



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 14: Προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης πλακών (μέρος Γ)

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

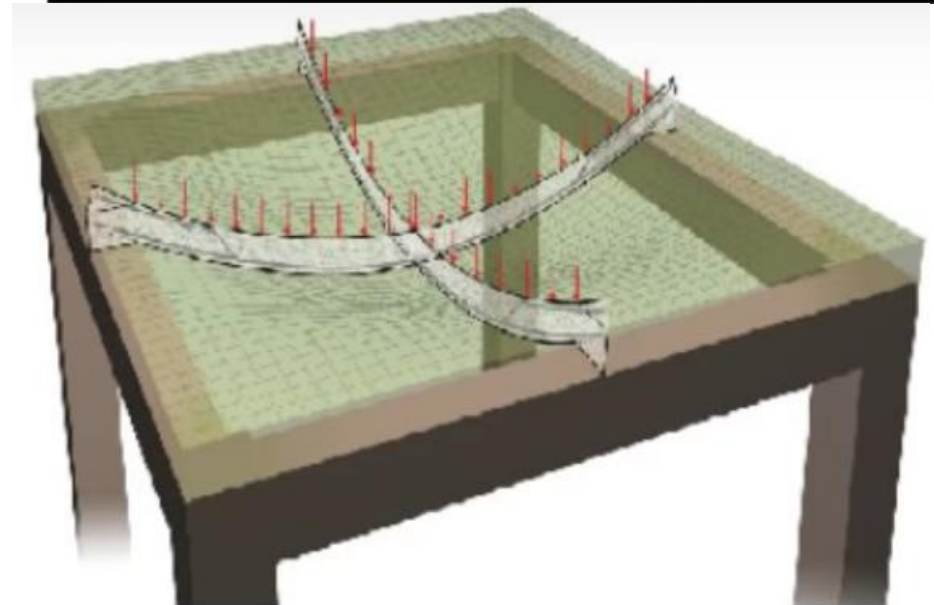
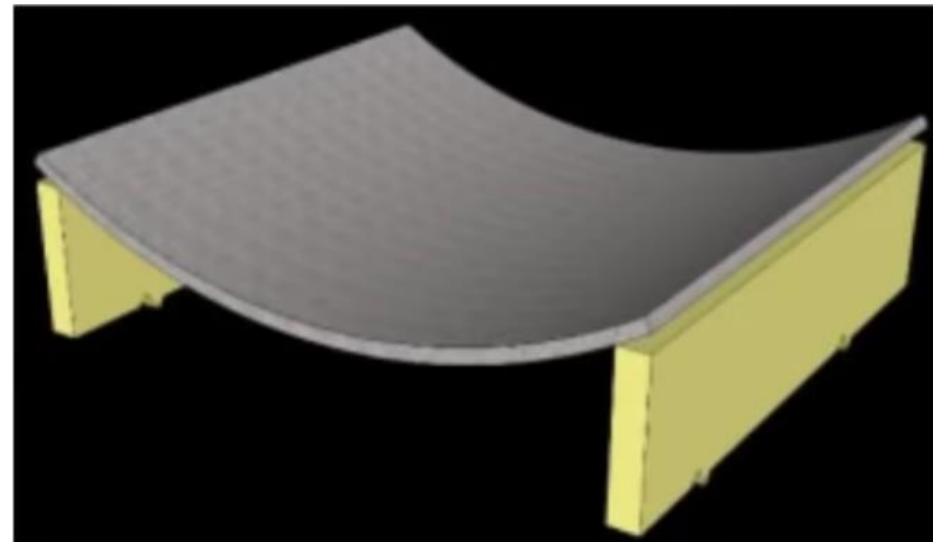


Διάκριση πλακών

- Πλάκες που κάμπτονται σε 2 διευθύνσεις
 - Τετραέρειστες πλάκες όπου

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} \leq 2$$
- Πλάκες που κάμπτονται σε 1 διεύθυνση
 - Πρόβολοι
 - Αμφιέρειστες πλάκες
 - Τετραέρειστες πλάκες όπου

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} > 2$$
 - Η κάμψη γίνεται στη διεύθυνση του L_{min}
 - Αναλύονται ως δοκοί με
 - Πλάτος 1m
 - Κρέμαση όσο το πάχος της πλάκας



Πλάκες καμπτόμενες σε 1 διεύθυνση

- Αναλύονται ως δοκοί με
 - Πλάτος 1m
 - Κρέμαση όσο το πάχος της πλάκας

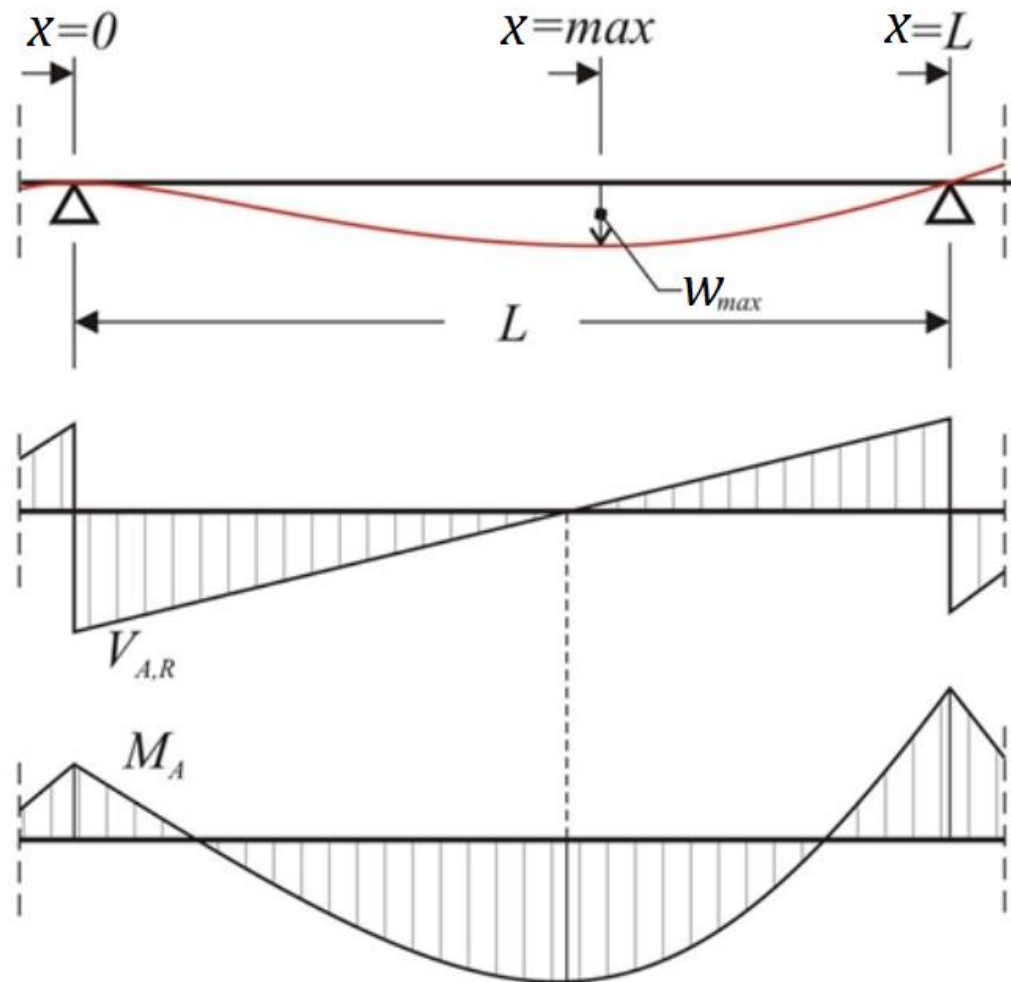
- Διαφορική εξίσωση δοκού

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

- Εντατικά μεγέθη δοκού

$$M(x) = -EI \frac{d^2 w}{dx^2}$$

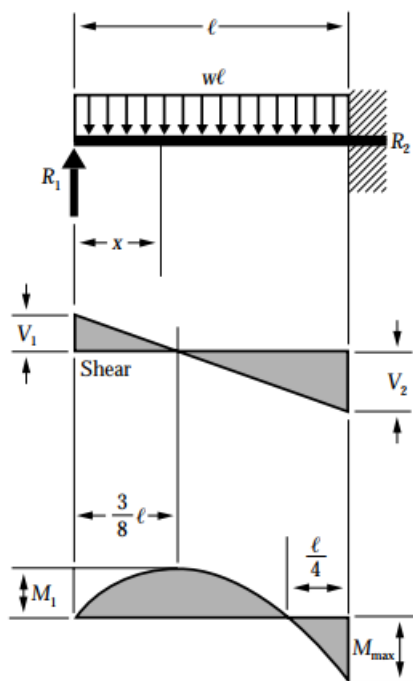
$$V(x) = -EI \frac{d^3 w}{dx^3}$$



Πλάκες καμπτόμενες σε 1 διεύθυνση

- Για να υπολογίσουμε τη βύθιση, τα εντατικά μεγέθη και τις αντιδράσεις στις στηρίξεις:
 - Εφαρμόζουμε μεθόδους στατικής
 - Χρησιμοποιούμε έτοιμα αποτελέσματα (που έχουν βγει από μεθόδους στατικής)

Figure 15 Beam Fixed at One End, Supported at Other – Uniformly Distributed Load

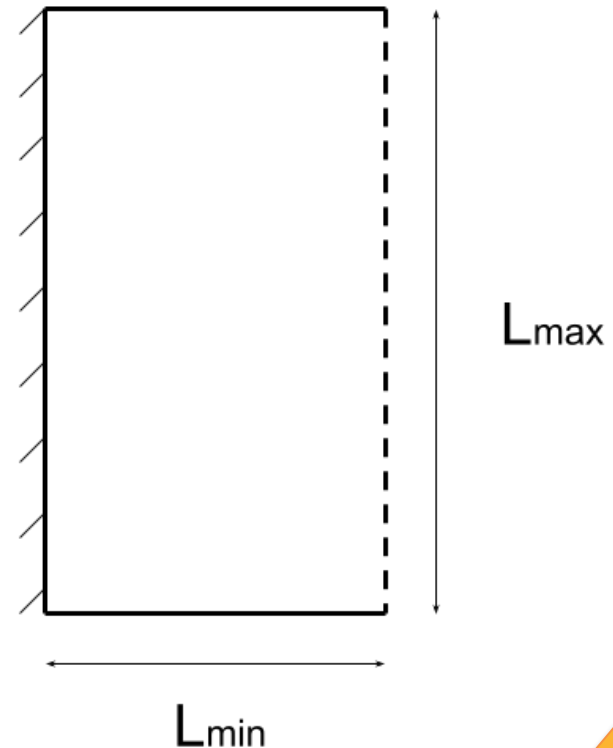


$$\begin{aligned}
 R_1 = V_1 & \dots \dots \dots = \frac{3w\ell}{8} \\
 R_2 = V_2 & \dots \dots \dots = \frac{5w\ell}{8} \\
 V_x & \dots \dots \dots = R_1 - wx \\
 M_{\max} & \dots \dots \dots = \frac{w\ell^2}{8} \\
 M_1 \left(\text{at } x = \frac{3}{8} \ell \right) & \dots \dots \dots = \frac{9}{128} w\ell^2 \\
 M_x & \dots \dots \dots = R_1 x - \frac{wx^2}{2} \\
 \Delta_{\max} \left(\text{at } x = \frac{\ell}{16} (1 + \sqrt{33}) = .4215 \ell \right) & \dots \dots \dots = \frac{w\ell^4}{185EI} \\
 \Delta_x & \dots \dots \dots = \frac{wx}{48EI} (\ell^3 - 3\ell x^2 + 2x^3)
 \end{aligned}$$

- Π.χ. για μονόπακτη δοκό
- Αντίστοιχα αποτελέσματα δίνονται για πολλές συνηθισμένες περιπτώσεις.

Πρόβολοι

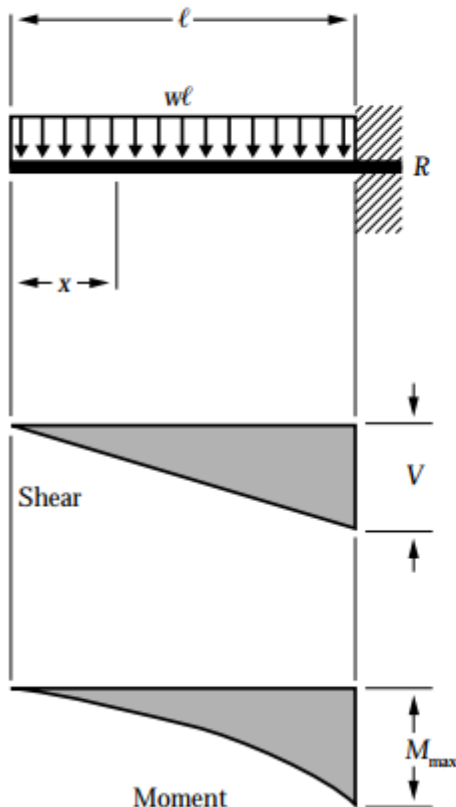
- Ειδική περίπτωση πλακών καμπτόμενων σε 1 διεύθυνση
- Μια πλάκα συμπεριφέρεται ως πρόβολος επειδή
 - Είναι πακτωμένη σε 1 μόνο παρειά και ελεύθερη στις άλλες 3
 - Είναι τριέρειστη, αλλά $\frac{L_{max}}{L_{min}} > 2$ και L_{min} είναι η διάσταση στον άξονα που τέμνει την ελεύθερη παρειά



Πρόβολοι

- Αναλύονται και πάλι ως δοκοί με
 - Πλάτος 1m
 - Κρέμαση όσο το πάχος της πλάκας

Figure 12 Cantilever Beam – Uniformly Distributed Load



$$R = V \dots \dots \dots = w\ell$$

$$V_x \dots \dots \dots = wx$$

$$M_{\max} \text{ (at fixed end)} \dots \dots \dots = \frac{w\ell^2}{2}$$

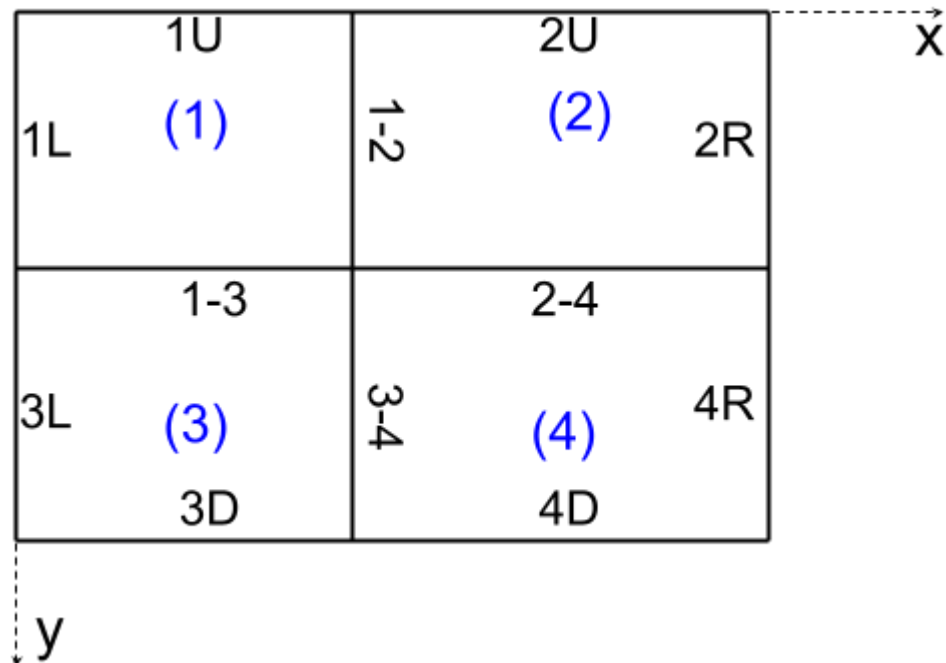
$$M_x \dots \dots \dots = \frac{wx^2}{2}$$

$$\Delta_{\max} \text{ (at free end)} \dots \dots \dots = \frac{w\ell^4}{8EI}$$

$$\Delta_x \dots \dots \dots = \frac{w}{24EI} (x^4 - 4\ell^3x + 3\ell^4)$$

Συνεχείς πλάκες

- Συνεχείς λέγονται οι πλάκες με περισσότερα από 1 διαδοχικά ανοίγματα.
- Συμβολισμοί
 - Πλάκες: (i)
 - Στηρίξεις: $i - j$ ή iL, iR, iU, iD
 - Οι στηρίξεις είναι κάθετες είτε στον άξονα x είτε στον y



- Αντιδράσεις στις δοκούς/στηρίξεις:

- Προσθέτουμε τις αντιδράσεις από τις πλάκες εκατέρωθεν της στήριξης
- Π.χ. κάθετα στον x :

$$p_{1-2} = p_R^1 + p_L^2$$

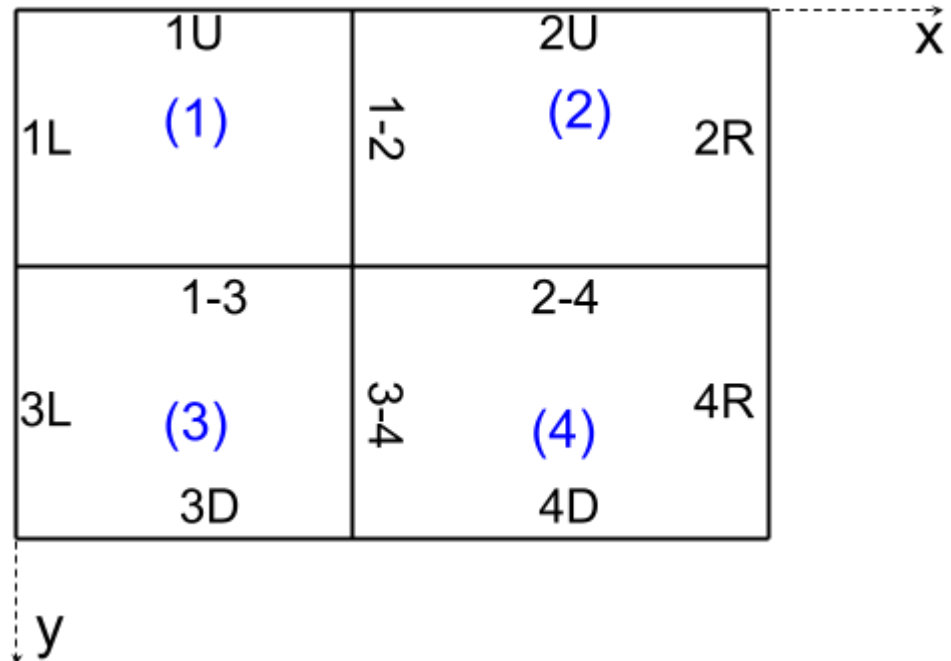
- Π.χ. κάθετα στον y :

$$p_{1-3} = p_D^1 + p_U^3$$



Συνεχείς πλάκες

- Ροπές πλάκας στις στηρίξεις
 - Παίρνουμε μέσο όρο των ροπών εκατέρωθεν της στήριξης
 - Για στήριξη κάθετη στον άξονα x μας ενδιαφέρει η M_x
 - Για στήριξη κάθετη στον άξονα y μας ενδιαφέρει η M_y



- Παραδείγματα
 - Π.χ. κάθετα στον x :

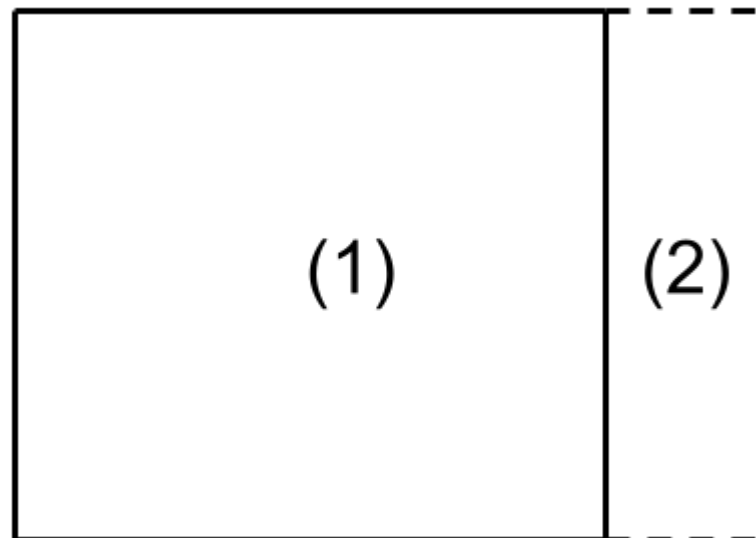
$$M_x^{1-2} = \frac{M_x^{1R} + M_x^{2L}}{2}$$

- Π.χ. κάθετα στον y :

$$M_y^{1-3} = \frac{M_y^{1D} + M_y^{3U}}{2}$$

Συνεχείς πλάκες

- Προσοχή σε πλάκες-προβόλους με μικρό πλάτος
- Δεν επαρκούν για να πακτώσουν τη γειτονική πλάκα.
- Είναι υπέρ της ασφαλείας να θεωρήσουμε ότι η γειτονική πλάκα έχει απλή έδραση στην παρειά που είναι κοινή με τον πρόβολο.
- Π.χ. Για την πλάκα (1) του σχήματος, θα θεωρήσουμε απλή έδραση σε όλες τις παρειές της (τύπος 1).





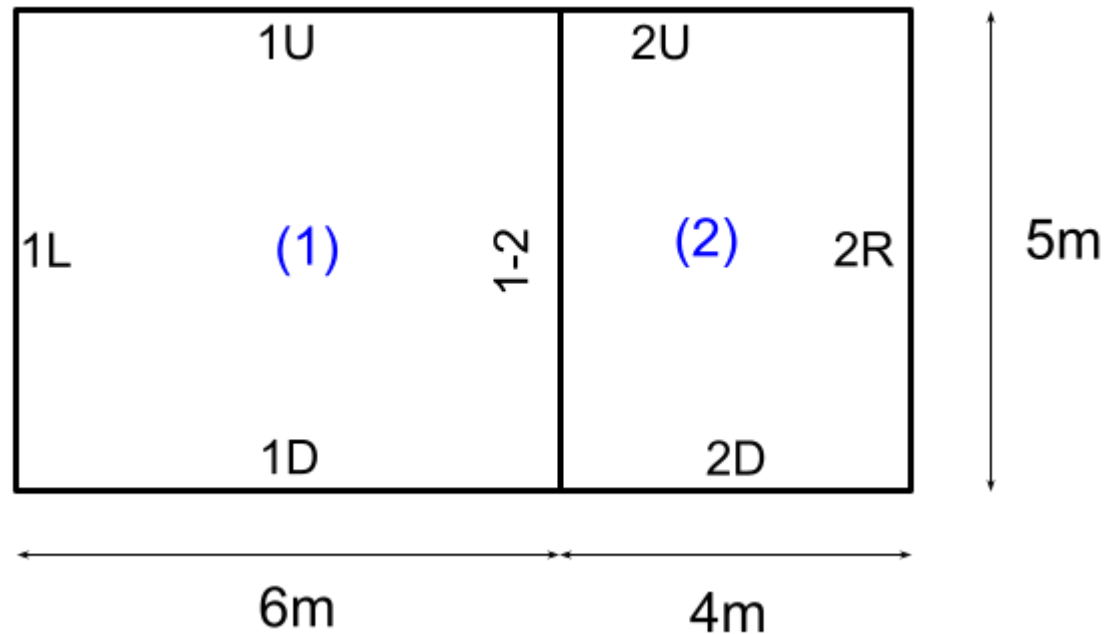
Παράδειγμα

Η συνεχής πλάκα με πάχος 15cm του σχήματος φορτίζεται με ομοιόμορφο καταναμεμένο φορτίο $p = 10\text{kN/m}^2$. $E = 35.2\text{GPa}$

Να υπολογισθούν

- Ροπές
- Τέμνουσες
- Φορτία στις δοκούς

Να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Marcus



Παράδειγμα

Πλάκα (1)

- Ροπή αδρανείας

$$I = \frac{1}{12} (1m) d^3 = \frac{1}{12} (1m) (0.15m)^3$$

$$\Rightarrow I = 2.81 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$EI = 9900 \text{ kNm}^2$$

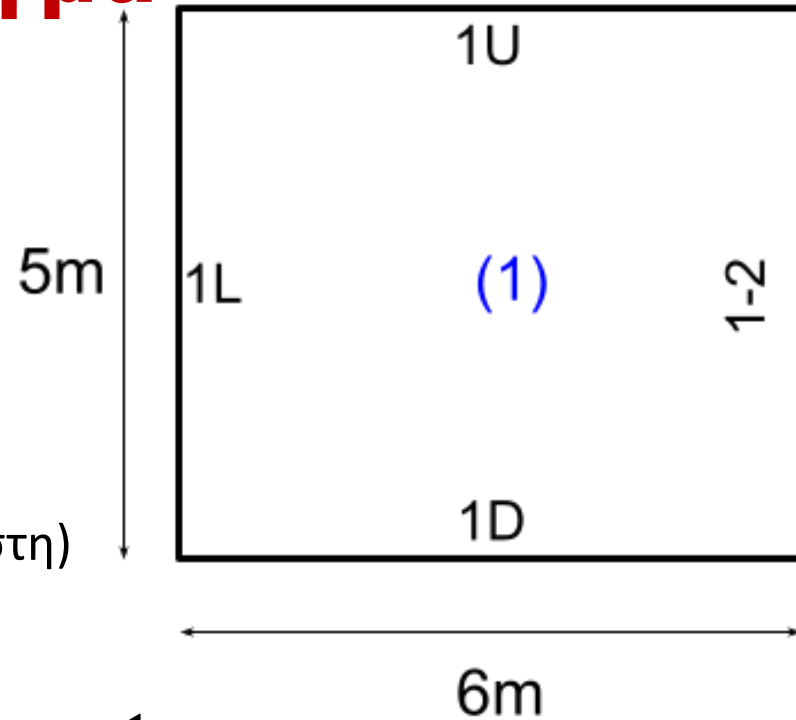
- Μέθοδος Marcus (x: μονόπακτη, y: αμφιέρειστη)

$$\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} = \frac{5}{6} = 0.833$$

$$c_x = \frac{2}{384} \quad m_{x,max} = \frac{1}{14.22} \quad m_{x,erm} = -\frac{1}{8}$$

$$c_y = \frac{5}{384} \quad m_{y,max} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{c_y}{c_x} = 2.5 \quad k_x = \frac{\frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.547 \quad k_y = \frac{1}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.453$$



Πλάκα (1)

Παράδειγμα

- Αμείωτες ροπές στα ανοίγματα

$$M_{x,max}^0 = m_{x,max} k_x p L_x^2 = 13.838 \text{ kNm}$$

$$M_{y,max}^0 = m_{y,max} k_y p L_y^2 = 14.168 \text{ kNm}$$

- Μειωτικοί συντελεστές συστροφής

$$M_x = \frac{pL_x^2}{8} = 45 \text{ kNm} \quad v_x = \left| 1 - \frac{5}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{M_{x,max}^0}{M_x} \right| = 0.631$$

$$M_y = \frac{pL_y^2}{8} = 31.25 \text{ kNm} \quad v_y = \left| 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 \frac{M_{y,max}^0}{M_y} \right| = 0.738$$

- Μέγιστες ροπές στα ανοίγματα (διορθωμένες)

$$M_{x,max}^1 = v_x \cdot M_{x,max}^0 = 8.73 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,max}^1 = v_y \cdot M_{y,max}^0 = 10.45 \text{ kNm/m}$$

- Ροπή στη στήριξη

$$M_{x,erm}^{1R} = m_{x,erm} k_x p L_x^2 = -24.60 \text{ kNm/m}$$

- Βύθιση στο μέσο της πλάκας (διορθωμένη)

$$f_m^1 = v_x c_x k_x \frac{pL_x^4}{EI} = 2.352 \text{ mm}$$

Παράδειγμα

Πλάκα (1)

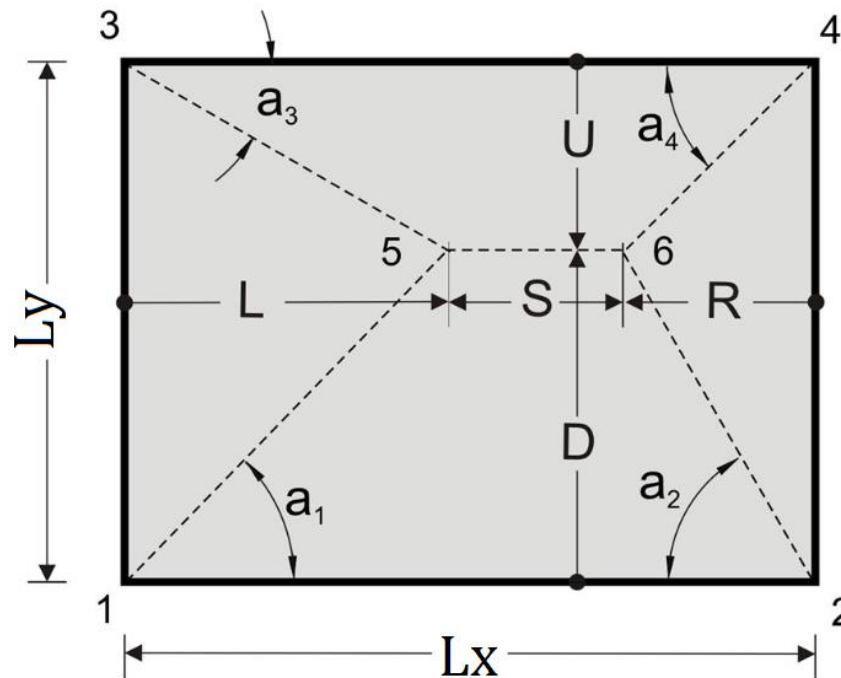
- $L_x > L_y$

- Γωνίες

$$a_1 = 45^\circ \quad a_2 = 30^\circ \quad a_3 = 45^\circ \quad a_4 = 30^\circ$$

- και

$$\tan a_1 = 1 \quad \tan a_2 = 0.577 \quad \tan a_3 = 1 \quad \tan a_4 = 0.577$$





Παράδειγμα

Πλάκα (1)

- Συντελεστές μηκών

$$\rho_L = \frac{\varepsilon}{\tan a_1 + \tan a_3} = 0.417$$

$$\rho_R = \frac{\varepsilon}{\tan a_2 + \tan a_4} = 0.722$$

$$\rho_D = \frac{\varepsilon \cdot \tan a_1}{\tan a_1 + \tan a_3} = 0.417$$

$$\rho_U = \frac{\varepsilon \cdot \tan a_3}{\tan a_1 + \tan a_3} = 0.417$$

- Τέμνουσες στις στηρίξεις της πλάκας

$$V_{x,L}^1 = \rho_L p L_x = 25.00 \text{ kN/m}$$

$$V_{x,R}^1 = \rho_R p L_x = 43.30 \text{ kN/m}$$

$$V_{y,D}^1 = \rho_D p L_x = 25.00 \text{ kN/m}$$

$$V_{y,U}^1 = \rho_U p L_x = 25.00 \text{ kN/m}$$

- Συντελεστές φορτίων

$$u_L = \frac{\rho_L}{2} = 0.208$$

$$u_R = u_R = \frac{\rho_R}{2} = 0.361$$

$$u_D = \frac{(2 - \rho_L - \rho_R)\rho_D}{2} = 0.180$$

$$u_U = \frac{(2 - \rho_L - \rho_R)\rho_U}{2} = 0.180$$

- Φορτία στις δοκούς

$$p_L^1 = u_L p L_x = 12.50 \text{ kN/m}$$

$$p_R^1 = u_R p L_x = 21.65 \text{ kN/m}$$

$$p_D^1 = u_D p L_x = 10.77 \text{ kN/m}$$

$$p_U^1 = u_U p L_x = 10.77 \text{ kN/m}$$

Παράδειγμα

Πλάκα (2)

- Ροπή αδρανείας

$$I = \frac{1}{12} (1m) d^3 = \frac{1}{12} (1m) (0.15m)^3$$

$$\Rightarrow I = 2.81 \cdot 10^{-4} m^4$$

$$EI = 9900 \text{ kNm}^2$$

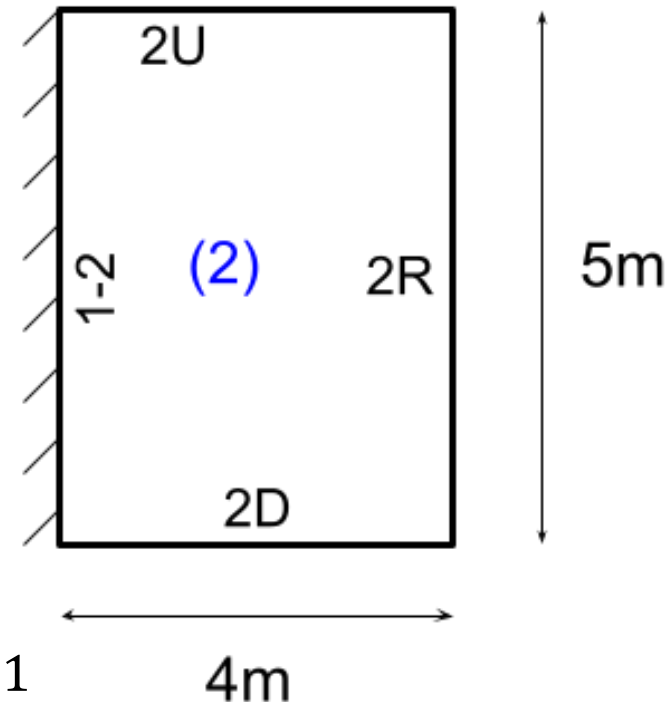
- Μέθοδος Marcus (x: μονόπακτη, y: αμφιέρειστη)

$$\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} = \frac{5}{4} = 1.25$$

$$c_x = \frac{2}{384} \quad m_{x,max} = \frac{1}{14.22} \quad m_{x,erm} = -\frac{1}{8}$$

$$c_y = \frac{5}{384} \quad m_{y,max} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{c_y}{c_x} = 2.5 \quad k_x = \frac{\frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.859 \quad k_y = \frac{1}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.141$$





Πλάκα (2)

Παράδειγμα

- Αμείωτες ροπές στα ανοίγματα

$$M_{x,max}^0 = m_{x,max} k_x p L_x^2 = 9.668 \text{ kNm}$$

$$M_{y,max}^0 = m_{y,max} k_y p L_y^2 = 4.399 \text{ kNm}$$

- Μειωτικοί συντελεστές συστροφής

$$M_x = \frac{pL_x^2}{8} = 20 \text{ kNm} \quad v_x = \left| 1 - \frac{5}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{M_{x,max}^0}{M_x} \right| = 0.742$$

$$M_y = \frac{pL_y^2}{8} = 31.25 \text{ kNm} \quad v_y = \left| 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 \frac{M_{y,max}^0}{M_y} \right| = 0.817$$

- Μέγιστες ροπές στα ανοίγματα (διορθωμένες)

$$M_{x,max}^2 = v_x \cdot M_{x,max}^0 = 7.18 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,max}^2 = v_y \cdot M_{y,max}^0 = 3.59 \text{ kNm/m}$$

- Ροπή στη στήριξη

$$M_{x,erm}^{2L} = m_{x,erm} k_x p L_x^2 = -17.18 \text{ kNm/m}$$

- Βύθιση στο μέσο της πλάκας (διορθωμένη)

$$f_m^2 = v_x c_x k_x \frac{pL_x^4}{EI} = 0.859 \text{ mm}$$

Παράδειγμα

Πλάκα (2)

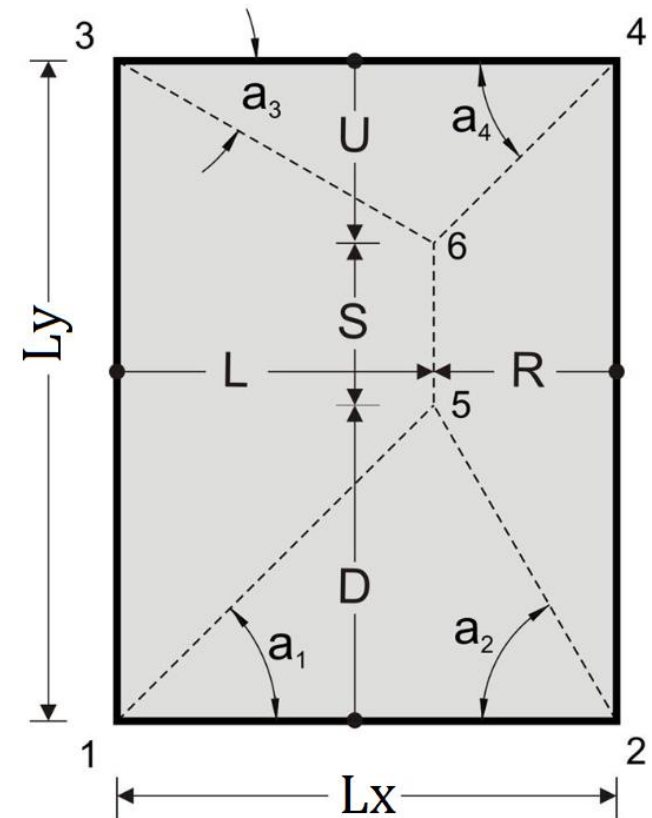
- $L_y > L_x$

- Γωνίες

$$a_1 = 30^\circ \quad a_2 = 45^\circ \quad a_3 = 30^\circ \quad a_4 = 45^\circ$$

- και

$$\cot a_1 = 1 \quad \cot a_2 = 0.577 \quad \cot a_3 = 1 \quad \cot a_4 = 0.577$$





Παράδειγμα

Πλάκα (2)

- Συντελεστές μηκών

$$\rho_L = \frac{\cot a_1}{\cot a_1 + \cot a_2} = 0.634$$

$$\rho_R = \frac{\cot a_2}{\cot a_1 + \cot a_2} = 0.366$$

$$\rho_D = \frac{1}{\cot a_1 + \cot a_2} = 0.366$$

$$\rho_U = \frac{1}{\cot a_3 + \cot a_4} = 0.366$$

- Τέμνουσες στις στηρίξεις της πλάκας

$$V_{x,L}^2 = \rho_L p L_x = 25.36 \text{ kN/m}$$

$$V_{x,R}^2 = \rho_R p L_x = 10.35 \text{ kN/m}$$

$$V_{y,D}^2 = \rho_D p L_x = 7.32 \text{ kN/m}$$

$$V_{y,U}^2 = \rho_U p L_x = 7.32 \text{ kN/m}$$

- Συντελεστές φορτιων

$$u_L = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_L}{2\varepsilon} = 0.448$$

$$u_R = \frac{(2\varepsilon - \rho_D - \rho_U)\rho_R}{2\varepsilon} = 0.259$$

$$u_D = \frac{\rho_D}{2} = 0.183$$

$$u_U = \frac{\rho_U}{2} = 0.183$$

- Φορτία στις δοκούς

$$p_L^2 = u_L p L_x = 17.93 \text{ kN/m}$$

$$p_R^2 = u_R p L_x = 10.35 \text{ kN/m}$$

$$p_D^2 = u_D p L_x = 7.32 \text{ kN/m}$$

$$p_U^2 = u_U p L_x = 7.32 \text{ kN/m}$$



Παράδειγμα

Δοκός 1-2

- Φορτίο

$$p_{1-2} = p_R^1 + p_L^2 = 39.58 \frac{kN}{m}$$

- Ροπή

$$M_x^{1-2} = \frac{M_{x,erm}^{1R} + M_{x,erm}^{2L}}{2} = -20.89 \frac{kNm}{m}$$

