



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών

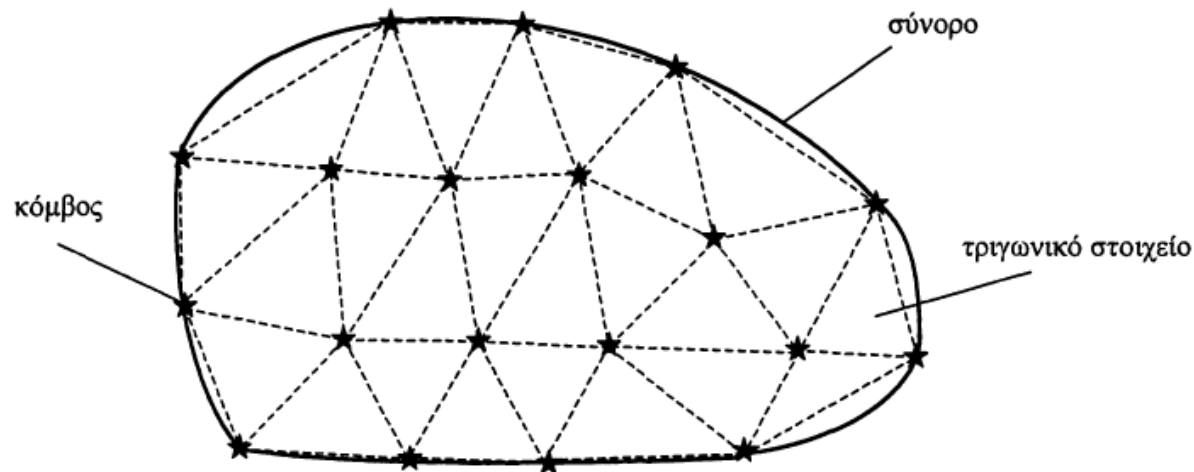


Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 9: Μέθοδος Πεπερασμένων Στοιχείων (μέρος Α)

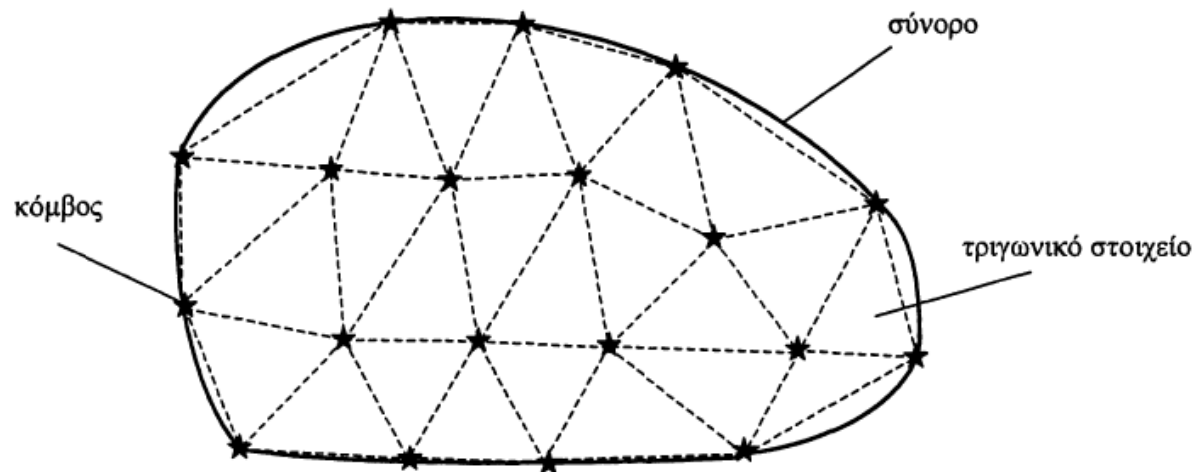
Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Εισαγωγή



- Στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ο φορέας χωρίζεται σε υποπεριοχές που ονομάζονται πεπερασμένα στοιχεία.
- Ορίζεται ένα πλέγμα (mesh) με κόμβους και πεπερασμένα στοιχεία που τους συνδέουν.
- Αναζητούνται οι μετακινήσεις (και στροφές) στους κόμβους του πλέγματος. Αυτά τα μεγέθη ονομάζονται βαθμοί ελευθερίας (β.ε.)
- Όλα τα υπόλοιπα μεγέθη (παραμορφώσεις, τάσεις, εντατικά) σε όλα τα υπόλοιπα σημεία του φορέα εκφράζονται συναρτήσει αυτών των επικόμβιων μετακινήσεων.

Εισαγωγή



- Για κάθε πεπερασμένο στοιχείο ορίζονται
 - Ένα διάνυσμα μετατοπίσεων $\{d\}$. Περιέχει τις (αρχικά άγνωστες) μετακινήσεις (και στροφές) στους κόμβους του στοιχείου.
 - Ένας πίνακας (μητρώο) δυσκαμψίας $[k]$. Περιέχει τη δυσκαμψία που εκδηλώνει το στοιχείο για κάθε β.ε. του.
 - Ένα διάνυσμα δράσεων $\{r\}$. Αυτό προκύπτει βρίσκοντας σημειακές δυνάμεις (και ροπές) στους β.ε. του στοιχείου, που ισοδυναμούν με την εξωτερική φόρτιση.

Εισαγωγή

- Τα $[k]$, $\{d\}$, $\{r\}$ είναι τοπικά μητρώα και διανύσματα, δηλαδή αφορούν ένα μόνο στοιχείο.
- Στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων ορίζονται επίσης αντίστοιχα καθολικά (global - g) μητρώα και διανύσματα:
 - $[K_g]$ είναι ο καθολικός πίνακας (ή μητρώο) δυσκαμψίας.
 - $\{u_g\}$ είναι το καθολικό διάνυσμα μετατοπίσεων (και στροφών)
 - $\{f_g\}$ είναι το καθολικό διάνυσμα ισοδύναμων δράσεων
- Τα παραπάνω καθολικά μεγέθη αφορούν όλο τον φορέα. Δηλαδή οι γραμμές και στήλες τους είναι όλοι οι β.ε. σε όλους τους κόμβους.
- Τα καθολικά μεγέθη προκύπτουν από άθροισμα των αντίστοιχων τοπικών.

Εισαγωγή

- Τα $[k]$, $\{d\}$, $\{r\}$ είναι τοπικά μητρώα και διανύσματα, δηλαδή αφορούν ένα μόνο στοιχείο.
- Τα $[K_g]$, $\{u_g\}$, $\{f_g\}$ είναι καθολικά μητρώα και διανύσματα, δηλαδή αφορούν όλο το φορέα.
- Τα καθολικά μεγέθη προκύπτουν από άθροισμα των αντίστοιχων τοπικών. Δηλαδή για να δημιουργήσουμε το $[K_g]$, πρέπει
 - i. να πάμε σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο
 - ii. να υπολογίσουμε το τοπικό $[k]$
 - iii. να προσθέσουμε το τοπικό $[k]$ στις σωστές γραμμές και στήλες του καθολικού $[K_g]$
- Ομοίως για τα $\{u_g\}$, $\{f_g\}$
- Έτσι δημιουργείται ένα γραμμικό σύστημα με τη μορφή: $[K_g]\{u_g\} = \{f_g\}$
- Λύνοντας αυτό το γραμμικό σύστημα βρίσκονται οι επικόμβιες μετατοπίσεις, από τις οποίες εξαρτώνται όλα τα υπόλοιπα μεγέθη.

Δυσκαμψία στοιχείου πλάκας

- Το δυνατό έργο των εσωτερικών δυνάμεων ενός στοιχείου πλάκας είναι

$$W_{int} = \int_{V_e} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV_e$$

Όγκος του
στοιχείου

- Από θεωρία Kirchhoff είχαμε την καταστατική σχέση

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\} = [E] \cdot \{\varepsilon\}$$

- Άρα το δυνατό έργο είναι

$$W_{int} = \int_{V_e} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} dV_e$$

όπου

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Δυσκαμψία στοιχείου πλάκας

- Από θεωρία Kirchhoff είχαμε για τις παραμορφώσεις

$$\varepsilon_x = -z \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} \quad \varepsilon_y = -z \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta y^2} \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x \vartheta y}$$

- Όπου είχαν οριστεί οι καμπυλότητες ως

$$\kappa_x = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} \quad \kappa_y = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta y^2} \quad \kappa_{xy} = -\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x \vartheta y}$$

- Άρα σε μητρική μορφή: $\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = z\{\kappa\}$

- Ολοκληρώνοντας από $z = -t/2$ ως $z = t/2$, το δυνατό έργο είναι

$$W_{int} = \frac{t^3}{12} \int_{A_e} \{\kappa\}^T [E] \{\kappa\} dA_e = \int_{A_e} \{\kappa\}^T [E_\kappa] \{\kappa\} dA_e$$

Εμβαδό του
στοιχείου

$$\text{Όπου } [E_\kappa] = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Δυσκαμψία στοιχείου πλάκας

- Θα εκφράσουμε το πεδίο μετατοπίσεων (εδώ βυθίσεων) με τη βοήθεια συναρτήσεων σχήματος: $w = [N]\{d\}$
- $\{d\}$ είναι διάνυσμα-στήλη με τις βυθίσεις w και στροφές $\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ στους κόμβους του στοιχείου
- $[N]$ είναι πίνακας-γραμμή με τις συναρτήσεις σχήματος
- Οι καμπυλότητες θα προκύψουν παραγωγίζοντας

$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\kappa\} = [B_k]\{d\}$$

- Όπου $[B_k]$ είναι μητρώο παραμόρφωσης που συνδέει τις καμπυλότητες σε οποιοδήποτε σημείο με τις επικόμβιες μετατοπίσεις και στροφές.

Δυσκαμψία στοιχείου πλάκας

- Άρα οι καμπυλότητες σε οποιοδήποτε σημείο εκφράζονται συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων και στροφών ως

$$\{\kappa\} = [B_{\kappa}]\{d\}$$

- Το μητρώο παραμόρφωσης $[B_{\kappa}]$ προκύπτει από παραγωγή των συναρτήσεων σχήματος.

- Το δυνατό έργο εσωτερικών δυνάμεων είναι

$$W_{int} = \int_{A_e} \{\kappa\}^T [E_{\kappa}] \{\kappa\} dA_e$$

- Αντικαθιστώντας προκύπτει η γενική μορφή του μητρώου δυσκαμψίας για ένα πεπερασμένο στοιχείο πλάκας

$$[k] = \int_{A_e} [B_{\kappa}]^T [E_{\kappa}] [B_{\kappa}] dA_e$$

Ισοδύναμες δράσεις στοιχείου

- Σε κάθε πεπερασμένο στοιχείο λαμβάνεται υπόψη εξωτερικό φορτίο $q(x, y)$ που
 - δρα στην μέση επιφάνεια της πλάκας
 - έχει κατακόρυφη διεύθυνση
 - μπορεί να προέρχεται απο επιφανειακές (π.χ. επικαλύψεις, κινητά φορτία) ή μαζικές δυνάμεις (π.χ. βάρος πλάκας)
- Το ισοδύναμο διάνυσμα δράσεων για το στοιχείο είναι

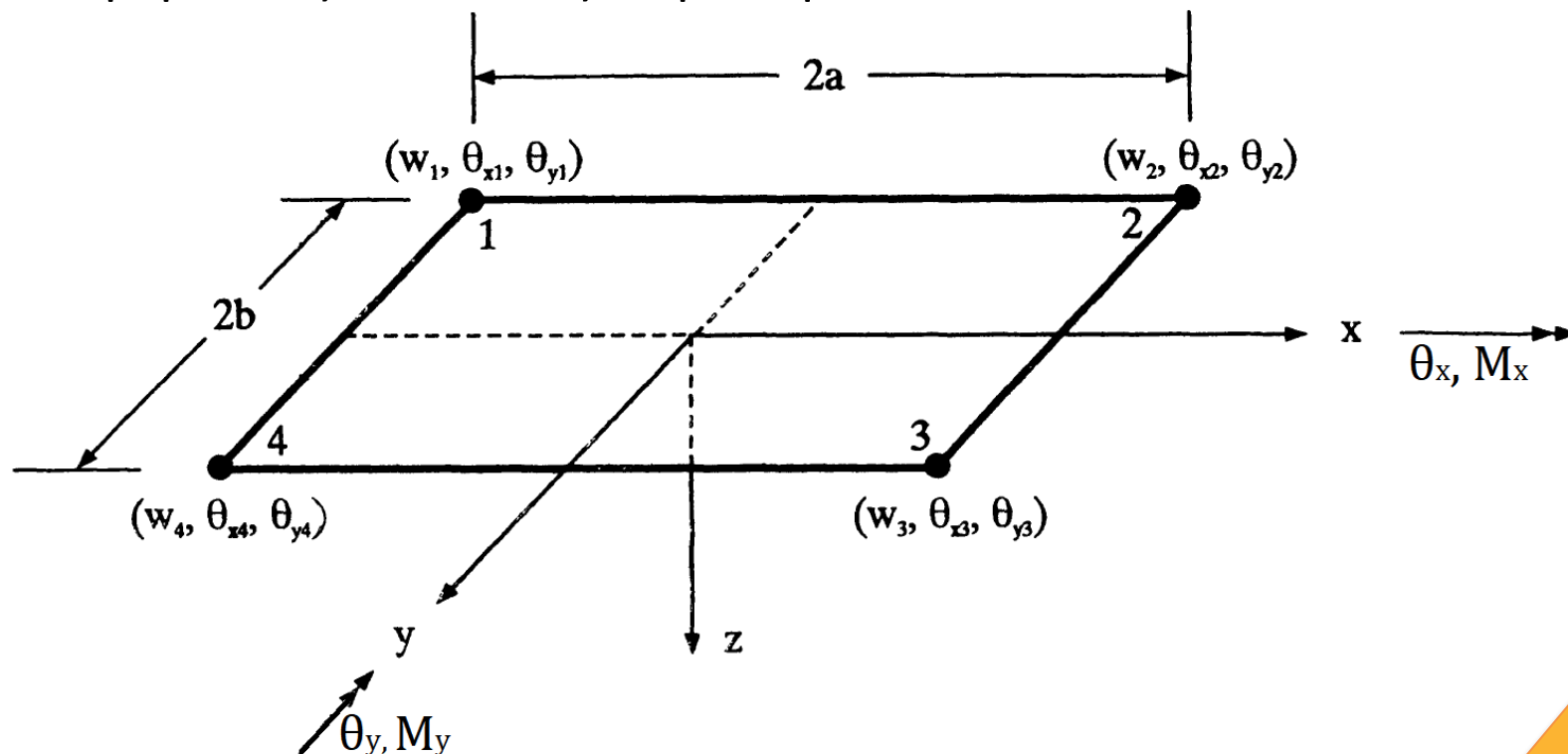
$$\{r\} = \int_{A_e} [N]^T q(x, y) dA_e$$

Ορθογωνικό στοιχείο - 4 κόμβοι και 12 β.ε.

- Σε κάθε κόμβο θεωρούμε ως β.ε. τη βύθιση w και τις στροφές (κλίσεις)

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x}$$

- Οι θετικές φορές των θ_x και θ_y είναι ίδιες με αυτές στη θεωρία Kirchhoff.
- Οι θετικές φορές των ροπών κάμψης M_x και M_y είναι ίδιες με των θ_x και θ_y , και διαφορετικές από αυτές στη θεωρία Kirchhoff.



Ορθογωνικό στοιχείο - 4 κόμβοι και 12 β.ε.

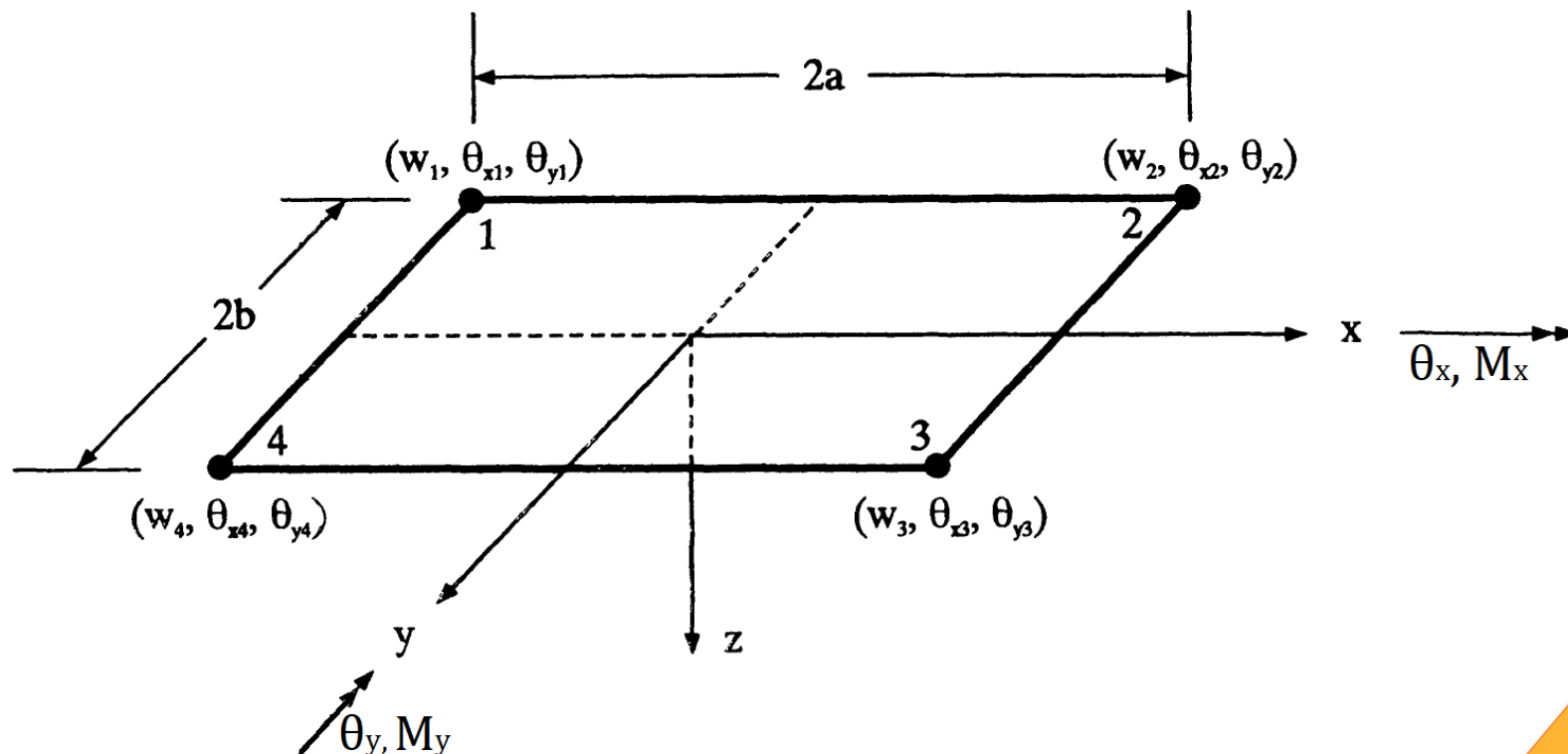
Για κάθε κόμβο i εισάγεται:

- Στο διάνυσμα μετατοπίσεων $\{d\}$

του στοιχείου το $\begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix}$

- Στο διάνυσμα δράσεων $\{r\}$ του

στοιχείου το $\begin{bmatrix} P_i \\ M_{xi} \\ M_{yi} \end{bmatrix}$



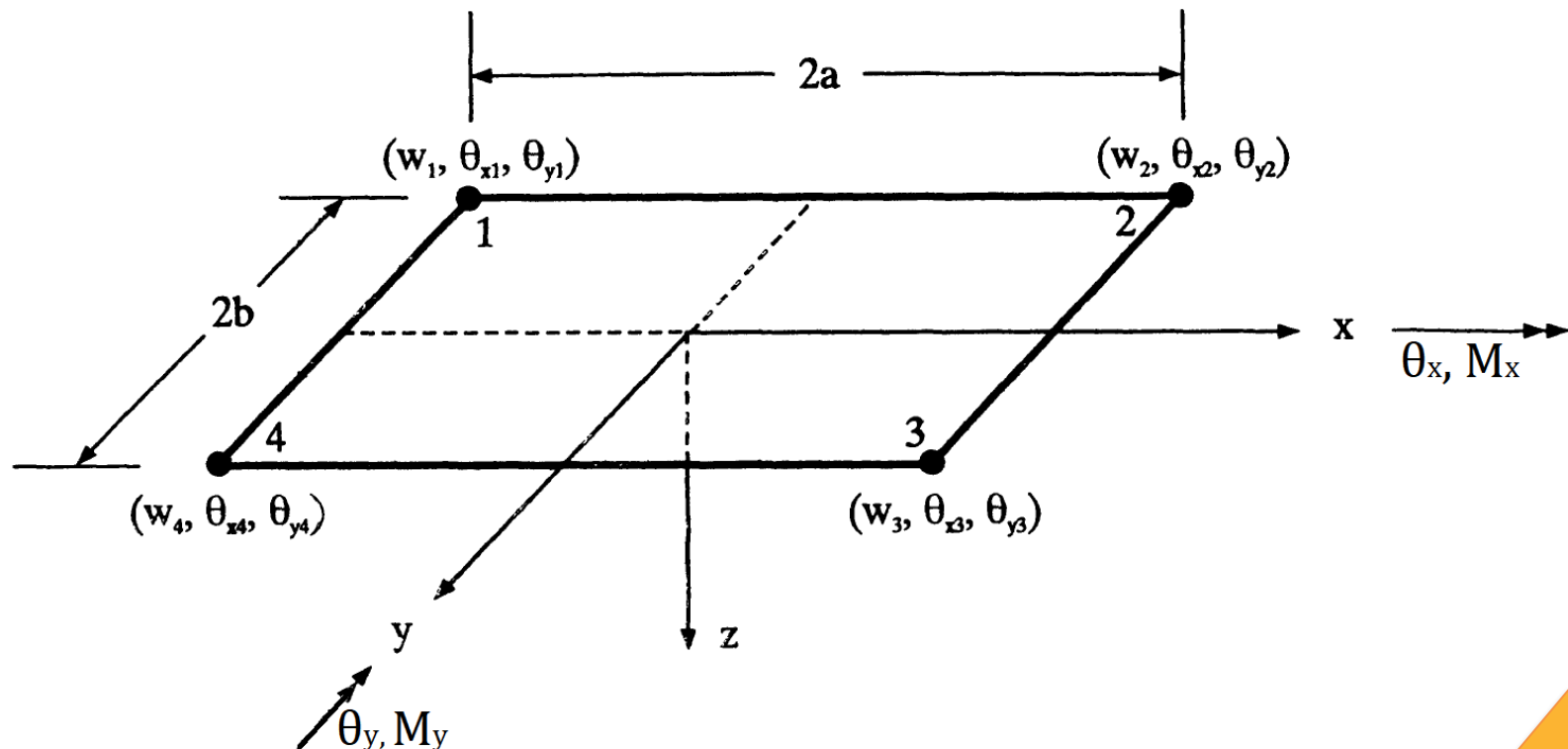
Ορθογωνικό στοιχείο - 4 κόμβοι και 12 β.ε.

- Διάνυσμα μετατοπίσεων $\{d\}$ του στοιχείου

$$\{d\} = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}]^T$$

- Διάνυσμα δράσεων $\{r\}$ του στοιχείου

$$\{r\} = [P_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad P_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad P_3 \quad M_{x3} \quad M_{y3} \quad P_4 \quad M_{x4} \quad M_{y4}]^T$$

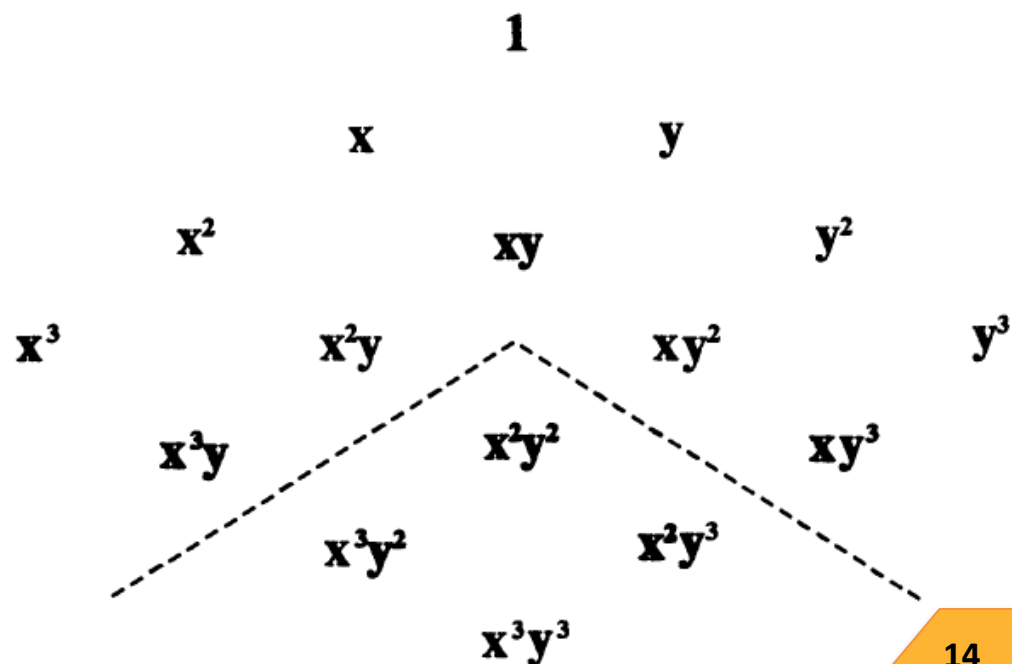


Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

- Η βύθιση w προσεγγίζεται ως πολυώνυμο

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

- Το πολυώνυμο έχει $4 \cdot 3 = 12$ συντελεστές που θα βρεθούν από τις επικόμβιες βυθίσεις και στροφές.
- Από το τρίγωνο Pascal, για να καταλήξουμε σε 12 όρους πρέπει να πάρουμε μονώνυμα μέχρι $4^{\text{ου}}$ βαθμού ως προς x και y ταυτόχρονα.
- Ωστόσο, δεν παίρνουμε ένα από αυτά τα μονώνυμα (x^2y^2) , γιατί τότε θα χρειαζόμασταν 13 επικόμβιες βυθίσεις και στροφές για να προσδιορίσουμε 13 συντελεστές.





Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

- Η βύθιση w προσεγγίζεται ως πολυώνυμο

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8x^2y + a_9xy^2 + a_{10}y^3 + a_{11}x^3y + a_{12}xy^3$$

- Σε μητρική μορφή γράφεται ως

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ a_{12} \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow w = [x]\{a\}$$

- Οι στροφές σε μητρική μορφή

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x \quad 2y \quad 0 \quad x^2 \quad 2xy \quad 3y^2 \quad x^3 \quad 3xy^2]\{\alpha\}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2x \quad y \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2xy \quad y^2 \quad 0 \quad 3x^2y \quad y^3]\{\alpha\}$$



Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]\{\alpha\}$$

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x \quad 2y \quad 0 \quad x^2 \quad 2xy \quad 3y^2 \quad x^3 \quad 3xy^2]\{\alpha\}$$

$$\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2x \quad y \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2xy \quad y^2 \quad 0 \quad 3x^2y \quad y^3]\{\alpha\}$$

- Αντικαθιστώ στις 3 παραπάνω σχέσεις στις συντεταγμένες των κόμβων του στοιχείου, δηλαδή $(x, y) = (\pm a, \pm b)$. Έτσι παίρνω τις εξής 12 εξισώσεις

$$\{d\} = \begin{bmatrix} 1 & -a & -b & a^2 & ab & b^2 & -a^3 & -a^2b & -ab^2 & -b^3 & a^3b & ab^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -a & -2b & 0 & a^2 & 2ab & 3b^2 & -a^3 & -3ab^2 \\ 0 & 1 & 0 & -2a & -b & 0 & 3a^2 & 2ab & b^2 & 0 & -3a^2b & -b^3 \\ 1 & a & -b & a^2 & -ab & b^2 & a^3 & -a^2b & ab^2 & -b^3 & -a^3b & -ab^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

- Που για συντομία γράφονται ως $\{d\} = [A]\{a\}$
- Δηλαδή ο πίνακας $[A]$ συνδέει τις επικόμβιες μετακινήσεις με τους άγνωστους συντελεστές $\{a\}$.



Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

- Ο πίνακας $[A]$ συνδέει τις επικόμβιες μετακινήσεις (και στροφές) με τους άγνωστους συντελεστές $\{a\}$.
- Ο πίνακας $[A]$ αντιστρέφεται, οπότε μπορούμε να απαλοίσουμε τους άγνωστους συντελεστές γράφοντας τους συναρτήσεις των επικόμβιων μετατοπίσεων

$$\{a\} = [A]^{-1}\{d\}$$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{8a^3b^3} \begin{bmatrix} 2a^3b^3 & a^3b^4 & a^4b^3 & 2a^3b^3 & a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & a^4b^3 \\ -3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & -3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 \\ -3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & -3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 \\ 0 & 0 & -a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & -a^2b^3 \\ 4a^2b^2 & a^2b^3 & a^3b^2 & -4a^2b^2 & -a^2b^3 & a^3b^2 & 4a^2b^2 & -a^2b^3 & -a^3b^2 & -4a^2b^2 & a^2b^3 & -a^3b^2 \\ 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 \\ b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & b^3 & 0 & ab^3 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 \\ 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ a^3 & a^3b & 0 & a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 \\ -b^2 & 0 & -ab^2 & b^2 & 0 & -ab^2 & -b^2 & 0 & ab^2 & b^2 & 0 & ab^2 \\ -a^2 & -a^2b & 0 & a^2 & a^2b & 0 & -a^2 & a^2b & 0 & a^2 & -a^2b & 0 \end{bmatrix}$$

Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

- Άρα από τα προηγούμενα η βύθιση εκφράζεται ως

$$w = [x]\{a\} = [x][A]^{-1}\{d\}$$

- Επιπλέον, οι συναρτήσεις σχήματος συνδέουν τη βύθιση με τις επικόμβιες μετατοπίσεις (και στροφές)

$$w = N_1 w_1 + N_{\theta_x}^1 \theta_{x1} + N_{\theta_y}^1 \theta_{y1} + N_2 w_2 + N_{\theta_x}^2 \theta_{x2} + N_{\theta_y}^2 \theta_{y2} + N_3 w_3 + N_{\theta_x}^3 \theta_{x3} + N_{\theta_y}^3 \theta_{y3} \\ + N_4 w_4 + N_{\theta_x}^4 \theta_{x4} + N_{\theta_y}^4 \theta_{y4}$$

- Σε μητρική μορφή

$$w = [N] \{d\}$$

$(1 \times 1) \quad (1 \times 12) \quad (12 \times 1)$

- Συγκρίνοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι ο πίνακας-γραμμή που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος είναι

$$[N] = [x][A]^{-1}$$



Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

- Ο πίνακας-γραμμή που περιέχει τις συναρτήσεις σχήματος είναι

$$[N] = [x][A]^{-1}$$

- Έτσι οι συναρτήσεις σχήματος μπορούν να γραφτούν ως

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + x'_i x')(1 + y'_i y')[(2 + x'_i x'(1 - x'_i x') + y'_i y'(1 - y'_i y'))]$$

$$N_{\theta_x}^i = -\frac{by'_i}{8}(1 + x'_i x')(1 + y'_i y')(1 + y'_i y')(1 - y'_i y')$$

$$N_{\theta_y}^i = -\frac{ax'_i}{8}(1 + x'_i x')(1 + x'_i x')(1 - x'_i x')(1 + y'_i y')$$

- Όπου

$$i = 1, 2, 3, 4$$

$$x' = x/a$$

$$y' = y/b$$



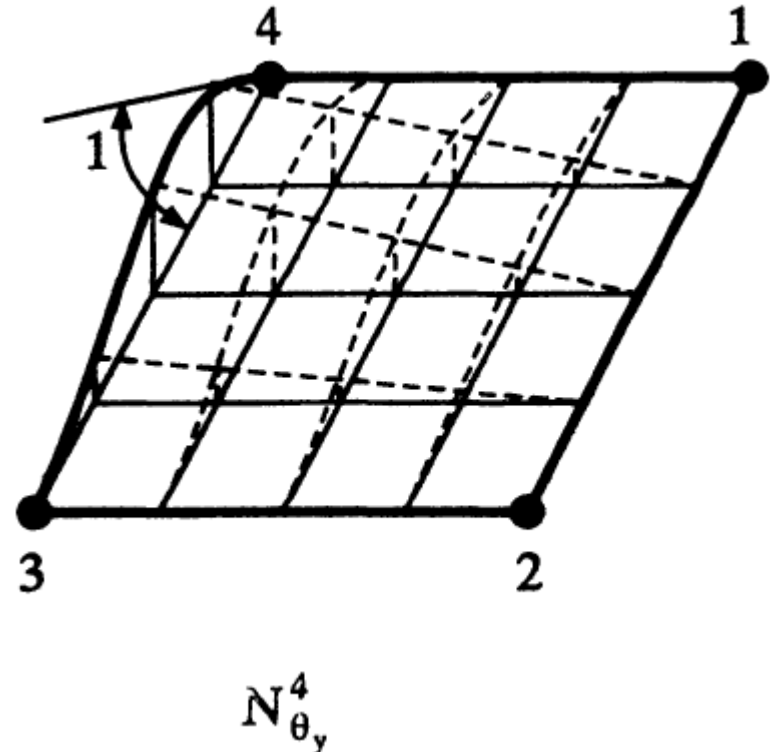
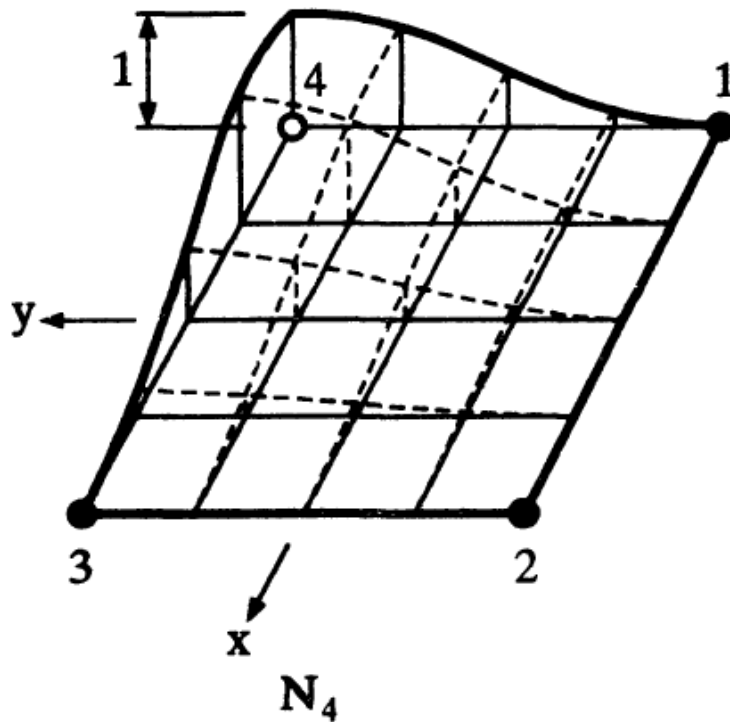
Ορθογωνικό στοιχείο: συναρτήσεις σχήματος

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + x'_i x') (1 + y'_i y') [(2 + x'_i x' (1 - x'_i x') + y'_i y' (1 - y'_i y'))]$$

$$N_{\theta_x}^i = -\frac{by'_i}{8} (1 + x'_i x') (1 + y'_i y') (1 + y'_i y') (1 - y'_i y')$$

$$N_{\theta_y}^i = -\frac{ax'_i}{8} (1 + x'_i x') (1 + x'_i x') (1 - x'_i x') (1 + y'_i y')$$

• Π.χ



Ορθογωνικό στοιχείο: μητρώο παραμόρφωσης

- Βύθιση

$$w = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]\{\alpha\}$$

- Διάνυσμα καμπυλοτήτων

$$\{\kappa\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

$$\Rightarrow \{\kappa\} = [\beta]\{\alpha\} \Rightarrow \{\kappa\} = [\beta][A]^{-1}\{d\}$$

- Άρα το μητρώο παραμόρφωσης $[B_\kappa] = [\beta][A]^{-1}$ εκφράζει τις καμπυλότητες συναρτήσει των επικόμβιων μετατοπίσεων

$$\begin{matrix} \{\kappa\} & = & [B_\kappa] & \{d\} \\ (3 \times 1) & & (3 \times 12) & (12 \times 1) \end{matrix}$$

Ορθγωνικό στοιχείο: μητρώο δυσκαμψίας

- Το μητρώο δυσκαμψίας είναι

$$[k] = \int_{-b}^b \int_{-a}^a [B_\kappa]^T [E_\kappa] [B_\kappa] dx dy$$

(12×12) (12×3) (3×3) (3×12)

- Το παραπάνω ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί αναλυτικά, οπότε

$$[k] = \frac{D}{60ab} \begin{bmatrix} 60p + 60p^{-1} + 42 - 12\nu & b(60p + 6 + 24\nu) & a(60p^{-1} + 6 + 24\nu) & 30p - 60p^{-1} - 42 + 12\nu & k_{4,2} & -k_{4,3} & -30p - 30p^{-1} + 42 - 12\nu & -k_{7,2} & -k_{7,3} & -60p + 30p^{-1} - 42 + 12\nu & -k_{10,2} & k_{10,3} \\ \theta_{x1} & b^2(80p + 16 - 16\nu) & 60\nu ab & b(30p - 6 - 24\nu) & b^2(40p - 16 + 16\nu) & -k_{5,3} & b(-30p + 6 - 6\nu) & b^2(20p + 4 - 4\nu) & k_{8,3} & b(-60p - 6 + 6\nu) & b^2(40p - 4 + 4\nu) & -k_{11,3} \\ \theta_{y1} & a^2(80p^{-1} + 16 - 16\nu) & a(-60p^{-1} - 6 + 6\nu) & 0 & a^2(40p^{-1} - 4 + 4\nu) & a(-30p^{-1} + 6 - 6\nu) & 0 & a^2(20p^{-1} + 4 - 4\nu) & a(30p^{-1} - 6 - 24\nu) & 0 & a^2(40p^{-1} - 16 + 16\nu) \end{bmatrix} \dots$$

$$p = a^2/b^2$$



Ορθογωνικό στοιχείο: μητρώο δυσκαμψίας

$w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3} \quad w_4 \quad \theta_{x4} \quad \theta_{y4}$

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \\ -k_{3,1} & -k_{3,2} & k_{3,3} \\ \dots & k_{10,1} & k_{10,2} & -k_{10,3} & k_{1,1} & & & & \\ k_{11,1} & k_{11,2} & -k_{11,3} & -k_{2,1} & k_{2,2} & & & & \\ -k_{12,1} & -k_{12,2} & k_{12,3} & -k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & & & \\ k_{7,1} & k_{7,2} & -k_{7,3} & k_{4,1} & -k_{4,2} & -k_{4,3} & k_{1,1} & & \\ k_{8,1} & k_{8,2} & -k_{8,3} & -k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & -k_{2,1} & k_{2,2} & \\ -k_{9,1} & -k_{9,2} & k_{9,3} & -k_{6,1} & k_{6,2} & k_{6,3} & k_{3,1} & -k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \quad \text{(συμμετρικό)}$$

Ορθογωνικό στοιχείο: ισοδύναμες δράσεις

- Το διάνυσμα ισοδύναμων δράσεων έχει τη μορφή
 $\{r\} = [P_1 \quad M_{x1} \quad M_{y1} \quad P_2 \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad P_3 \quad M_{x3} \quad M_{y3} \quad P_4 \quad M_{x4} \quad M_{y4}]^T$
- Και υπολογίζεται ως

$$\{r\} = \int_{A_e} [N]^T q(x, y) dA_e$$

- Για τις συναρτήσεις σχήματος δείξαμε ότι $[N] = [x][A]^{-1}$, οπότε

$$\{r\} = [A]^{-T} \int_{-b}^b \int_{-a}^a [x]^T q(x, y) dx dy$$

- Για ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο $q(x, y) = q_0$ η παραπάνω δίνει

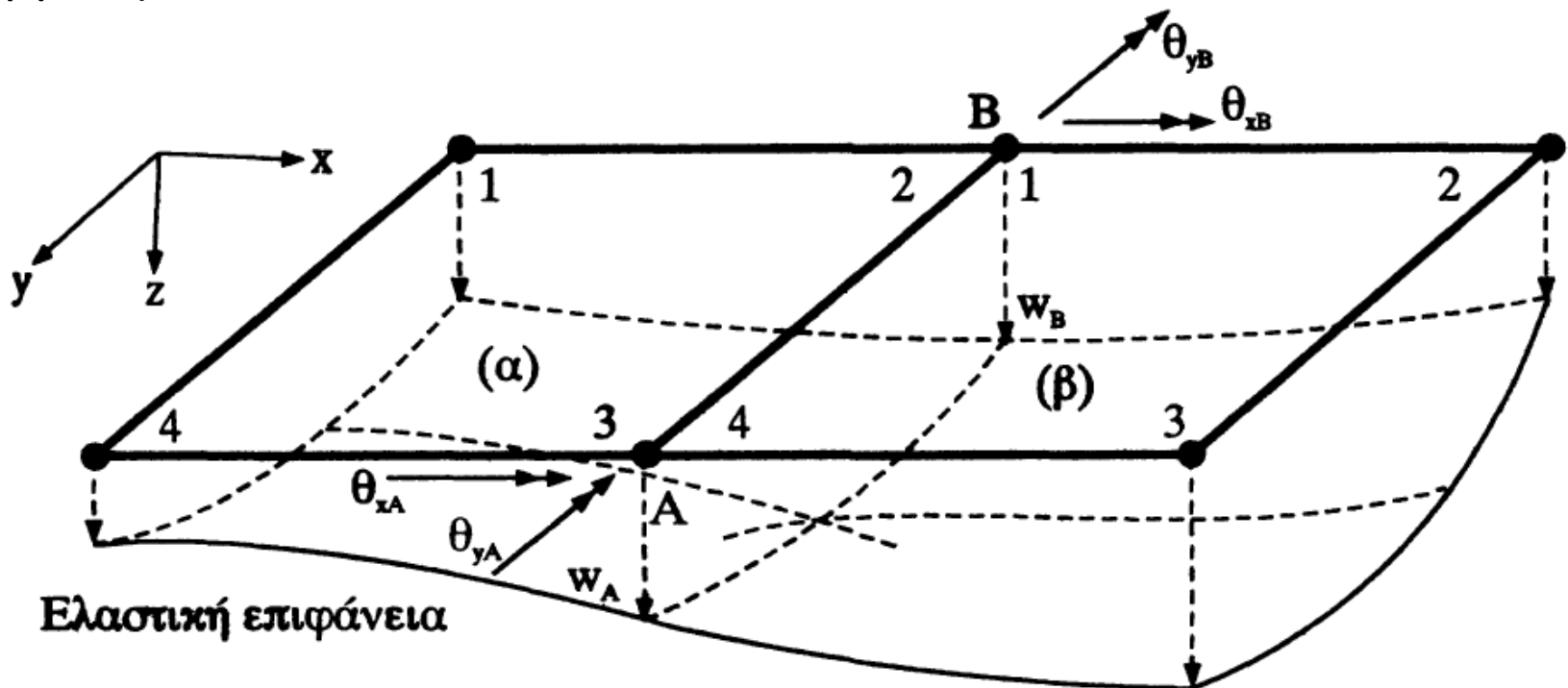
$$\{r\} = q_0 ab \left[1 \quad \frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \quad 1 \quad \frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad -\frac{a}{3} \quad 1 \quad -\frac{b}{3} \quad \frac{a}{3} \right]^T$$

- Δηλαδή έχουμε και ισοδύναμες ροπές! Αν παίρναμε το στατικά ισοδύναμο φορτίο οι ισοδύναμες ροπές θα αγνοούνταν.



Ιδιότητες ορθογωνικού στοιχείου (4κ,12βε)

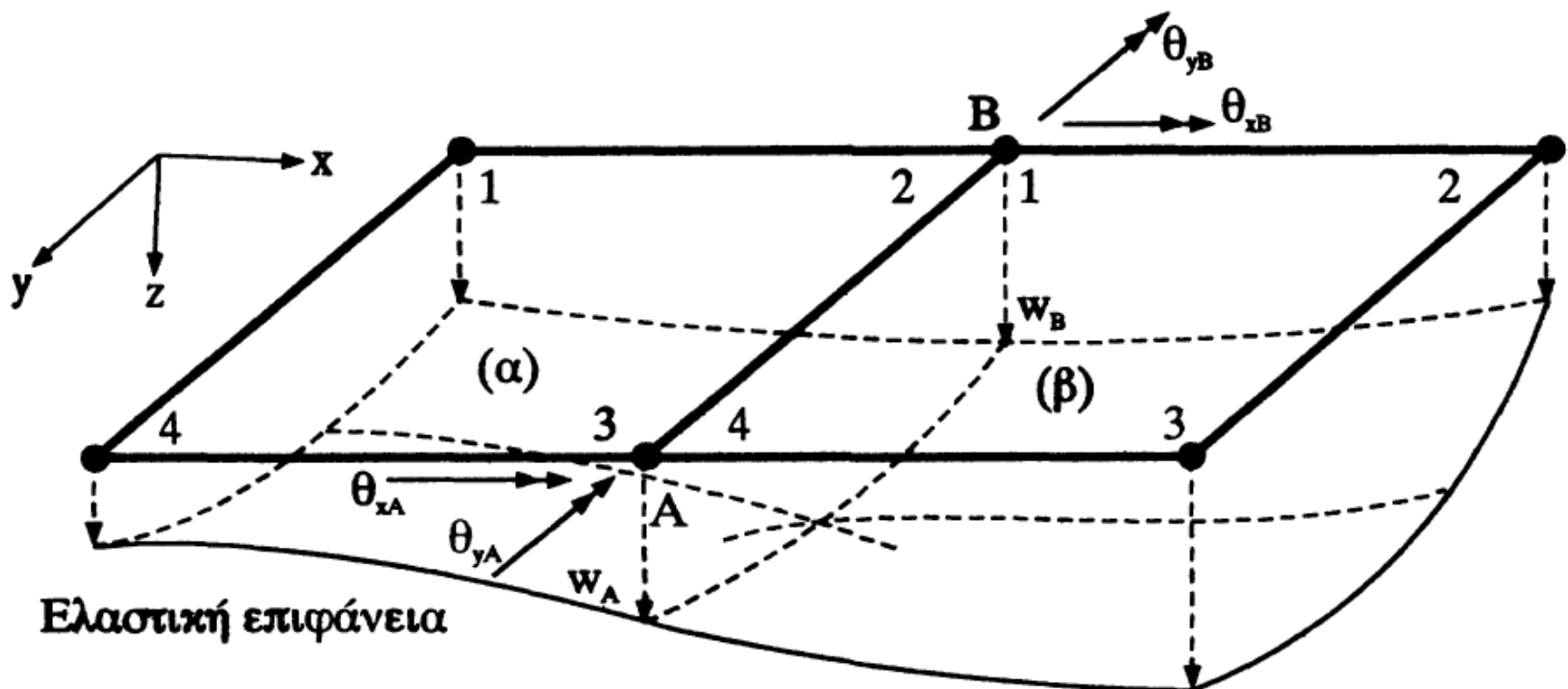
- Μας ενδιαφέρει η συμβιβαστικότητα των μετατοπίσεων και στροφών στις διεπιφάνειες μεταξύ γειτονικών στοιχείων.
- Δηλαδή αν η βύθιση w και οι στροφές θ_x, θ_y δύο γειτονικών στοιχείων είναι ίσες στις κοινές τους διεπιφάνειες.
- Στην μέθοδο ΠΣ η συμβιβαστικότητα των w, θ_x, θ_y ισχύει πάντα στους κόμβους.





Ιδιότητες ορθογωνικού στοιχείου (4κ,12βε)

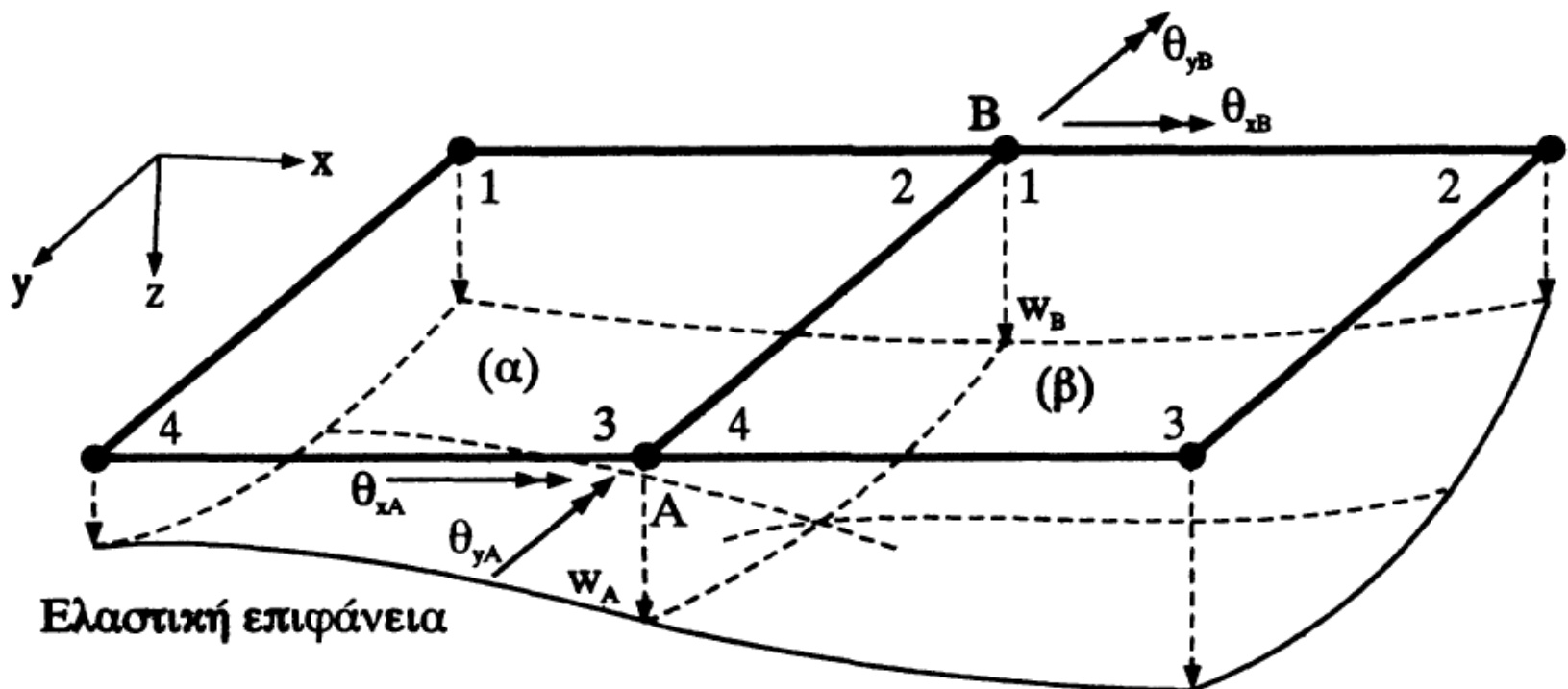
- Οι βυθίσεις είναι επίσης συνεχείς στις διεπιφάνειες.
- Αυτό όμως δεν ισχύει και για τις στροφές.
- Στο σχήμα φαίνεται ότι σε διεπιφάνεια κάθετη στον άξονα x , η θ_x είναι συνεχής, αλλά η θ_y όχι.
- Επομένως το στοιχείο δεν είναι **σύμμορφο**.





Ιδιότητες ορθογωνικού στοιχείου (4κ,12βε)

- Οι στροφές δεν είναι πάντα συνεχείς, άρα το στοιχείο δεν είναι σύμμορφο.
- Ωστόσο είναι απλό, έχει αναλυτικές σχέσεις υπολογισμού των ζητούμενων μητρώων και διανυσμάτων και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα.
- Επίσης έχει καλή συμπεριφορά σε πλάκες με μεταβλητό πάχος. Έχουν αναπτυχθεί σύμμορφα στοιχεία, που όμως είναι ακατάλληλα για μεταβλητά πάχη.



Σύνθεση γραμμικού συστήματος

- Για κάθε πεπερασμένο στοιχείο του φορέα, υπολογίζουμε το μητρώο δυσκαμψίας $[k_e]$ και το διάνυσμα ισοδύναμων δράσεων $\{r_e\}$.
- Έπειτα πρέπει να συνθέσουμε το καθολικό μητρώο δυσκαμψίας $[K_g]$ και το καθολικό διάνυσμα ισοδύναμων δράσεων $\{f_g\}$.
- Η διαδικασία λέγεται Finite Element Assembly. Εδώ θα παρουσιαστεί στην πιο απλή της μορφή.
- Για κάθε στοιχείο ορίζεται ένας boolean πίνακας $[L_e]$ που αντιστοιχίζει μεταξύ των β.ε. του στοιχείου και όλων των β.ε. του φορέα. Π.χ.

$$[L_e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε έναν (τοπικό) β.ε. του στοιχείου.
- Κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν (καθολικό) β.ε. του φορέα.
- Κάποιο στοιχείο του L_{ij}^e είναι 1, μόνο αν ο τοπικός β.ε. i συμπίπτει με τον καθολικό β.ε. j .

Σύνθεση γραμμικού συστήματος

- Η σύνθεση των καθολικών διανυσμάτων και πινάκων γίνεται με την βοήθεια των πινάκων αντιστοίχισης L .
- Αριθμούμε τα πεπερασμένα στοιχεία ως $e = 1, 2, \dots, n_e$
- Καθολικό διάνυσμα ισοδύναμων δράσεων

$$\{f_g\} = \sum_{e=1}^{n_e} [L_e]^T \{r_e\}$$

- Καθολικό μητρώο δυσκαμψίας

$$[K_g] = \sum_{e=1}^{n_e} [L_e]^T [k_e] [L_e]$$

- Αντίστοιχα, μόλις λυθεί το σύστημα $[K_g]\{u_g\} = \{f_g\}$, μπορούμε να βρούμε τις βυθίσεις και στροφές του στοιχείου e ως
$$\{d_e\} = [L_e]\{u_g\}$$

Συνοριακές συνθήκες

- Η επιβολή συνοριακών συνθηκών είναι πολύ εύκολη στη μέθοδο ΠΣ.
- Στους κόμβους με απλή έδραση:

$$w_i = 0$$

- Στους κόμβους με πάκτωση:

$$w_i = 0 \quad \theta_{xi} = 0 \quad \theta_{yi} = 0$$

- Για ελεύθερη παρειά, δεν χρειάζεται να κάνουμε κάτι.
- Οι παραπάνω δευσμεύσεις βυθίσεων και στροφών, επιβάλλονται τροποποιώντας το γραμμικό σύστημα

$$[K_g]\{u_g\} = \{f_g\}$$

- Τα ίδια ισχύουν για στηριγμένους εσωτερικούς κόμβους.
 - Δεν χρειάζεται να γίνει διάκριση μεταξύ εσωτερικών – συνοριακών κόμβων, όπως στη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών.
 - Δεσμεύονται κατευθείαν οι αντίστοιχοι βαθμοί ελευθερίας.

Συνοριακές συνθήκες

- Οι β.ε. στους οποίους επιβάλλεται κάποια δέσμευση βύθισης ή στροφής ονομάζονται **δεσμευμένοι** (constrained – c).
- Οι υπόλοιποι β.ε. ονομάζονται **ελεύθεροι** (free – f)
- Το γραμμικό σύστημα $[K_g]\{u_g\} = \{f_g\}$ μπορεί να χωριστεί με βάση τους ελεύθερους και δεσμευμένους β.ε ως

$$\begin{bmatrix} K_{ff} & K_{fc} \\ K_{cf} & K_{cc} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_f \\ u_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_f \\ f_c \end{Bmatrix}$$

- Από την πρώτη γραμμή παίρνουμε το γραμμικό σύστημα που τελικά θα πρέπει να λύσουμε

$$[K_{ff}]\{u_f\} = \{f_f\} - [K_{fc}] \cdot \{u_c = 0\} \Rightarrow [K_{ff}]\{u_f\} = \{f_f\}$$

- Οι παραπάνω αλγεβρικές πράξεις, πρακτικά ισοδυναμούν με διαγραφή των γραμμών και στηλών που αντιστοιχούν στους δεσμευμένους β.ε. Από τα $[K_g]$, $\{u_g\}$, $\{f_g\}$

Μετά την επίλυση συστήματος

- Στη Μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών μπορούσαμε να υπολογίσουμε τη βύθιση στους κόμβους μόνο.
- Αντίθετα, στη Μέθοδο Πεπερασμένων Στοιχείων μπορούμε να υπολογίσουμε τη βύθιση $w(x, y)$ σε οποιαδήποτε θέση.
- Έστω ότι ψάχνουμε τη βύθιση σε σημείο (x, y) εντός κάποιου πεπερασμένου στοιχείου e .
- Από την επίλυση γραμμικού συστήματος υπολογίζονται όλες οι μετακινήσεις και στροφές στους κόμβους $\{u_g\}$.
- Μετακινήσεις και στροφές στους κόμβους του στοιχείου e :
$$\{d\} = [L_e] \cdot \{u_g\}$$
- Το σημείο (x, y) πρέπει να είναι εκφρασμένο ως προς το τοπικό σύστημα συντεταγμένων του στοιχείου.
 - Για το στοιχείο 4 κόμβων - 12 β.ε., πρέπει $-\alpha < x < \alpha$ και $-\beta < y < \beta$

Μετά την επίλυση συστήματος

- Για το σημείο (x, y) υπολογίζω τον πίνακα-γραμμή
 $[x] = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3]$
- Και τον πίνακα $[A]^{-1}$

$$[A]^{-1} = \frac{1}{8a^3b^3} \begin{bmatrix} 2a^3b^3 & a^3b^4 & a^4b^3 & 2a^3b^3 & a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & -a^4b^3 & 2a^3b^3 & -a^3b^4 & a^4b^3 \\ -3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 & 3a^2b^3 & -a^2b^4 & -a^3b^3 & -3a^2b^3 & a^2b^4 & -a^3b^3 \\ -3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & -3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & -a^4b^2 & 3a^3b^2 & -a^3b^3 & a^4b^2 \\ 0 & 0 & -a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & a^2b^3 & 0 & 0 & -a^2b^3 \\ 4a^2b^2 & a^2b^3 & a^3b^2 & -4a^2b^2 & -a^2b^3 & a^3b^2 & 4a^2b^2 & -a^2b^3 & -a^3b^2 & -4a^2b^2 & a^2b^3 & -a^3b^2 \\ 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & -a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 & 0 & a^3b^2 & 0 \\ b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & -b^3 & 0 & ab^3 & b^3 & 0 & ab^3 \\ 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 \\ 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 & 0 & a^2b^2 & 0 & 0 & -a^2b^2 & 0 \\ a^3 & a^3b & 0 & a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 & -a^3 & a^3b & 0 \\ -b^2 & 0 & -ab^2 & b^2 & 0 & -ab^2 & -b^2 & 0 & ab^2 & b^2 & 0 & ab^2 \\ -a^2 & -a^2b & 0 & a^2 & a^2b & 0 & -a^2 & a^2b & 0 & a^2 & -a^2b & 0 \end{bmatrix}$$

- Η βύθιση είναι: $w = [x] \cdot [A]^{-1} \cdot \{d\}$
- Για το στοιχείο 4 κόμβων - 12 β.ε., ο $[A]^{-1}$ είναι σταθερός και ανεξάρτητος του σημείου (x, y)

Μετά την επίλυση συστήματος

- Όμοια υπολογίζω τις ροπές. Για το σημείο (x, y) υπολογίζω τον πίνακα

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix}$$

- Οι ροπές εκφράζονται συναρτήσει των καμπυλοτήτων

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = D_\kappa \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \{M\} = [E_\kappa] \{\kappa\}$$

- Οι καμπυλότητες έχουν εκφραστεί ως

$$\{\kappa\} = [\beta][A]^{-1}\{d\}$$

- Άρα οι ροπές είναι

$$\{M\} = [E_\kappa][\beta][A]^{-1}\{d\}$$