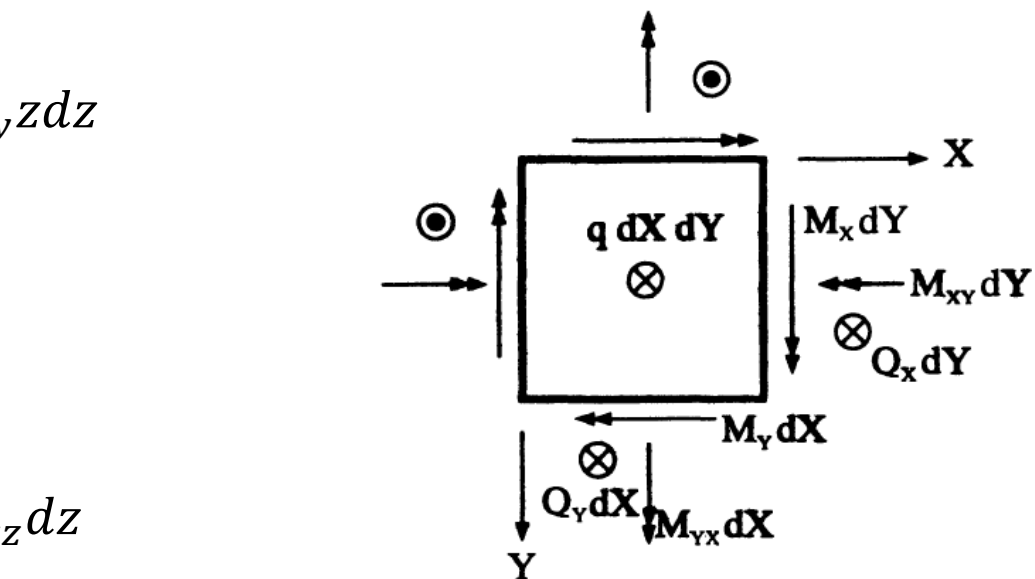
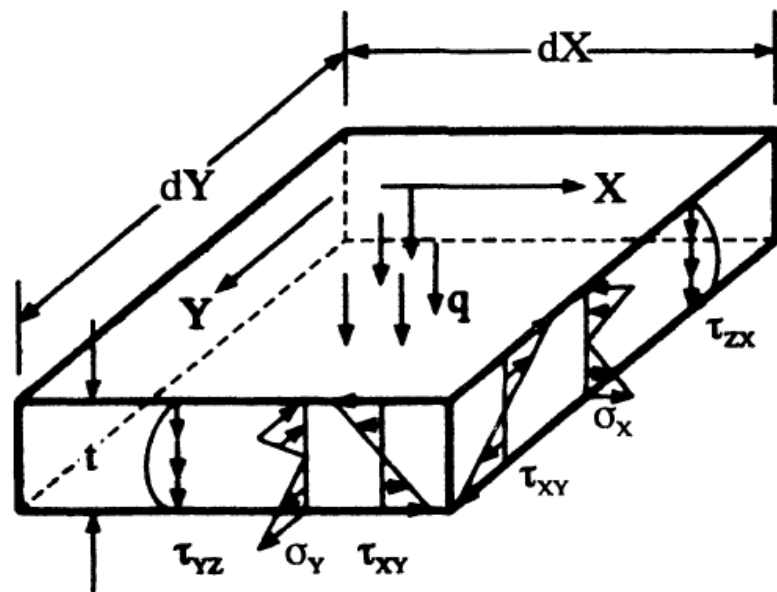


Εντατικά μεγέθη από τάσεις

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz \quad M_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz$$

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$



Σχέση ροπών-μετακινήσεων

- Προκύπτουν αντικαθιστώντας τις σχέσεις τάσεων-μετακινήσεων και εκτελώντας τις προηγούμενες ολοκληρώσεις

$$M_x = -D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D_k (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- Όπου

$$D_k = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \Rightarrow D_k = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

- Η ποσότητα D_k λέγεται καμπτική στιβαρότητα της πλάκας και αντιστοιχεί στην καμπτική στιβαρότητα EI της θεωρίας δοκού.

Σχέση ροπών-καμπυλοτήτων

- Καμπυλότητα περί τους άξονες x, y

$$\kappa_x = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta y^2}$$

- «Συστροφικότητα» περί τους άξονες x, y

$$\kappa_{xy} = \kappa_{yx} = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x \vartheta y}$$

- Ροπές

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D_\kappa \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix}$$

- Αν η καμπυλότητα κ_y είναι 0 (π.χ. λόγω συνοριακών συνθηκών), τότε μια λωρίδα πάχους $dy = 1$ συμπεριφέρεται σαν δοκός με $EI = D_\kappa$:

$$M_x = -D_\kappa \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2}$$

Υπολογισμός τεμνουσών

- Παράδοξο θεωρίας Kirchhoff: Οι τέμνουσες δεν μπορούν να υπολογιστούν από τις σχέσεις

$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz \quad Q_y = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz$$

γιατί $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$.

- Οι αντίστοιχες τέμνουσες Q_x , Q_y δεν είναι μηδενικές και είναι απαραίτητες για την ισορροπία.
- Θα υπολογιστούν από τις εξισώσεις ισορροπίας στο στοιχειώδες τμήμα $dx \times dy$.

Εξισώσεις ισορροπίας

- Λόγω των παραδοχών 2 και 3, μπορούμε να εκφράσουμε τις εξισώσεις ισορροπίας στην απαραμόρφωτη γεωμετρία

$$Q_x^+ = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$$

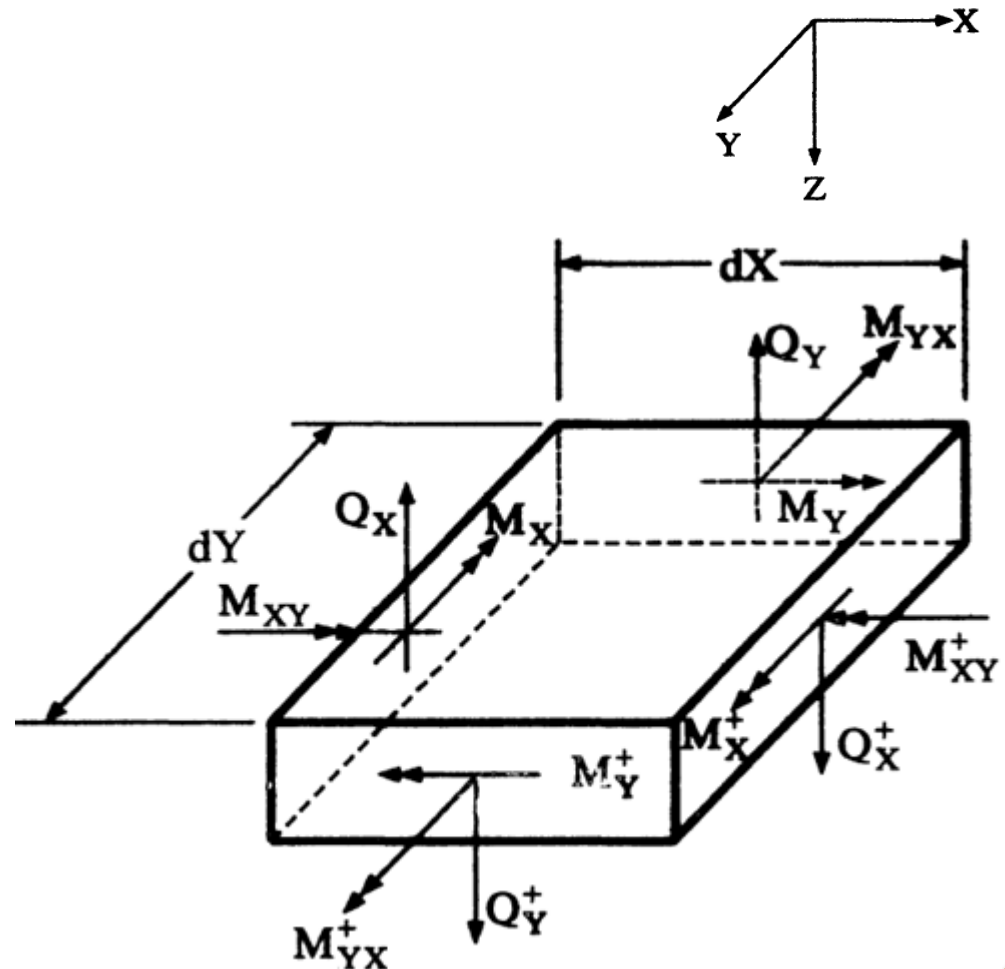
$$Q_y^+ = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$

$$M_x^+ = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

$$M_y^+ = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

$$M_{xy}^+ = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

$$M_{yx}^+ = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$$



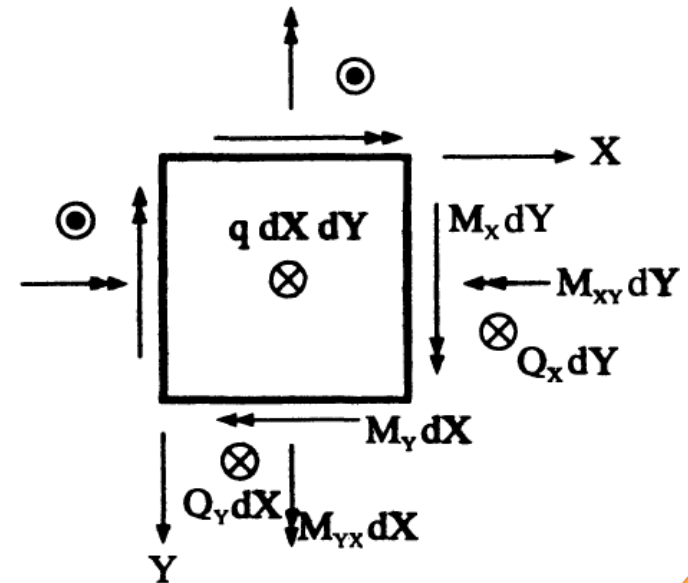
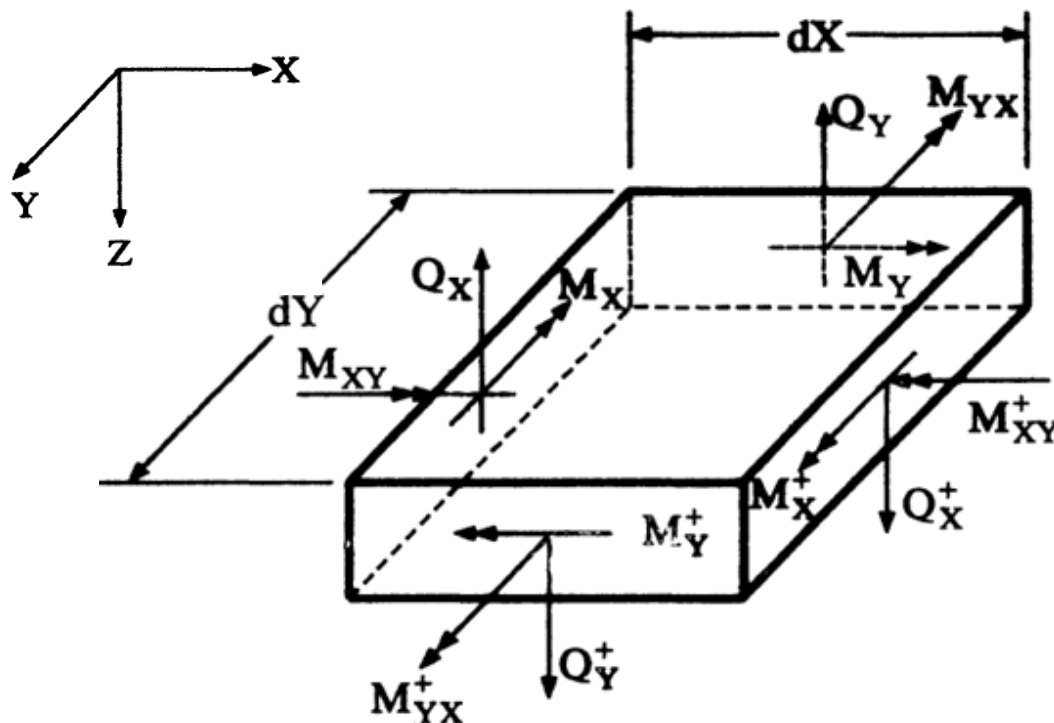
Εξισώσεις Ισορροπίας

- Ισορροπία ροπών περί τον άξονα y ως προς την ακμή $x + dx$:

$$M_x^+ dy - M_x dy + M_{yx}^+ dx - M_{yx} dx - Q_x dy \cdot dx + q dx dy \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} Q_x^+ &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \\ M_x^+ &= M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \\ M_{yx}^+ &= M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy \end{aligned}$$



Εξισώσεις Ισορροπίας

- Ισορροπία ροπών περί τον άξονα y ως προς την ακμή $x + dx$:

$$M_x^+ dy - M_x dy + M_{yx}^+ dx - M_{yx} dx - Q_x dy \cdot dx + q dx dy \cdot \frac{dx}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy dx - Q_x dy dx + q \frac{dx^2}{2} dy = 0$$

$$\Rightarrow Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{q dx}{2}$$

- Καθώς $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \frac{q dx}{2} = 0$$

$$M_x^+ = M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx$$

$$M_{yx}^+ = M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy$$

- Και τελικά

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

- Ισορροπία ροπών περί τον άξονα x ως προς την ακμή $y + dy$:

$$-M_y^+ dx + M_y dx - M_{xy}^+ dy + M_{xy} dy +$$

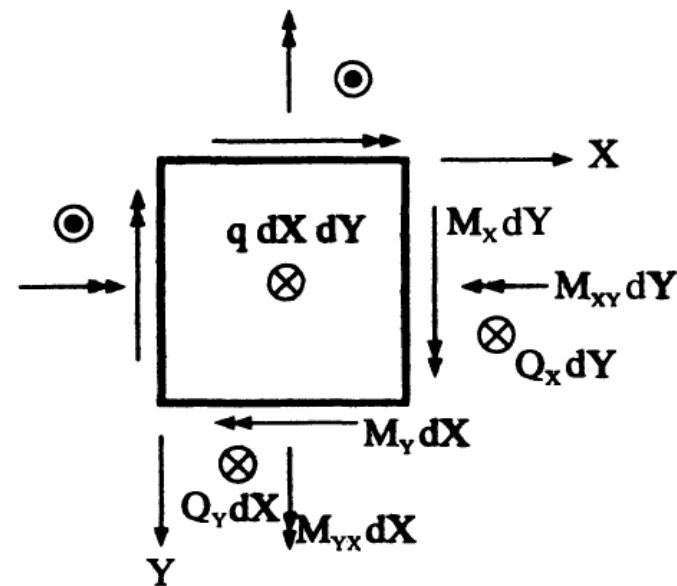
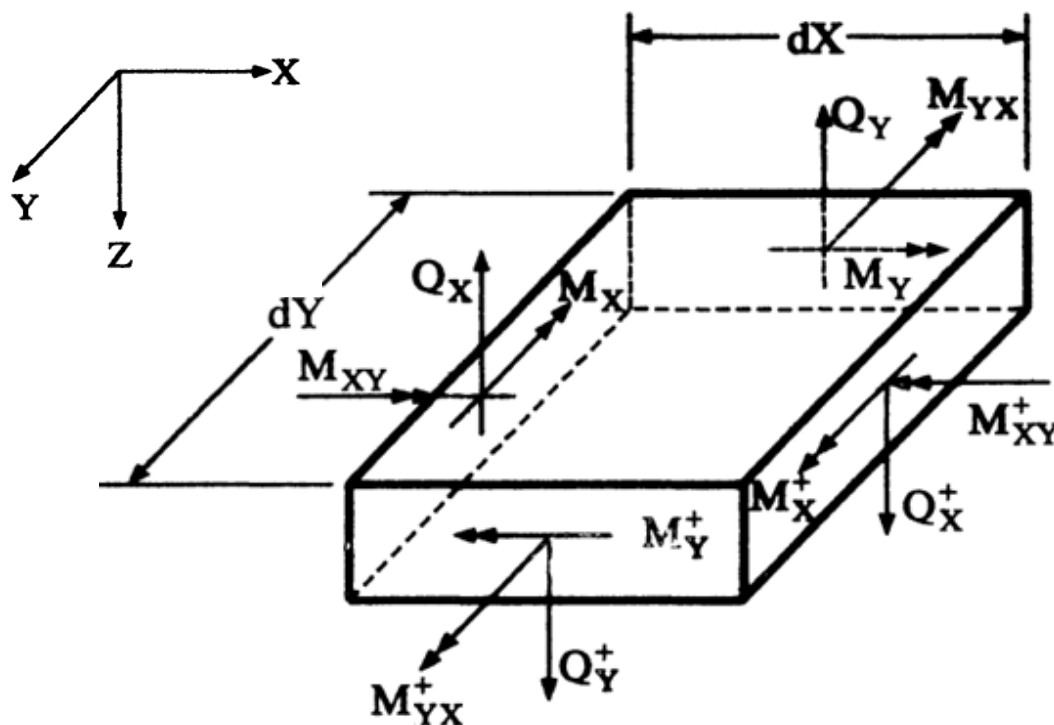
$$+ Q_y dx \cdot dy - q dx dy \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

$$Q_y^+ = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$

$$M_y^+ = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

$$M_{xy}^+ = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$



Εξισώσεις Ισορροπίας

- Ισορροπία ροπών περί τον άξονα x ως προς την ακμή $y + dy$:

$$-M_y^+ dx + M_y dx - M_{xy}^+ dy + M_{xy} dy + Q_y dx \cdot dy - q dx dy \cdot \frac{dy}{2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial M_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx dy + Q_y dx dy - q dx \frac{dy^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - q \frac{dy}{2}$$

- Καθώς $dx \rightarrow 0, dy \rightarrow 0$:

$$\lim_{\substack{dx \rightarrow 0 \\ dy \rightarrow 0}} \frac{q dy}{2} = 0$$

$$M_y^+ = M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy$$

$$M_{xy}^+ = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx$$

- Και τελικά

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Εξισώσεις Ισορροπίας

- Ισορροπία δυνάμεων στον άξονα z:

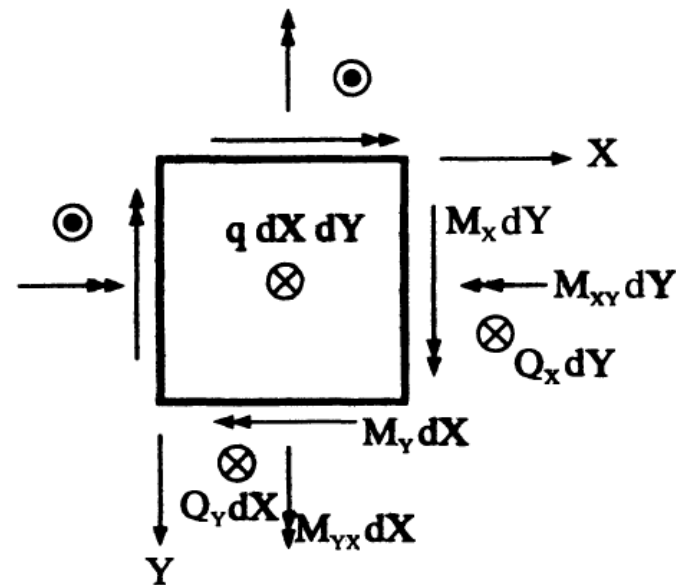
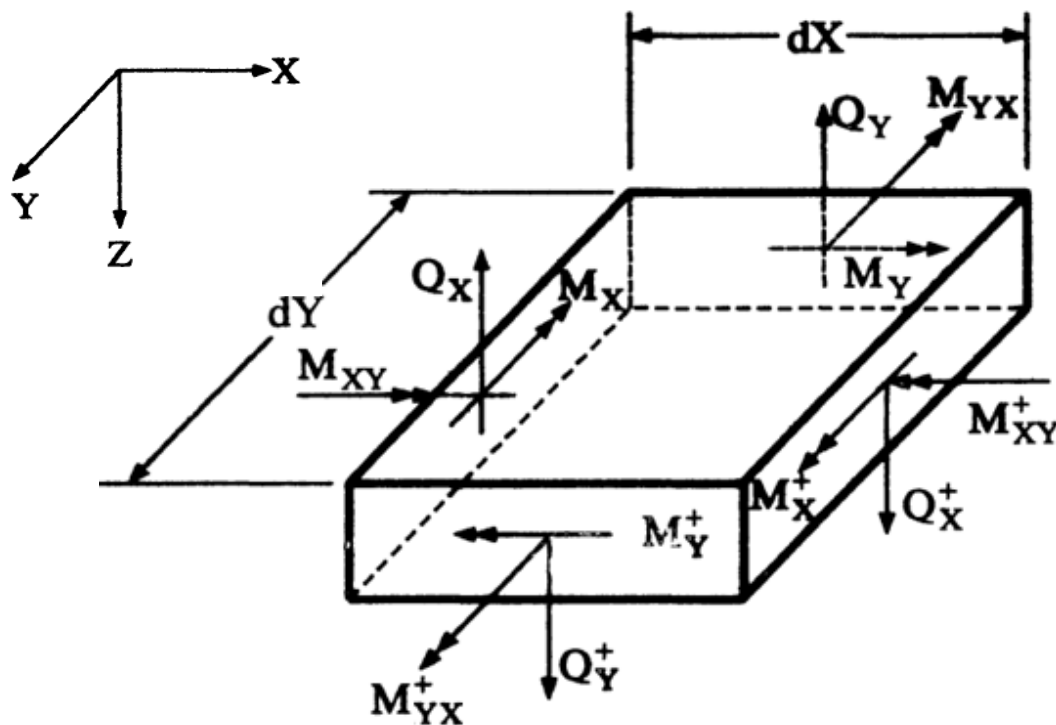
$$q \cdot dxdy + Q_x^+ dy - Q_x dy + Q_y^+ dx - Q_y dx = 0$$

$$\Rightarrow q \cdot dxdy + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dxdy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dydx = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

$$Q_x^+ = Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$$

$$Q_y^+ = Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$$



Διαφορική εξίσωση πλάκας

Αντικαθιστώντας στην

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q$$

τις

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$
$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}$$

παίρνουμε

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} = -q$$

και από τις σχέσεις ροπών-μετακινήσεων παίρνουμε τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D_\kappa}$$

Διαφορική εξίσωση πλάκας

- Η διαφορική εξίσωση της πλάκας είναι 4^{ης} τάξης:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D_k}$$

- Ομοίως και η διαφορική εξίσωση της δοκού στη θεωρία Euler-Bernoulli

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q_z(x)}{EI}$$

- Αντίθετα οι διαφορικές εξισώσεις στην 3D ελαστικότητα και στις καταστάσεις επίδεξης έντασης ή παραμόρφωσης είναι 2^{ης} τάξης.
- Φαίνεται και πάλι η αντιστοιχία καμπτικής στιβαρότητας πλάκας-δοκού D_k - EI .

Θεωρία λεπτών πλακών vs 3Δ ελαστικότητα

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D_\kappa}$$

Μια ΜΔΕ για το βαθμωτό πεδίο $w(x, y)$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

Παράμετροι *Lame*

$$\mu = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

Σύστημα 3 ΜΔΕ για το άγνωστο διανυσματικό πεδίο των μετατοπίσεων $\vec{u}(x, y, z)$



$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + F_x = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + F_y = 0 \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + F_z = 0 \end{array} \right.$$