



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 12: Προσεγγιστικές μέθοδοι επίλυσης πλακών (μέρος Α)

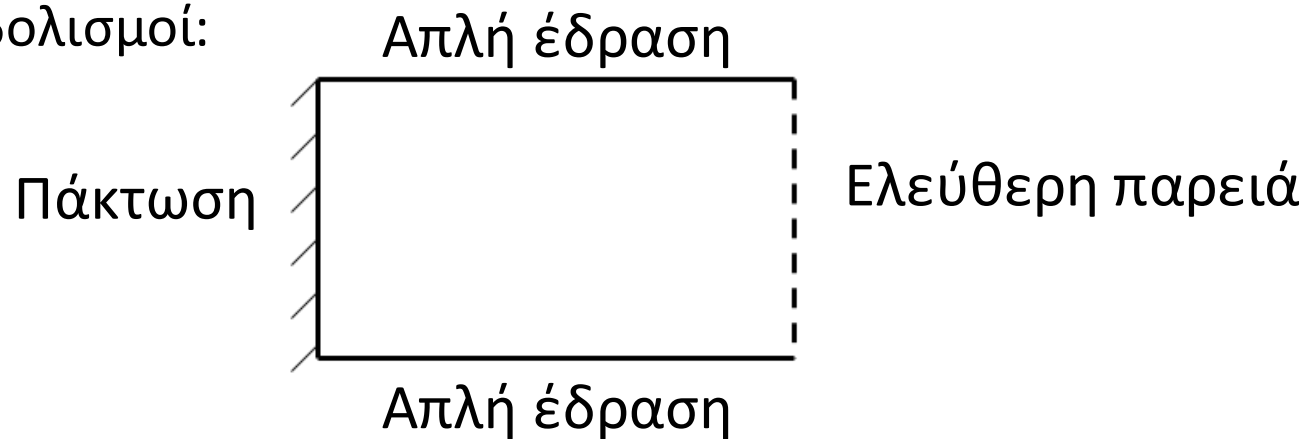
Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Εισαγωγή

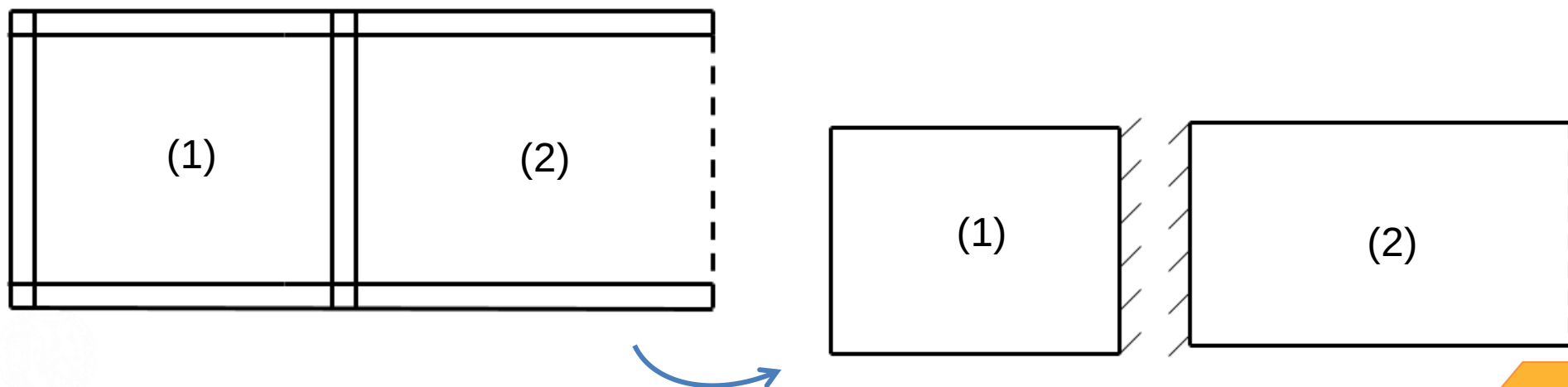
- Οι προσεγγιστικές μέθοδοι υπολογίζουν βυθίσεις, εντατικά μεγέθη και αντιδράσεις στις στηρίξεις (π.χ. δοκούς).
- Η επίλυση γίνεται με απλοποιητικές σχέσεις και με χρήση πινάκων
 - Βολικές για υπολογισμό στο χέρι.
 - Κατάλληλες για τις συνηθέστερες διατάξεις πλακών.
 - Μειωμένη ακρίβεια σε σχέση με αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους
- Προϋποθέσεις (κυρίως για κατασκευές από ΩΣ):
 - Πρέπει να έχουν εξασφαλιστεί οι γωνίες των πλακών από ανύψωση
 - Οι διαγώνιες ροπές συστροφής στις γωνίες αυτές πρέπει να παραλαμβάνονται από καρέ διαμήκη οπλισμό στις άνω και κάτω ίνες.
 - Πρακτικά οι συνθήκες αυτές ικανοποιούνται συνήθως, καθώς οι οπλισμοί των πλακών αλληλομπλέκονται με τους οπλισμούς των δοκών (διαμήκεις και συνδετήρες).

Στηρίξεις

- Συμβολισμοί:

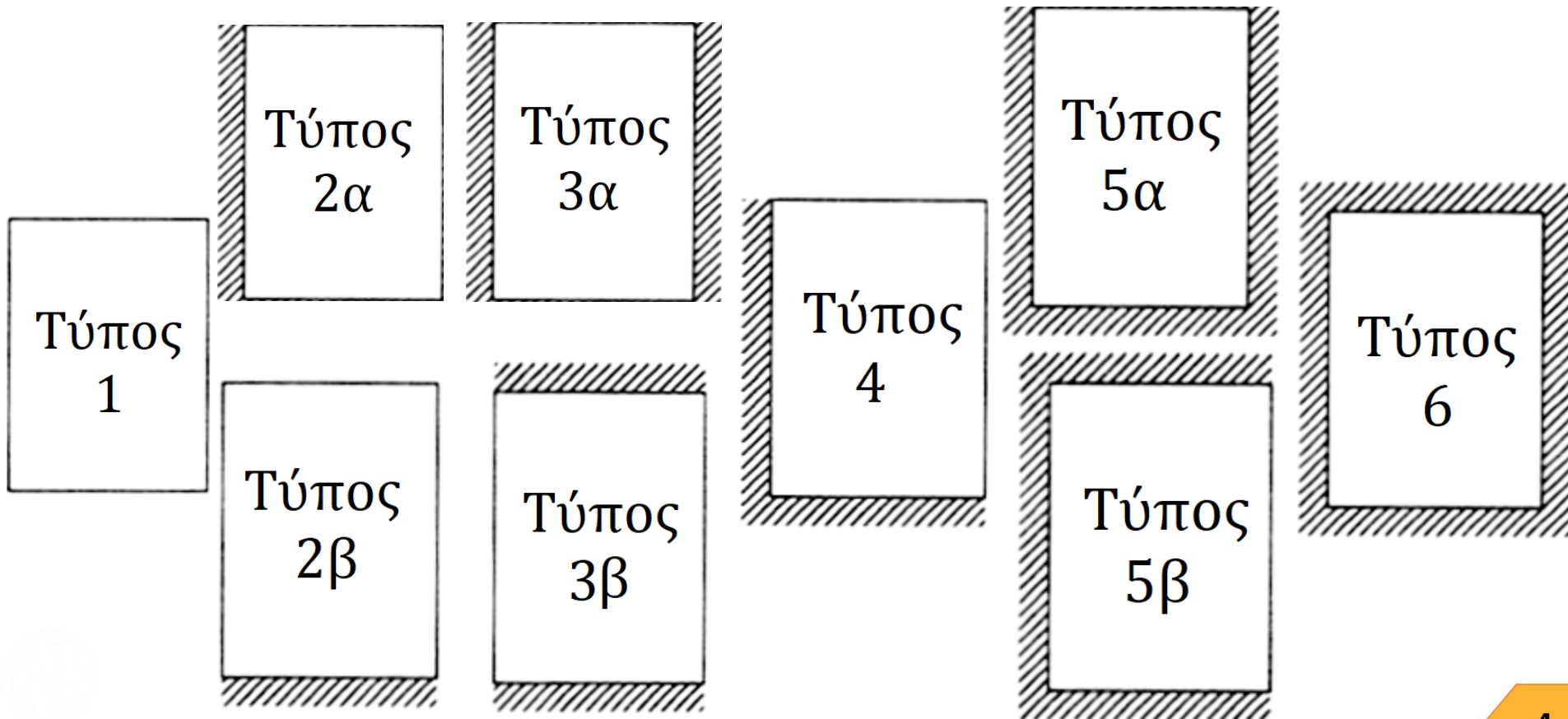


- Οι συνεχείς πλάκες αναλύονται ως μεμονωμένες με κατάλληλες στηρίξεις.
- Π.χ. η παρακάτω πλάκα επι δοκών αναλύεται ως



Στηρίξεις τετραέρειστων πλακών

- Οι τετραέρειστες πλάκες στηρίζονται και στις 4 παρειές τους.
- Διακρίνονται 6 κατηγορίες στήριξης (και κάποιες υποκατηγορίες), ανάλογα αν υπάρχει γειτονική πλάκα στην ίδια παρειά (πάκτωση) ή όχι (απλή έδραση).



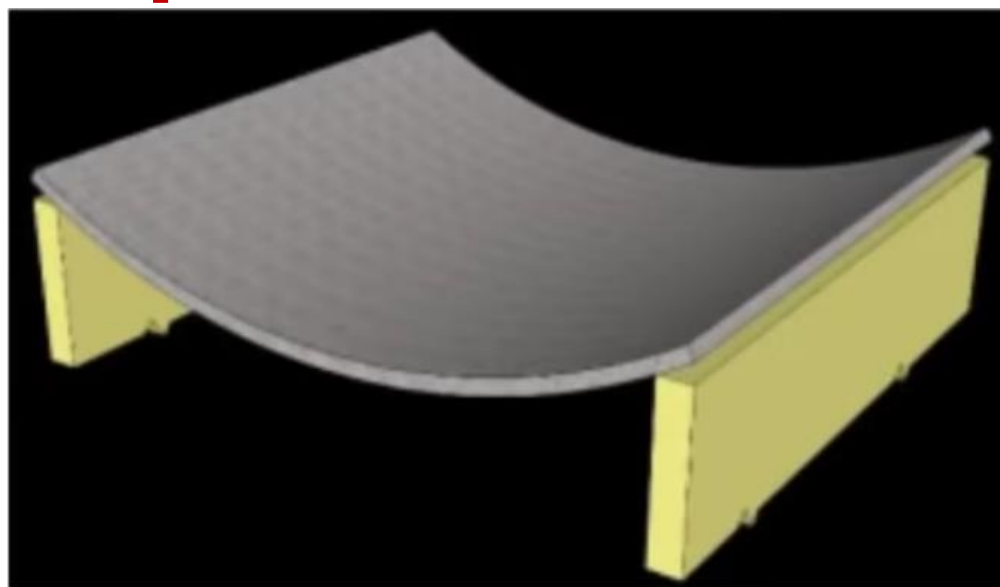
Διάκριση πλακών

- Πλάκες που κάμπτονται σε 1 διεύθυνση

- Αμφιέρειστες πλάκες
- Τετραέρειστες πλάκες όπου

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} > 2$$

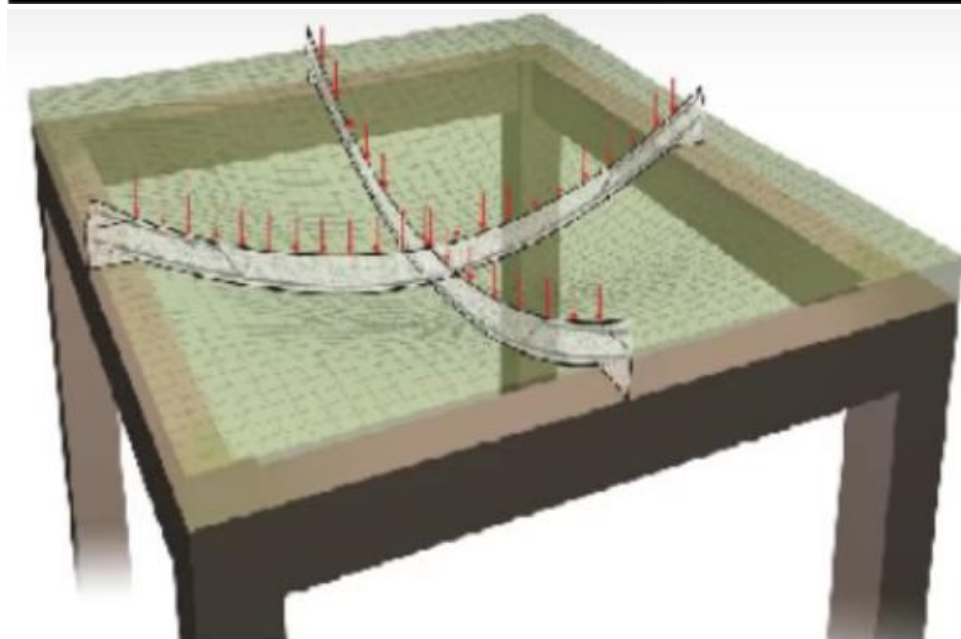
- Αναλύονται ως δοκοί με πλάτος 1m.
- Η κάμψη γίνεται στη διεύθυνση του L_{min}



- Πλάκες που κάμπτονται σε 2 διευθύνσεις

- Τετραέρειστες πλάκες όπου

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} \leq 2$$



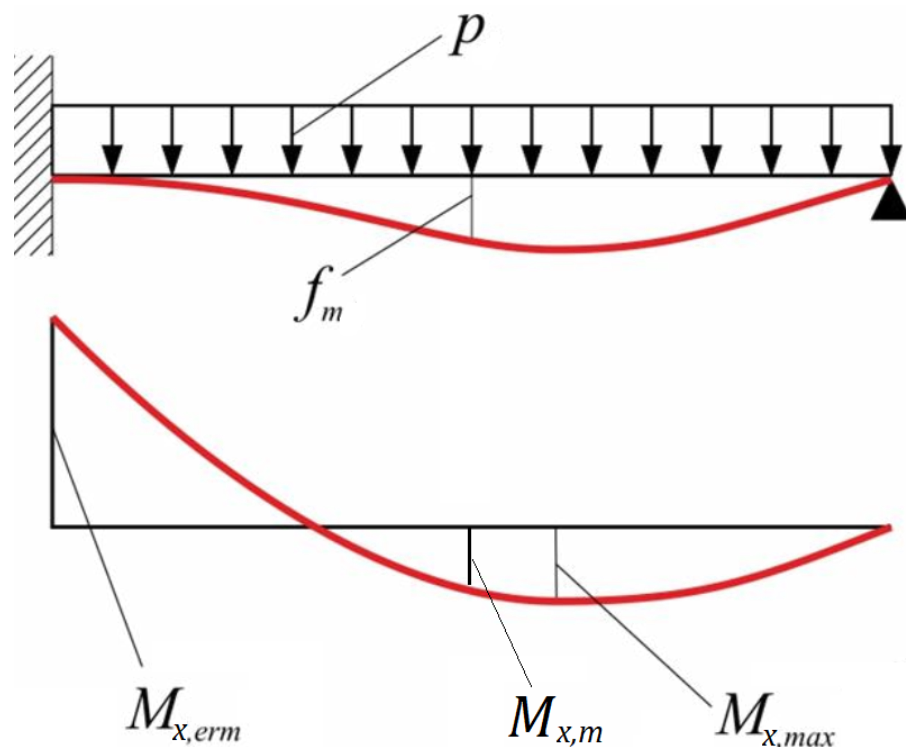


Μέθοδοι για πλάκες καμπτόμενες σε 2 διεύθυνσεις

- Μέθοδος λωρίδας Marcus
 - Θεωρεί ότι η πλάκα κάμπτεται ως μια λωρίδα στη διεύθυνση x και μία άλλη λωρίδα στη διεύθυνση y .
 - Υπολογίζει ροπές και βέλη κάμψης.
- Μέθοδος ελαστικότητας Czerny
 - Υπολογίζει ροπές, βέλη κάμψης και αντιδράσεις στις στηρίξεις.
 - Τα παραπάνω υπολογίζονται με βοήθεια συντελεστών που διαβάζονται από πίνακες, ανάλογα με τη γεωμετρία, φόρτιση και στηρίξεις.
- Απλοποιημένη μέθοδος για κατανομή αντιδράσεων σε τετραέρειστες πλάκες
 - Υπολογίζει τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.
 - Αυτές θα είναι οι φορτίσεις των δοκών.
 - Υπολογίζει τις τέμνουσες δυνάμεις στις στηρίξεις.

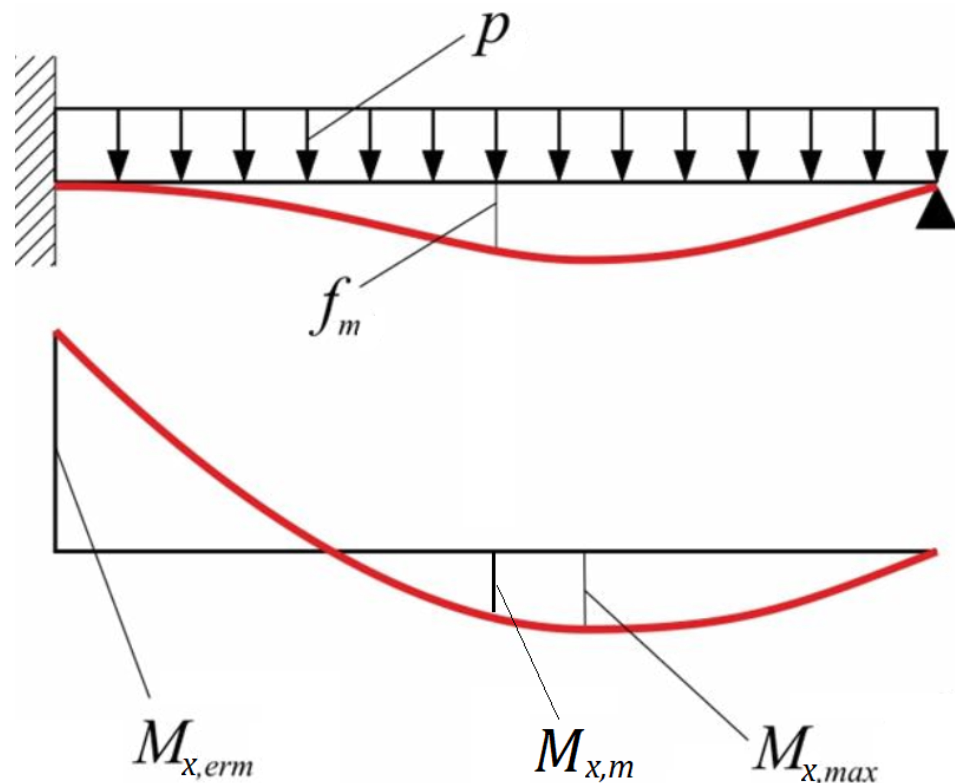
Συμβολισμοί

- Θα ασχοληθούμε με διάφορα μεγέθη σε διάφορα σημεία της πλάκας. Εδώ δίνονται κάποιοι κοινοί συμβολισμοί.
- Στο σχήμα φαίνεται τομή κατά τον άξονα x που περνά από το μέσο (m) της πλάκας.
- Το κατανεμημένο φορτίο συμβολίζεται ως p
- Το βέλος κάμψης, δηλαδή η βύθιση, συμβολίζεται ως f
- Οι ροπές συμβολίζονται ως M κατά τα γνωστά
- Οι τέμνουσες συμβολίζονται ως V



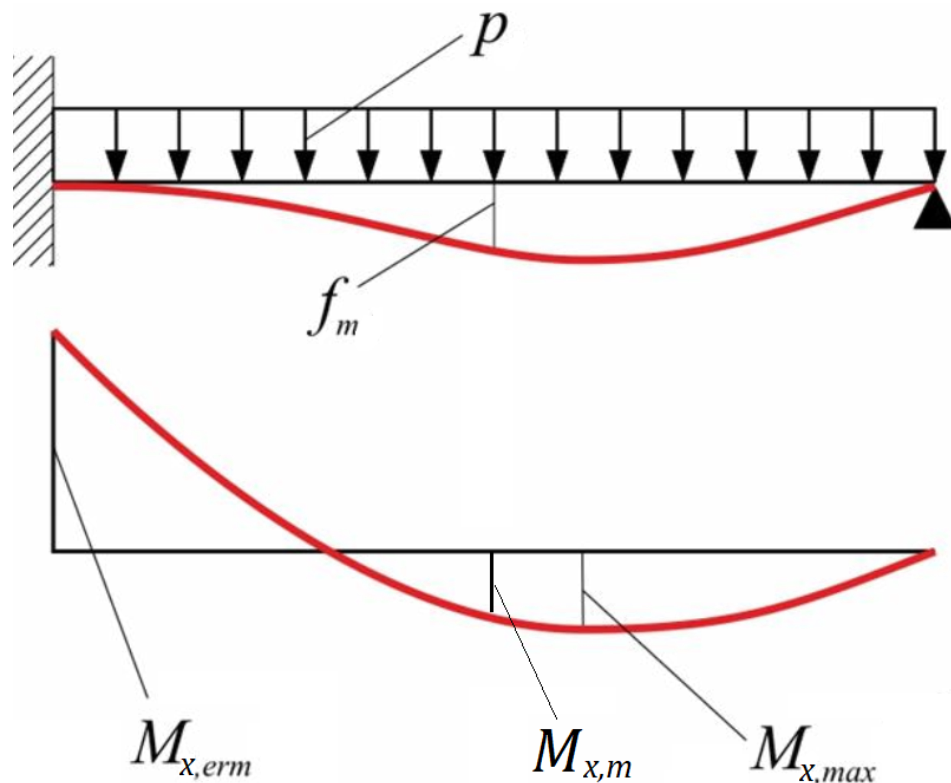
Συμβολισμοί

- Μεγέθη στο μέσο της πλάκας θα συμβολίζονται με το δείκτη m
 - Ροπή στο μέσο (κατά τον άξονα x): $M_{x,m}$
 - Βύθιση μέσου: f_m
- Η μέγιστη τιμή μεγέθους στο άνοιγμα συμβολίζεται με δείκτη max .
 - Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα (κάτα x): $M_{x,max}$
 - Δεν συμβαίνει απαραίτητα στο μέσο
- Η ελάχιστη τιμή στο άνοιγμα ενός μεγέθους με αρνητικές τιμές συμβολίζεται με δείκτη min .



Συμβολισμοί

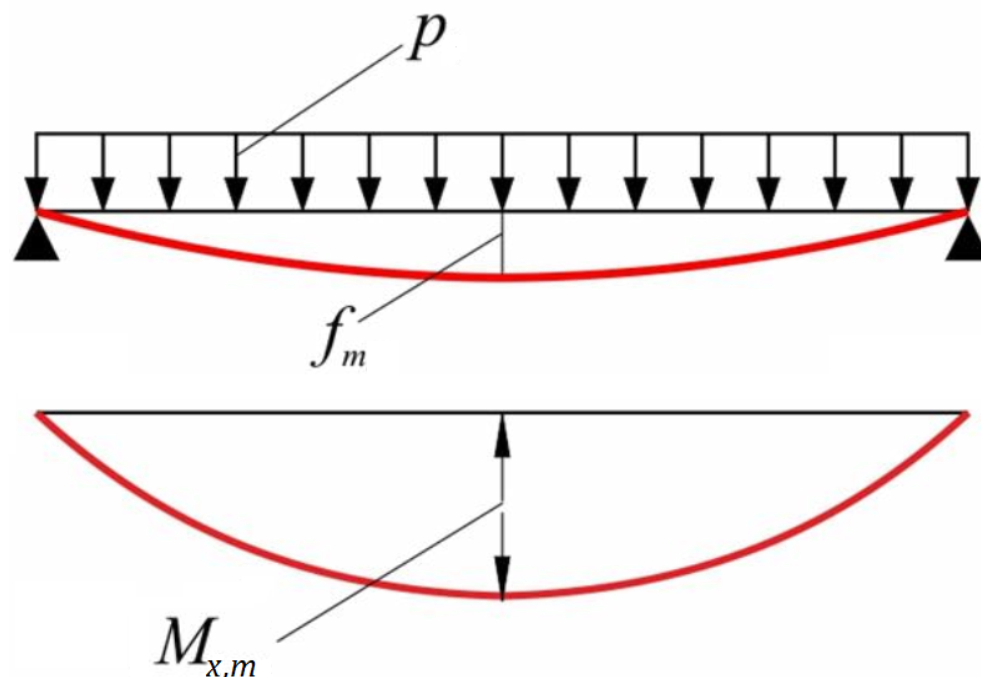
- Μεγέθη στο μέσο της πλάκας θα συμβολίζονται με το δείκτη m
 - Ροπή στο μέσο (κατά τον άξονα x): $M_{x,m}$
 - Βύθιση μέσου: f_m
- Η μέγιστη τιμή μεγέθους στο άνοιγμα συμβολίζεται με δείκτη max .
 - Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα (κάτα x): $M_{x,max}$
- Η ελάχιστη τιμή στο άνοιγμα ενός μεγέθους με αρνητικές τιμές συμβολίζεται με δείκτη min .



Συμβολισμοί

- Γενικά η μέγιστη/ελάχιστη τιμή στο άνοιγμα δεν συμβαίνει στο μέσο.
- Ειδικά στην περίπτωση που η μέγιστη/ελάχιστη τιμή συμβεί στο μέσο του ανοίγματος:
 - Θα χρησιμοποιείται είτε ο δείκτης m είτε ο δείκτης max/min
 - Π.χ. έστω $M_{x,max} = M_{x,m}$.

Τομή κατά τον άξονα x
που περνά από το μέσο
(m) της πλάκας.

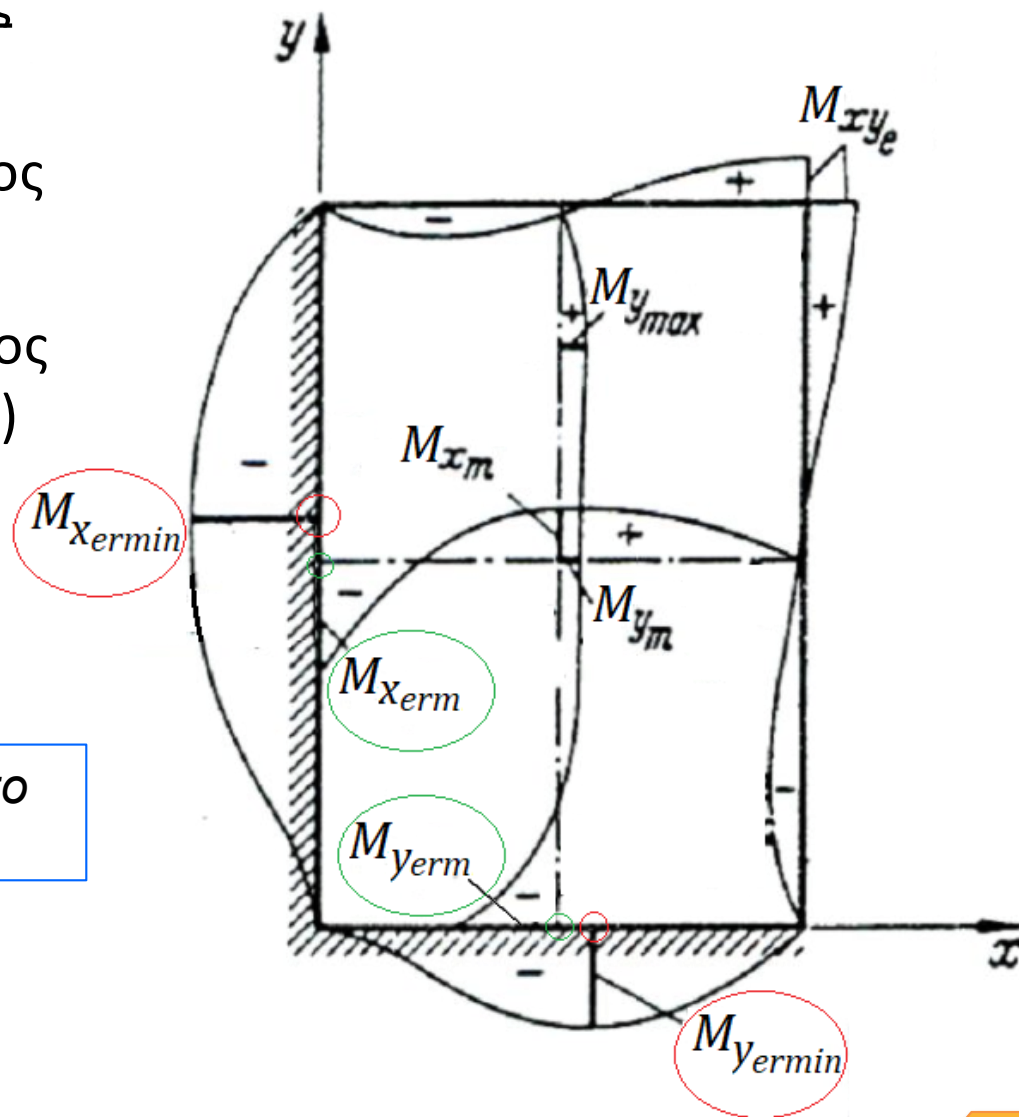
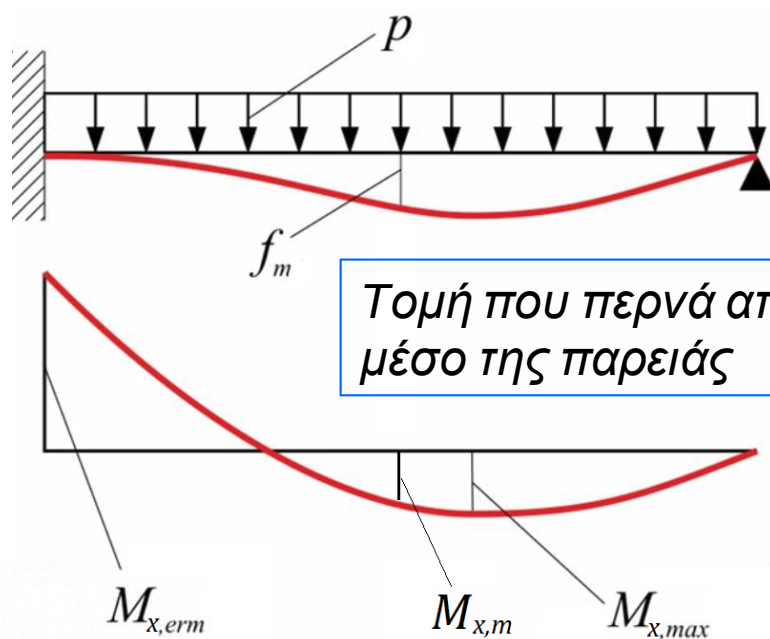


Συμβολισμοί

- Μεγέθη στις στηρίξεις της πλάκας θα συμβολίζονται με το δείκτη er
- Όμως κάθε στήριξη της πλάκας εκτείνεται σε όλη την παρειά της και το μέγεθος που μας ενδιαφέρει μεταβάλλεται κατά μήκος της στήριξης.
- Επομένως θα χρησιμοποιούνται οι δείκτες
 - erm : Τιμή στο μέσο της παρειάς (δηλαδή της στήριξης)
 - $ermax$: Μέγιστη τιμή κατά μήκος της παρειάς
 - $ermin$: Ελάχιστη τιμή κατά μήκος της παρειάς (για αρνητικά μεγέθη)
- Αν η μέγιστη/ελάχιστη τιμή συμβαίνει στο μέσο της παρειάς, τότε θα χρησιμοποιείται είτε ο δείκτης erm είτε ο δείκτης $ermax/ermin$.
- Μεγέθη στις στηρίξεις της πλάκας θα συμβολίζονται με το δείκτη er
- Όμως κάθε στήριξη της πλάκας εκτείνεται σε όλη την παρειά της και το μέγεθος που μας ενδιαφέρει μεταβάλλεται κατά μήκος της στήριξης.
- Επομένως θα χρησιμοποιούνται οι δείκτες

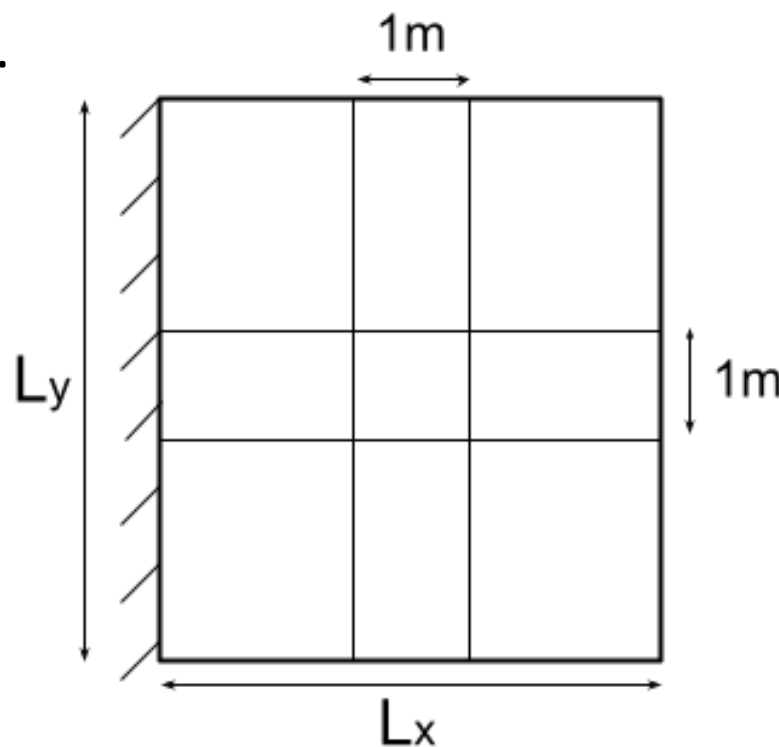
Συμβολισμοί

- ***erm***: Τιμή στο μέσο της παρειάς (δηλαδή της στήριξης)
- ***ermax***: Μέγιστη τιμή κατά μήκος της παρειάς
- ***ermin***: Ελάχιστη τιμή κατά μήκος της παρειάς (για αρνητικά μεγέθη)



Μέθοδος Marcus

- Έστω πλάκα που φορτίζεται με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο p .
- Η πλάκα αντικαθιστάται από 2 λωρίδες κατά x και y
 - Κάθε λωρίδα έχει πλάτος $1m$.
 - Οι λωρίδες συναντιούνται στο μέσο m .
- Κάθε λωρίδα
 - Κάμπτεται ως δοκός.
 - Φορτίζεται με $p_i = k_i \cdot p, i = x, y$
- Πρέπει η βύθιση στο μέσο να είναι ίδια για τις 2 λωρίδες.
- Από την προηγούμενη απαίτηση θα βρεθούν οι συντελεστές k_x, k_y
- Στα επόμενα, θα χρησιμοποιείται ο δείκτης i , στην θέση των δεικτών x, y .
 - Π.χ. Τα μήκη της πλάκας κατά x και y θα ανφέρονται ως $L_i, i = x, y$



Μέθοδος Marcus

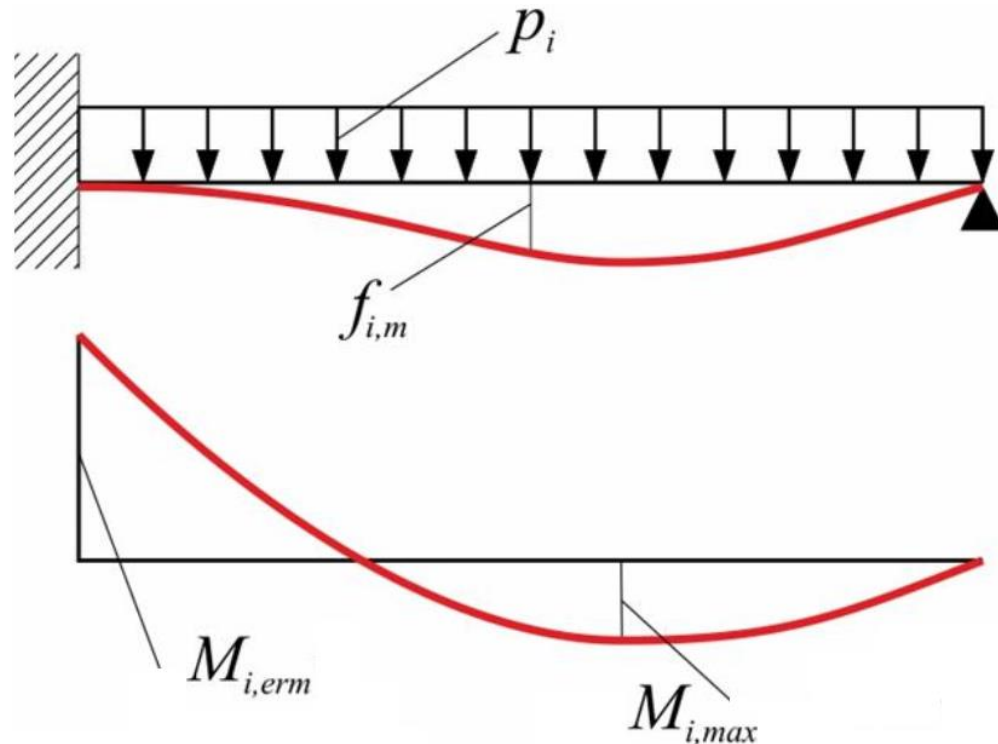
- Κάθε λωρίδα κάμπτεται ως δοκός

- Έχει κρέμαση d , δηλαδή όσο το πάχος της πλάκας
- Φορτίζεται με $p_i = k_i p$
- Έχει πλάτος 1m.
- Η ροπή αδρανείας της είναι

$$I = \frac{1}{12} (1m) d^3$$

- Η μέθοδος Marcus υπολογίζει για κάθε λωρίδα ανεξάρτητα

- Τη βύθιση στο μέσο $f_{i,m}$
- Τη μέγιστη ροπή στο άνοιγμα $M_{i,max}$
- Τη ροπή στη στήριξη $M_{i,erm}$. Αυτή είναι η ροπή στο μέσο της παρειάς και γενικώς διαφορετική από την ελαχιστη ροπή στην παρειά $M_{i,ermin}$.



Μέθοδος Marcus

- Η βύθιση στο μέσο και οι ροπές εξαρτώνται από τις στηρίξεις.

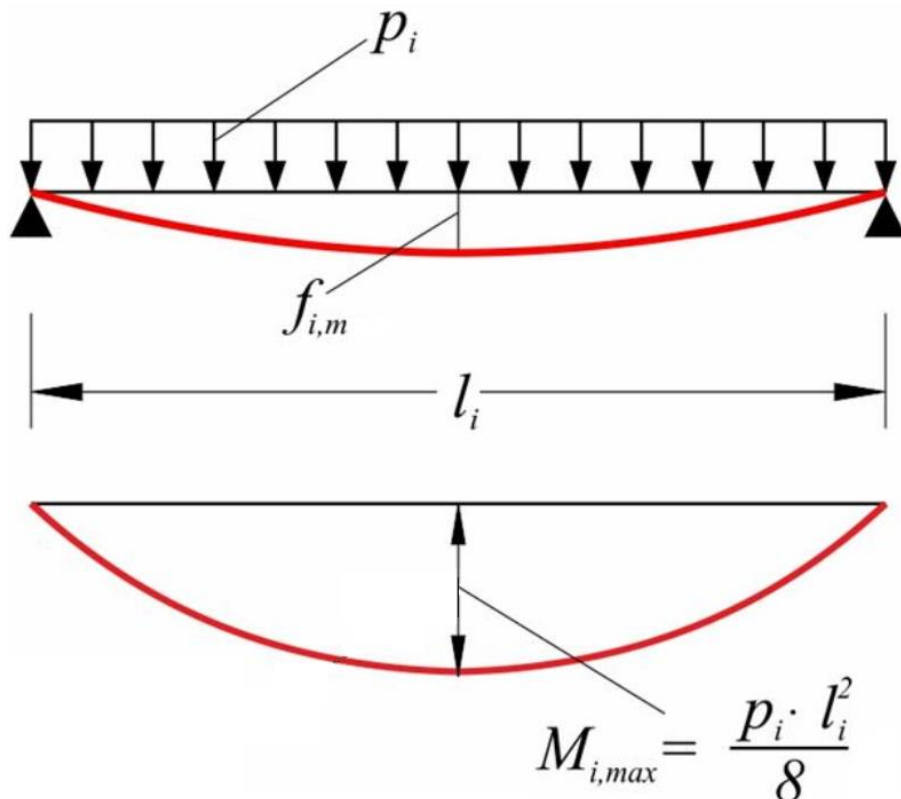
1) Αμφιέρειστη

- Βύθιση στο μέσο:

$$f_{i,m} = c_i \frac{p_i L_i^4}{EI} \quad c_i = \frac{5}{384}$$

- Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα
(συμπίπτει με τη ροπή στο μέσο)

$$M_{i,max} = m_{i,max} p_i L_i^2 \quad m_{i,max} = \frac{1}{8}$$



Μέθοδος Marcus

- Η βύθιση στο μέσο και οι ροπές εξαρτώνται από τις στηρίξεις.

2) Αμφίπακτη

- Βύθιση στο μέσο:

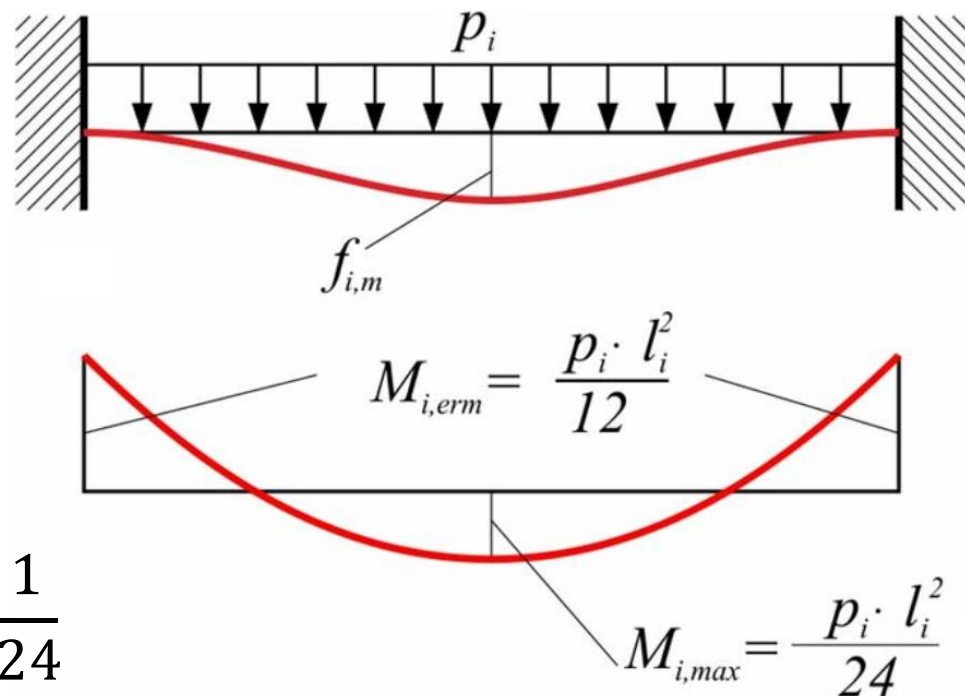
$$f_{i,m} = c_i \frac{p_i L_i^4}{EI} \quad c_i = \frac{1}{384}$$

- Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα
(συμπίπτει με τη ροπή στο μέσο)

$$M_{i,max} = m_{i,max} p_i L_i^2 \quad m_{i,max} = \frac{1}{24}$$

- Ροπή στο μέσο της στήριξης

$$M_{i,erm} = m_{i,erm} p_i L_i^2 \quad m_{i,erm} = -\frac{1}{12}$$



Μέθοδος Marcus

- Η βύθιση στο μέσο και οι ροπές εξαρτώνται από τις στηρίξεις.

3) Μονόπακτη

- Βύθιση στο μέσο:

$$f_{i,m} = c_i \frac{p_i L_i^4}{EI} \quad c_i = \frac{2}{384}$$

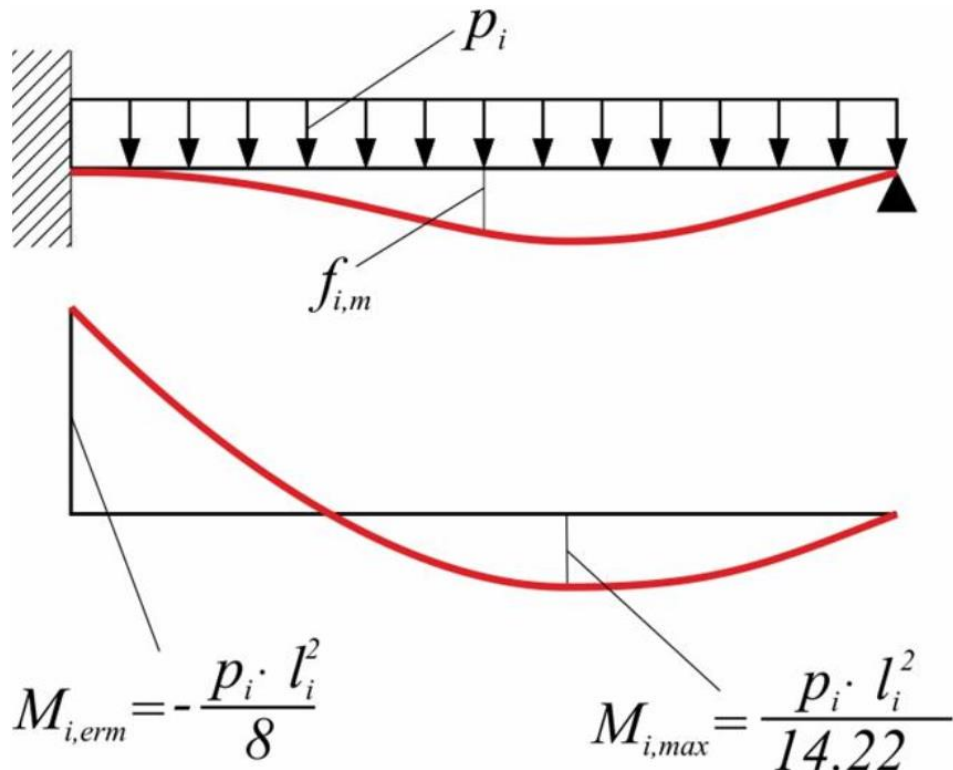
- Μέγιστη ροπή στο άνοιγμα

$$M_{i,max} = m_{i,max} p_i L_i^2$$

$$m_{i,max} = \frac{1}{14.22}$$

- Ροπή στο μέσο της στήριξης

$$M_{i,erm} = m_{i,erm} p_i L_i^2 \quad m_{i,erm} = -\frac{1}{8}$$



Μέθοδος Marcus

- Οι βυθίσεις των λωρίδων στο μέσο πρέπει να είναι ίσες: $f_{x,m} = f_{y,m}$
- Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις των $f_{i,m} = c_i \frac{p_i L_i^4}{EI}$ προκύπτουν οι συντελεστές των φορτίων k_i

$$k_x = \frac{\frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} \quad k_y = \frac{1}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4}$$

- Όπου ε είναι ο λόγος των μηκών των παρειών της πλάκας

$$\varepsilon = \frac{L_y}{L_x}$$

- Έτσι η βύθιση (προ διόρθωσης) στο μέσο είναι

$$f_{x,m}^0 = c_x k_x \frac{p L_x^4}{EI} = f_{y,m}^0 = c_y k_y \frac{p L_y^4}{EI}$$

Μέθοδος Marcus

- Ροπές στα μέσα των στηρίξεων παρειών

$$M_{x,erm} = m_{x,erm} k_x p L_x^2 \quad M_{y,erm} = m_{y,erm} k_y p L_y^2$$

- Για τις ροπές στα ανοίγματα υπολογίζονται πρώτα οι ποσότητες

$$M_{x,max}^0 = m_{x,max} k_x p L_x^2 \quad M_{y,max}^0 = m_{y,max} k_y p L_y^2$$

- Η θεώρηση μεμονωμένων λωρίδων στο μέσο αγνοεί την επίδραση γειτονικών λωρίδων, μέσω της ροπής συστροφής M_{xy} , η οποία μειώνει τις ροπές κάμψης.

- Η ευνοϊκή επιρροή της ροπής συστροφής λαμβάνεται υπόψη πολλαπλασιάζοντας τις παραπάνω ροπές στα ανοίγματα με μειωτικούς συντελεστές συστροφής v_x, v_y

$$v_x = \left| 1 - \frac{5}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{M_{x,max}^0}{M_x} \right| \quad v_y = \left| 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 \frac{M_{y,max}^0}{M_y} \right|$$

- Όπου

$$M_x = \frac{pL_x^2}{8} \quad M_y = \frac{pL_y^2}{8}$$

Μέθοδος Marcus

- Έτσι οι μέγιστες ροπές στα ανοίγματα υπολογίζονται ως

$$M_{x,max} = v_x \cdot M_{x,max}^0$$

$$M_{y,max} = v_y \cdot M_{y,max}^0$$

- Η βύθιση μειώνεται και αυτή λόγω της ροπής συστροφής

$$f_m = v_x f_{x,m}^0 \Rightarrow$$

$$f_m = v_x c_x k_x \frac{p L_x^4}{EI}$$

- Διευκρινίζεται ότι αυτή είναι η βύθιση στο μέσο και όχι απαραίτητα η μέγιστη βύθιση. Είναι όμως παραπλήσια.
- Προσοχή: αυτή η ευνοϊκή επιρροή ισχύει μόνο για τη βύθιση και τις ροπές στα ανοίγματα $M_{i,max}$ και όχι για τις ροπές στις στηρίξεις $M_{i,erm}$, που υπολογίζονται όπως γράφτηκε πριν

$$M_{x,erm} = m_{x,erm} k_x p L_x^2$$

$$M_{y,erm} = m_{y,erm} k_y p L_y^2$$

Μέθοδος Marcus

- Αν η πλάκα δε συνδέεται μονολιθικά στα σημεία έδρασης της:
 - Π.χ. όταν υπάρχουν συναντώμενες ελεύθερες παρυφές και δεν προβλέπεται οπλισμός συστροφής
 - Τότε οι ροπές των ανοιγμάτων οι μειωτικοί συντελεστές συστροφής είναι μικρότεροι

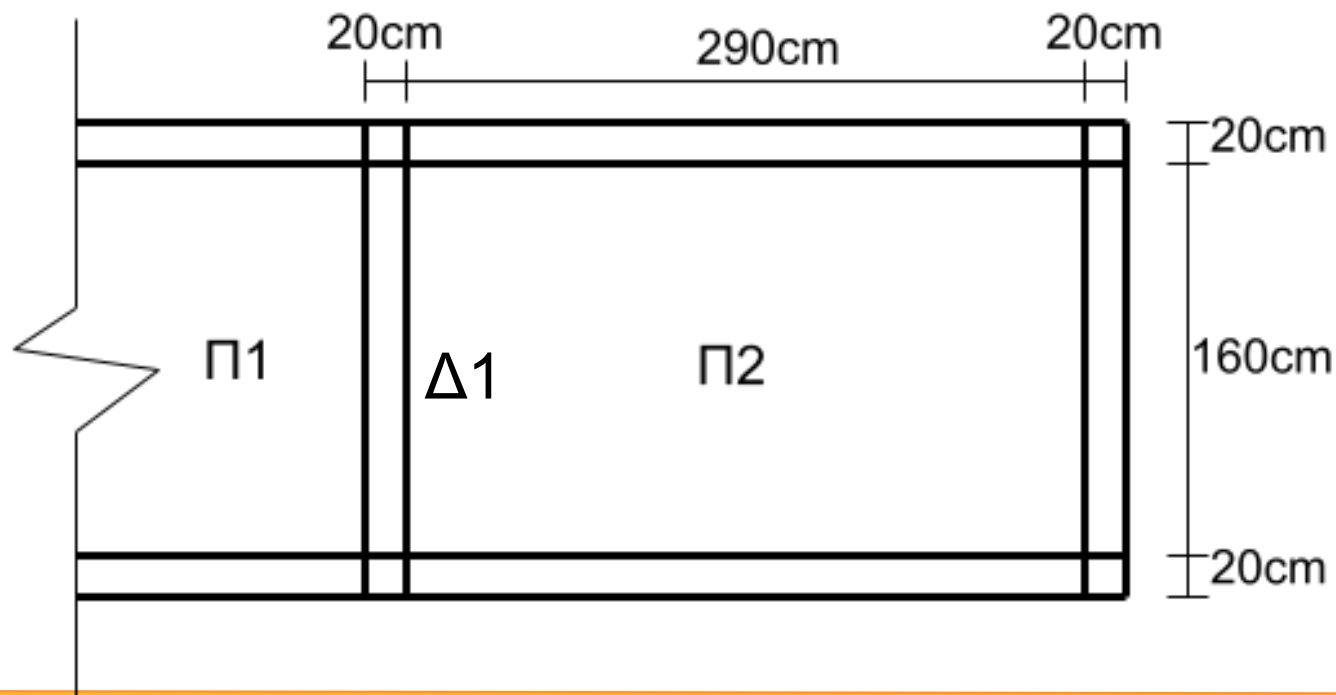
$$v_x = 0.5 + 0.5 \left| 1 - \frac{5}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{M_{x,max}^0}{M_x} \right|$$
$$v_y = 0.5 + 0.5 \left| 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 \frac{M_{y,max}^0}{M_y} \right|$$

Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

Στο σχήμα οι πλάκες

- Είναι φτιαγμένες από σκυρόδεμα με $E = 33GPa$
- έχουν πάχος 16cm και
- φορτίζονται με ομοιόμορφο φορτίο $10kN/m^2$ στο οποίο περιλαμβάνονται μόνιμα και κινητά φορτία.

Να λυθεί η πλάκα Π2 με τη μέθοδο Marcus.



Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

- Το μήκος κάθε πλάκας περιλαμβάνει και μέρος της δοκού.
 - Αν στην δοκό εδράζεται μόνο 1 πλάκα, τότε προσθέτουμε όλο το πλάτος της δοκού.
 - Αν στη δοκό εδράζονται 2 γειτονικές πλάκες, τότε στο μήκος κάθε πλάκας προστίθεται το μισό του πλάτους της δοκού.

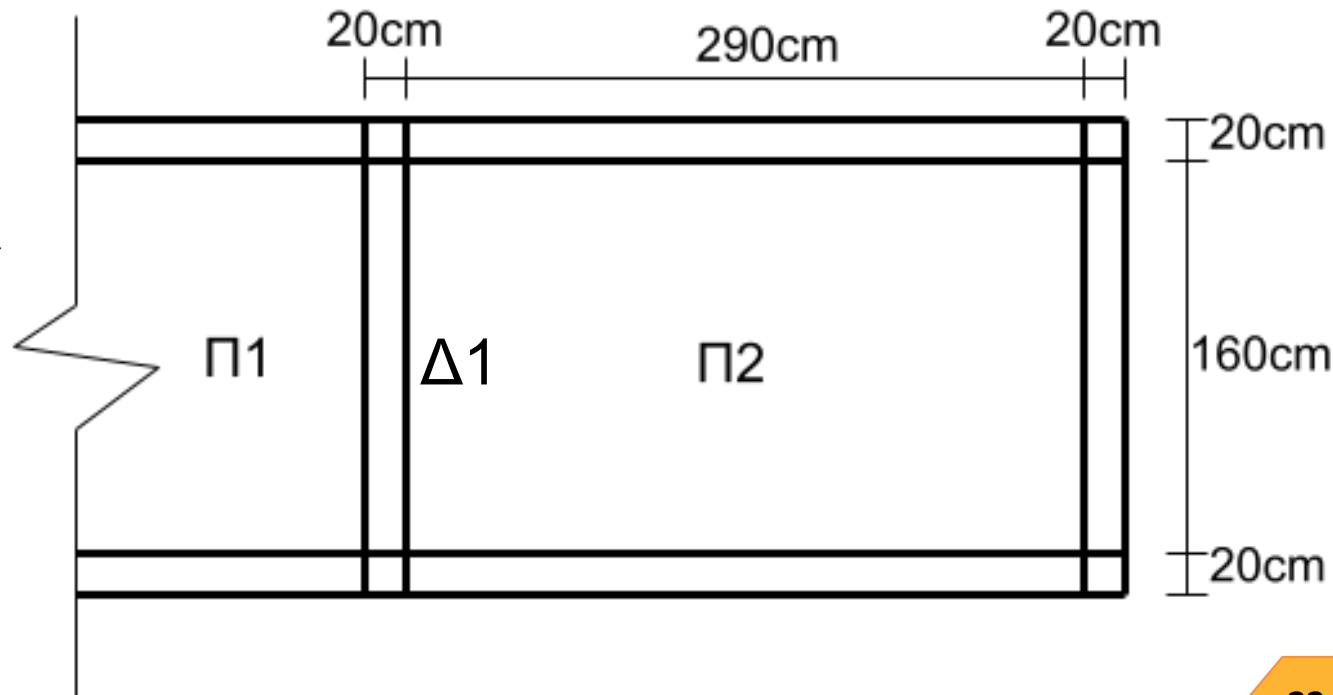
- Έτσι για την Π2:

$$L_x = \frac{20}{2} + 290 + 20$$

$$\Rightarrow L_x = 320\text{cm} = 3.2\text{m}$$

$$L_y = 20 + 160 + 20$$

$$\Rightarrow L_y = 200\text{cm} = 2\text{m}$$

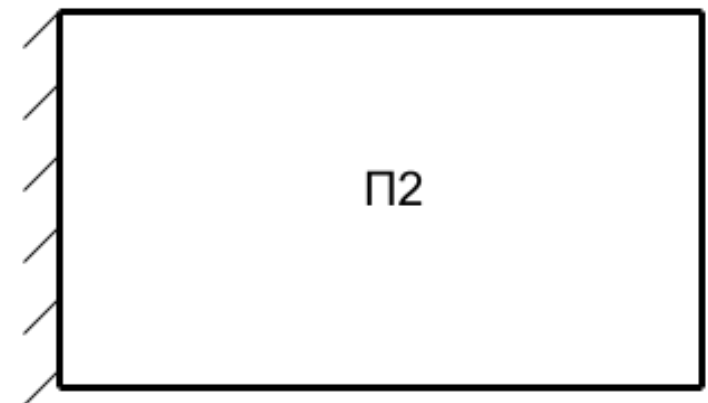
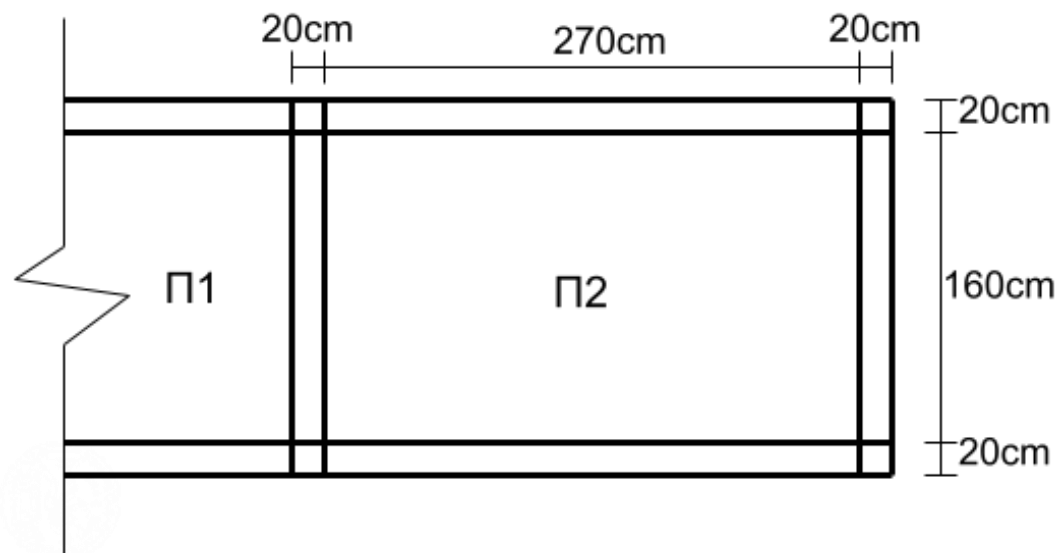


Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

- Η πλάκα Π2 κάμπτεται σε 2 διευθύνσεις αφού

$$\frac{L_{max}}{L_{min}} = \frac{3.2}{2} = 1.6 \leq 2$$

- Αν απομονώσω την Π2, συμπεριφέρεται ως
 - μονόπακτη στον άξονα x
 - αμφιέρειστη στον άξονα y



Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

- Ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο σε κάθε λωρίδα

$$p = 10 \frac{kN}{m^2} (1m) = 10 \frac{kN}{m}$$

- Ροπή αδρανείας

$$I = \frac{1}{12} (1m) d^3 = \frac{1}{12} (1m) (0.16m)^3 = 3.41 \cdot 10^{-4} m^4$$

- Λόγος μηκών

$$\varepsilon = \frac{L_y}{L_x} = \frac{2}{3.2} = 0.625$$

- Μονόπακτη λωρίδα στον άξονα x

$$c_x = \frac{2}{384} \quad m_{x,max} = \frac{1}{14.22} \quad m_{x,erm} = -\frac{1}{8}$$

- Αμφιέρειστη λωρίδα στον άξονα y

$$c_y = \frac{5}{384} \quad m_{y,max} = \frac{1}{8}$$

Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

- Συντελεστές κατανομής φορτίου

$$\frac{c_y}{c_x} = 2.5 \quad k_x = \frac{\frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.276 \quad k_y = \frac{1}{1 + \frac{c_y}{c_x} \varepsilon^4} = 0.724$$

- Ροπή της πλάκας στην στήριξη/δοκό Δ1

$$M_{x,erm} = m_{x,erm} k_x p L_x^2 = -3.535 \text{ kNm} \rightarrow -3.535 \text{ kNm/m}$$

- Οι μονάδες από τους τύποι υπολογισμού των ροπών θα δώσουν αποτέλεσμα σε kNm .
 - Δηλαδή θα δώσουν την ροπή σε μία λωρίδα πάχους 1m.
 - Γράφω τα τελικά αποτελέσματα σε kNm/m
- Αυτή η ροπή προκαλεί κατανεμημένο στρέπτικό φορτίο στη δοκό Δ1.
 - Το αντίστοιχο στρέπτικό φορτίο θα είναι -3.535 kNm/m .
 - Πρέπει όμως να ληφθεί υπόψη και η ροπή $M_{x,erm}$ της πλάκας Π1 στην ίδια δοκό Δ1.

Μέθοδος Marcus - Παράδειγμα

- Αμείωτες ροπές στα ανοίγματα

$$M_{x,max}^0 = m_{x,max} k_x p L_x^2 = 1.988 \text{ kNm}$$

$$M_{y,max}^0 = m_{y,max} k_y p L_y^2 = 3.619 \text{ kNm}$$

- Μειωτικοί συντελεστές συστροφής

$$M_x = \frac{pL_x^2}{8} = 12.8 \text{ kNm} \quad v_x = \left| 1 - \frac{5}{6} \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{M_{x,max}^0}{M_x} \right| = 0.669$$

$$M_y = \frac{pL_y^2}{8} = 5 \text{ kNm} \quad v_y = \left| 1 - \frac{5}{6} \varepsilon^2 \frac{M_{y,max}^0}{M_y} \right| = 0.764$$

- Μέγιστες ροπές στα ανοίγματα (διορθωμένες)

$$M_{x,max} = v_x \cdot M_{x,max}^0 = 1.329 \text{ kNm} \rightarrow 1.329 \text{ kNm/m}$$

$$M_{y,max} = v_y \cdot M_{y,max}^0 = 2.766 \text{ kNm} \rightarrow 2.766 \text{ kNm/m}$$

- Βύθιση στο μέσο της πλάκας (διορθωμένη)

$$EI = 11264 \text{ kNm}^2$$

$$f_m = v_x c_x k_x \frac{pL_x^4}{EI} = 8.95 \cdot 10^{-2} \text{ mm}$$