

Τυπολόγιο

Τριγωνομετρικές ιδιότητες

$$\cos(-x) = \cos x \text{ (συμμετρική)}$$

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ (αντίσυμμετρική)}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos(n\pi) = (-1)^n, \quad \forall n$$

$$\sin(n\pi) = 0, \quad \forall n$$

$$\sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}, \quad n = 1, 3, \dots$$

Υπερβολικές συναρτήσεις

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \sinh(-x) = -\sinh x \text{ (αντισυμμετρική)}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \cosh(-x) = \cosh x \text{ (συμμετρική)}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \tanh(-x) = -\tanh x \text{ (αντισυμμετρική)}$$

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \coth(-x) = -\coth x \text{ (αντισυμμετρική)}$$

$$\sinh(0) = 0$$

$$\cosh(0) = 1$$

Παράγωγοι και όρια

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad n \neq 1$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \sinh x \text{ (προσοχή στο πρόσημο)}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0, \text{ κτλ}$$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} \quad \text{ή} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(f(kx))' = k \cdot f'(kx)$$

Αόριστα ολοκληρώματα

$$\int k dx = kx + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln|x| + c$$

$$\int \sin x = -\cos x + c$$

$$\int \cos x = \sin x + c$$

$$\int \sinh x = \cosh x + c$$

$$\int \cosh x = \sinh x + c$$

$$\int f'(k \cdot x) dx = \frac{1}{k} \cdot f(k \cdot x) + c$$

$$\text{Αν } F'(x) = f(x) \text{ τότε } \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = [F(x)]_{x_1}^{x_2} = F(x_2) - F(x_1)$$

Παραγοντική ολοκλήρωση

Έστω ότι ψάχνω το

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx$$

Βρίσκω $G(x)$ έτσι ώστε $G'(x) = g(x)$. Έπειτα

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)G'(x)dx = [f(x)G(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} f'(x)G(x)dx$$

Χρήσιμο αν η $g(x)$ δεν αλλάζει με παραγωγή (οκ αν δημιουργεί σταθερούς όρους), ενώ η $f(x)$ απλοποιείται με παραγωγή. Π.χ.

- $g(x)$ εκθετική, ημίτονο, συνημίτονο, υπερβολική
- $f(x)$ πολυώνυμο

Αλλαγή μεταβλητής

Έστω ότι ψάχνω το

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Σε κάποιες περιπτώσεις βολεύει η αντικατάσταση $x = g(u)$, όπου η g^{-1} είναι εύκολο να βρεθεί.

Νέο διαφορικό: $dx = g'(u)du$

Νέα όρια ολοκλήρωσης:

$$x_1 = g(u_1) \Rightarrow u_1 = g^{-1}(x_1)$$

$$x_2 = g(u_2) \Rightarrow u_2 = g^{-1}(x_2)$$

Τελικά

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{u_1}^{u_2} f(g(u))g'(u)du$$

Συνάρτηση Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1 \quad \int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & a \leq 0 \leq b \\ 0, & 0 < a \text{ ή } 0 > b \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1 \quad \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1, & x_0 \in [a, b] \\ 0, & x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad \int_a^b \delta(x - x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in [a, b] \\ 0, & x_0 \notin [a, b] \end{cases}$$

$$\delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \delta^{(2)}(x - x_0, y - y_0) f(x, y) dx dy = \begin{cases} f(x_0, y_0), & x_0 \in [x_1, x_2] \text{ και } y_0 \in [y_1, y_2] \\ 0, & x_0 \notin [x_1, x_2] \text{ ή } y_0 \notin [y_1, y_2] \end{cases}$$

Γενικές σειρές Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x$$

Σχέσεις ορθογωνικότητας

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \cos \frac{2\pi n' x}{L} dx = 0, \forall n, n'$$

$$\int_0^L \cos \frac{2\pi n x}{L} \cos \frac{2\pi n' x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}$$

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \sin \frac{2\pi n' x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}$$

$$\text{όπου } \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = n' \\ 0, & \text{αν } n \neq n' \end{cases}$$

Ημιτονοειδείς σειρές Fourier (για περιττές συναρτήσεις)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x$$

Σχέσεις ορθογωνικότητας

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \sin \frac{2\pi n' x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}, \quad \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = n' \\ 0, & \text{αν } n \neq n' \end{cases}$$

Υπολογισμός συντελεστών

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Διπλές ημιτονοειδείς σειρές Fourier

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

Σχέσεις ορθογωνικότητας

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx = \frac{a}{2} \delta_{mm'} \quad \delta_{mm'} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu m = m' \\ 0, & \alpha\nu m \neq m' \end{cases}$$

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \delta_{nn'} \quad \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, & \alpha\nu n = n' \\ 0, & \alpha\nu n \neq n' \end{cases}$$

Υπολογισμός συντελεστών

$$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Σχέση συντελεστών 2 όμοιων σειρών Fourier

Αν

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

και

$$\gamma \cdot f(x, y) = \delta \cdot g(x, y)$$

τότε

$$\gamma \cdot f_{mn} = \delta \cdot g_{mn}$$