

Άσκηση 1

Να εξαχθεί η συνήθης δ.ε. στη σελίδα 11, μαθήματος 4:

$$\frac{d^4 l_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 l_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 l_m = \frac{q_m(y)}{D}$$

αντικαθιστώντας τη μερική λύση της μεθόδου Levy

$$w_p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} l_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

και το φορτίο

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

στην μη ομογενή μερική δ.ε.

$$\nabla^4 w_p = \frac{q}{D}$$

Άσκηση 2

Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$k_m(y) = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}}$$

επαληθεύει την ομογενή συνήθη δ.ε.

$$\frac{d^4 k_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2 k_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 k_m = 0$$

(σελίδα 15, μάθημα 4)

Άσκηση 3

Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$k_m(y) = A'_m e^{\frac{m\pi y}{a}} + B'_m e^{-\frac{m\pi y}{a}} + C'_m y e^{\frac{m\pi y}{a}} + D'_m y e^{-\frac{m\pi y}{a}}$$

μπορεί να γραφτεί ως

$$k_m = A_m \sinh \frac{m\pi y}{a} + B_m \cosh \frac{m\pi y}{a} + C_m y \sinh \frac{m\pi y}{a} + D_m y \cosh \frac{m\pi y}{a}$$

όπου οι συντελεστές $A_m - A'_m, B_m - B'_m, \dots$ είναι διαφορετικοί αλλά σχετίζονται.

(σελίδα 16, μάθημα 4)

Άσκηση 4

Να εξαχθούν οι συναρτήσεις $q_m(y)$ για τις εξής περιπτώσεις φορτίων (σελίδες 20-23 μαθήματος 4)

- Ομοιόμορφο φορτίο $q(x, y) = q_0$
- Υδροστατικό φορτίο $q(x, y) = q_0 \frac{x}{a}$
- Συγκεντρωμένο φορτίο Q_0 στη θέση (x_0, y_0)
- Γραμμικό φορτίο $q(x, y) = q_0 \delta(x - x_0), x_0 \in (0, a)$