



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



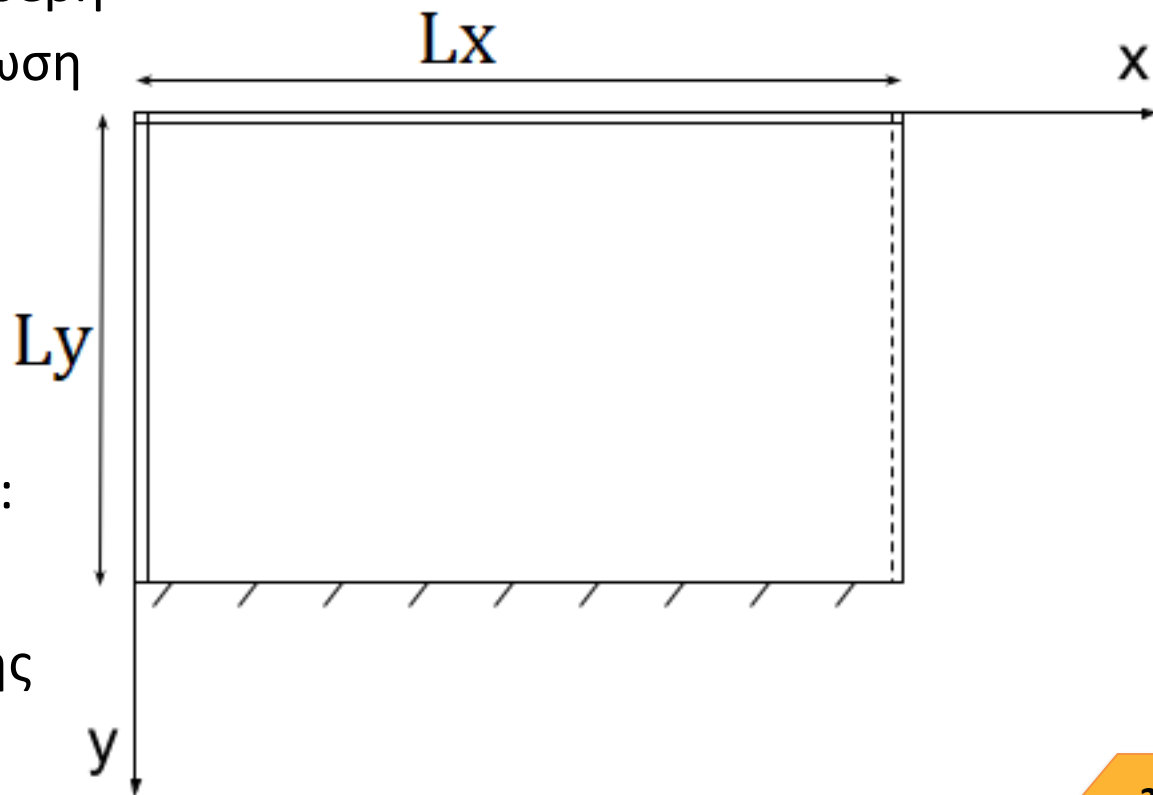
Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 7: Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (μέρος Β)

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Παράδειγμα 1

- Στην πλάκα του σχήματος με $L_x = 3m, L_y = 2m$ ασκείται φορτίο $q(x, y) = q_{min} + (q_{max} - q_{min}) \cdot \frac{x}{L_x} = 10 + (11 - 10) \cdot x/3$, ενώ οι συνοριακές συνθήκες είναι:
 - Παριές $x = 0, y = 0$: Απλή έδραση
 - Παριά $x = L_x$: Ελεύθερη
 - Παριά $y = L_y$: Πάκτωση
- Δίνονται
 - $D = 5000 \text{ kNm}$
 - $\nu = 0,3$
- Να βρεθούν με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών:
 - α) Η βύθιση της πλάκας
 - β) Η ροπή M_x κατα μήκος της ευθείας $y = L_y/2$



Παράδειγμα 1

- Επιλογή καννάβου: θέλω να πάρω 4×3 κόμβους για να καλύψω την επιφάνεια της πλάκας. Ισχύει

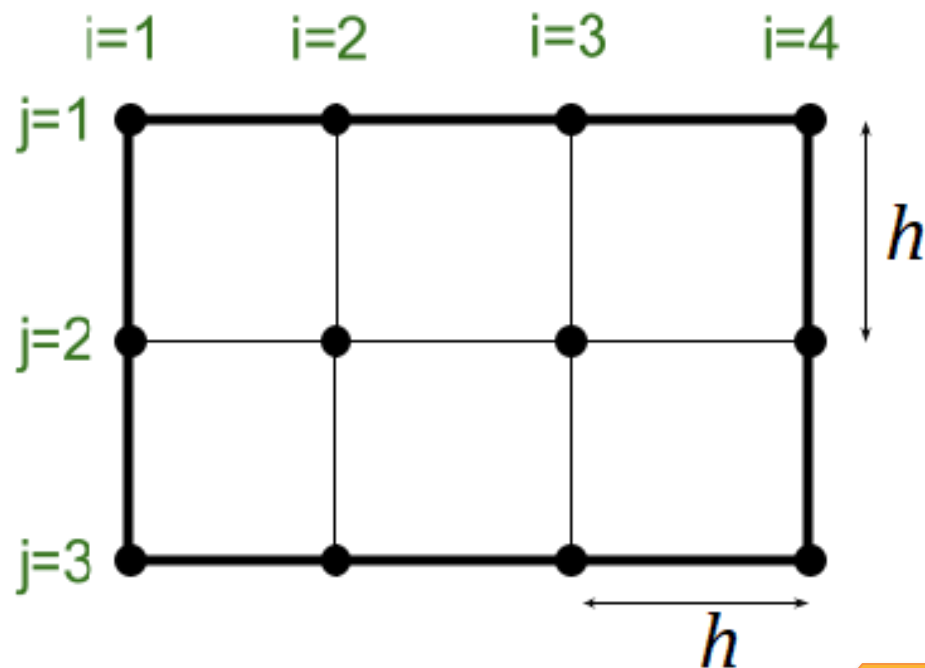
$$h = \Delta x = \Delta y = \frac{L_x}{3} = \frac{L_y}{2} = 1\text{m}$$

- Πρακτικά είναι πολύ λίγοι για επαρκή ακρίβεια. Θα έπρεπε να πάρω πολύ περισσότερους.

- Από τους άβακες παρατηρώ ότι για κάθε άγνωστο $w_{i,j}$ χρειαζόμαστε κόμβους σε απόσταση $i \pm 2, j \pm 2$

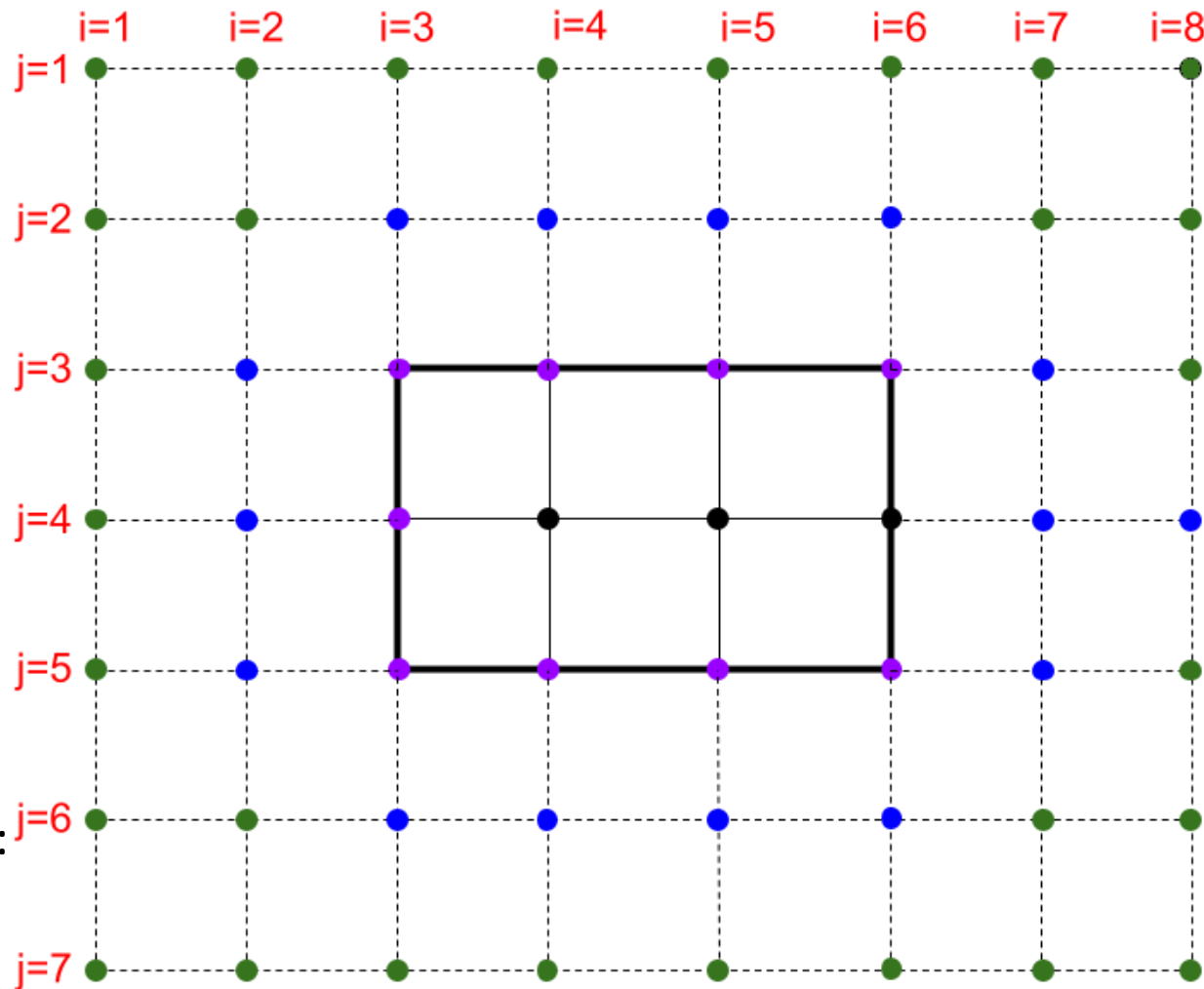
- Άρα οι κόμβοι στον κάνναβο του σχήματος δεν αρκούν.

- Θα χρειαστώ και βοηθητικούς κόμβους εκτός της πλάκας, συγκεκριμένα σε 2 στρώσεις.



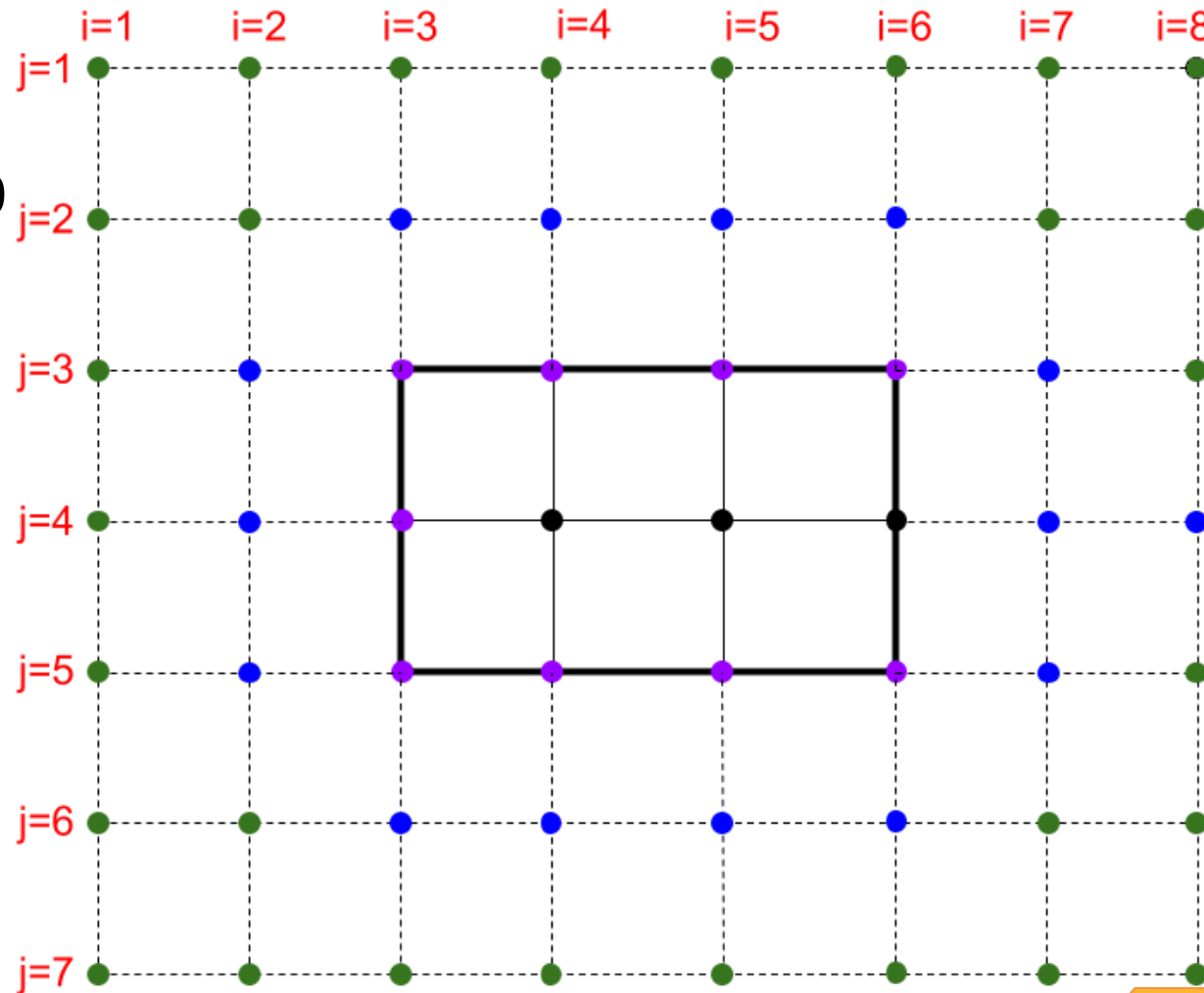
Παράδειγμα 1: κάνναβος

- Θα χρησιμοποιήσω τον εξής κάνναβο με $n_i = 8$, $n_j = 7$ και αποστάσεις h .
- Κόμβοι με **μαύρο** χρώμα: πραγματικοί κόμβοι όπου η w είναι άγνωστη.
- Κόμβοι με **μωβ** χρώμα: πραγματικοί κόμβοι όπου $w = 0$.
- Κόμβοι με **μπλε** χρώμα: φανταστικοί κόμβοι των οποίων τα w εμφανίζονται στις εξισώσεις των πραγματικών κόμβων.
- Κόμβοι με **πράσινο** χρώμα: φανταστικοί κόμβοι των οποίων τα w δεν εμπλέκονται πουθενά



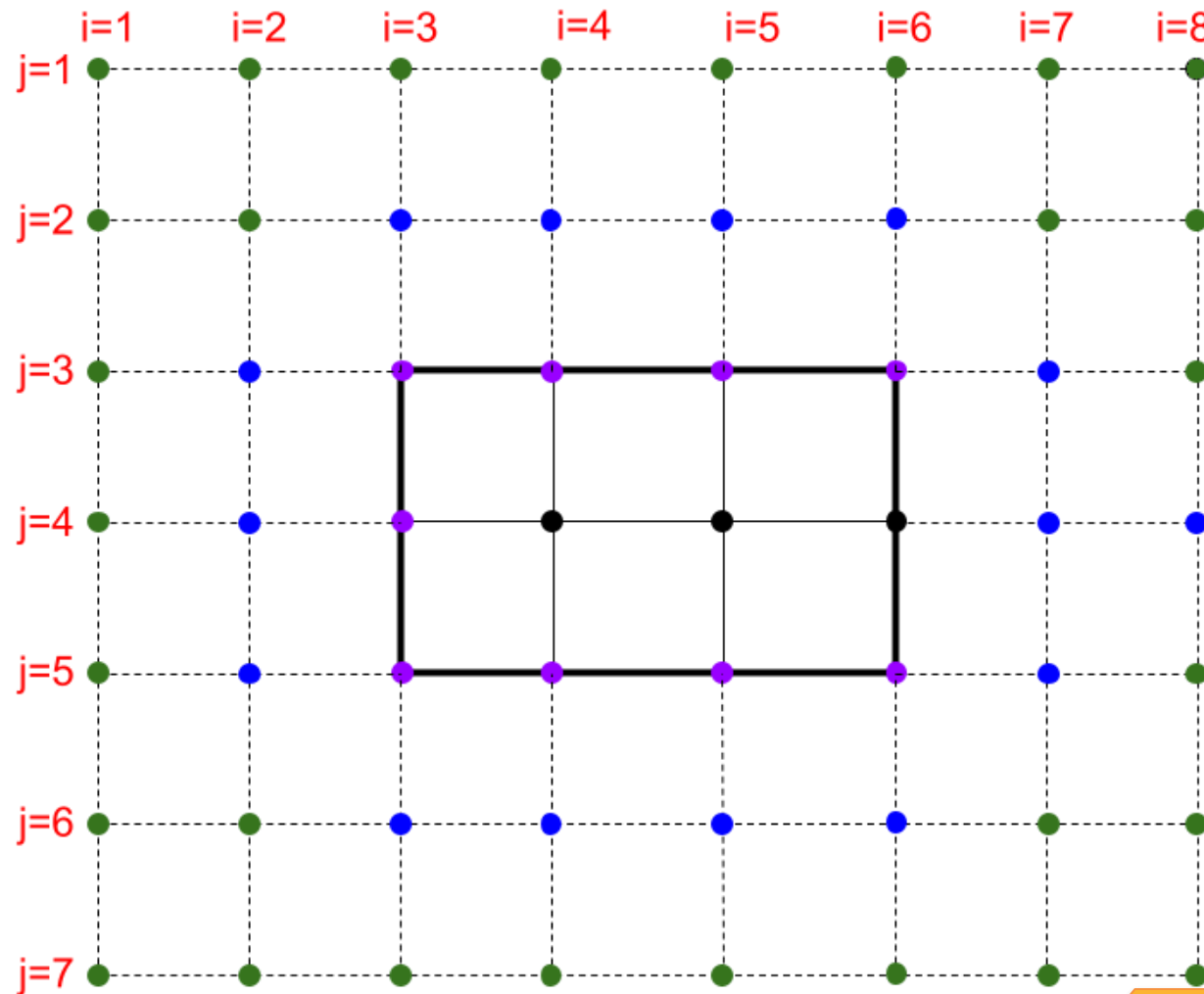
Παράδειγμα 1: κάνναβος

- Βυθίσεις των πραγματικών κόμβων που είναι $w_{i,j} = 0$ λόγω των συνοριακών στηρίξεων:
 - Παρειές με απλή έδραση:
 - $w_{3,3} = w_{4,3} = w_{5,3} = 0$
 - $w_{6,3} = 0$
 - $w_{3,4} = 0$
 - Παρειές με πάκτωση:
 - $w_{4,5} = w_{5,5} = 0$
 - $w_{6,5} = w_{3,5} = 0$
- Στους γωνιακούς κόμβους όπου έχουμε στηρίξεις από 2 παρειές, ισχύουν οι πιο αυστηρές δεσμεύσεις.



Παράδειγμα 1: κάνναβος

- Οι γραμμικές εξισώσεις από τη διαφορική εξίσωση ισχύουν για τους πραγματικούς κόμβους όπου η βύθιση $w_{i,j}$ είναι άγνωστη:
 - Κόμβοι στο εσωτερικό της πλάκας: $N_{4,4}$, $N_{5,4}$
 - Κόμβοι σε ελεύθερες παρειές: $N_{6,4}$
- Στους υπόλοιπους κόμβους της πλάκας υπάρχει απλή έδραση ή πάκτωση. Άρα $w_{i,j} = 0$.
- Επομένως θα γραφτούν 3 γραμμικές εξισώσεις, χρησιμοποιώντας το stencil της διαφορικής εξίσωσης.



Παράδειγμα 1: άγνωστοι

- Εκτός από την αρίθμηση i, j (2D index), χρειαζόμαστε και μια καθολική αρίθμηση s (1D index) των κόμβων και των αγνώστων w σε αυτούς:

- Η αντιστοίχιση μεταξύ των 2 τρόπων αρίθμησης γίνεται ως:

$$s = (j - 1) \cdot n_i + i$$

- Π.χ.

- $w_{4,5} = w_{29}$

- $w_{1,1} = w_1$

- Όλα τα w θα τοποθετηθούν σε ένα διάνυσμα-στήλη $[w]$ το οποίο θα βρεθεί μέσω επίλυσης γραμμικού συστήματος.



Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Εσωτερικοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 4 \Rightarrow s = 28$
- Αντίστοιχα θα προκύψει μια εξίσωση και στον (4,5).
- Ισχύει η γραμμική εξίσωση που προέρχεται από την δ.ε. της πλάκας.
- Stencil

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{4,4} = \frac{q_{4,4}}{D} h^4$$

- Έχουμε αργά μεταβαλλόμενο φορτίο άρα

$$q_{4,4} = q(x = 1, y = 1) = 10 + 1/3 = 10.333$$

- Για το δεξί μέλος:

$$\frac{q_{4,4}}{D} h^4 = 20.67 \cdot 10^{-3}$$

Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Εσωτερικοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 4 \Rightarrow s = 28$
- Stencil εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{4,4} = 20.67 \cdot 10^{-3}$$

- Τα αντίστοιχα w που εμπλέκονται για αυτόν τον κόμβο είναι

$$\tilde{W}_{4,4} = \begin{bmatrix} & & w_{4,2} & & \\ & w_{3,3} & w_{4,3} & w_{5,3} & \\ w_{2,4} & w_{3,4} & \boxed{w_{4,4}} & w_{5,4} & w_{6,4} \\ & w_{3,5} & w_{4,5} & w_{5,5} & \\ & & w_{4,6} & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & w_{12} & & \\ & w_{19} & w_{20} & w_{21} & \\ w_{26} & w_{27} & \boxed{w_{28}} & w_{29} & w_{30} \\ & w_{35} & w_{36} & w_{37} & \\ & & w_{44} & & \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Εσωτερικοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 4 \Rightarrow s = 28$

- Άρα stencil εξίσωσης

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} & & w_{12} & & \\ & w_{19} & w_{20} & w_{21} & \\ w_{26} & w_{27} & \boxed{w_{28}} & w_{29} & w_{30} \\ & w_{35} & w_{36} & w_{37} & \\ & & w_{44} & & \end{bmatrix} = 20.67 \cdot 10^{-3}$$

σε ποια στήλη του πίνακα θα μπει

- Που γράφεται ως γραμμή πίνακα :

$$\begin{matrix} & 12 & & 19 & 20 & 21 & & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & & 35 & 36 & 37 & & 44 \\ [... & 1 & ... & 2 & -8 & 2 & ... & 1 & -8 & 20 & -8 & 1 & ... & 2 & -8 & 2 & ... & 1 & ...] \end{matrix}$$

το στοιχείο του stencil

- Αυτή η γραμμή έχει πολλά μηδενικά που συμβολίζονται με ...
- Πολλαπλασιάζεται με το διάνυσμα στηλη $[w]$ που περιέχει όλους τους αγνώστους:

$$[w] = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_{56} \end{bmatrix}$$



Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Εσωτερικοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 4 \Rightarrow s = 28$
- Άρα στον πίνακα του συστήματος $[A]$ θα εισαχθεί η γραμμή :

12	19	20	21	26	27	28	29	30	35	36	37	44
[... 1 ... 2 -8 2 ... 1 -8 20 -8 1 ... 2 -8 2 ... 1 ...]												
- Πάνω από τη γραμμή σημειώνονται οι στήλες όπου έχουμε μη μηδενικές τιμές.
- Αφού τελειώσουμε με τον κόμβο (4,4), ο πίνακας θα έχει τη μορφή

$$[A] = \begin{bmatrix} \text{γραμμη από προηγούμενο κόμβο} \\ \text{γραμμη από προηγούμενο κόμβο} \\ 1 \quad \dots \quad 20 \quad \dots \quad 1 \\ \text{εδω θα μπουν μελλοντικα νεες γραμμες} \end{bmatrix}$$
- Στο δεξί μέλος, έχουμε διάνυσμα $[b]$ όπου θα εισαχθεί ένα νέο στοιχείο ίσο με $\frac{q_{4,4}}{D} h^4 = 20.67 \cdot 10^{-3}$



Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Εσωτερικοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 4 \Rightarrow s = 28$
- Στο δεξί μέλος, έχουμε διάνυσμα $[b]$ όπου θα εισαχθεί ένα νέο στοιχείο ίσο με

$$\frac{q_{4,4}}{D} h^4 = 20.67 \cdot 10^{-3}$$
$$[b] = \begin{bmatrix} \text{δεξι μέλος από προηγούμενο κόμβο} \\ \text{δεξι μέλος από προηγούμενο κόμβο} \\ 20.67 \\ \text{εδω θα μπουν μελλοντικά νέα δεξια μελη} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Συνοριακοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 4, j = 3 \Rightarrow s = 20$
- Σε απλή έδραση, τα stencil εξίσωσης είναι

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ \nu \quad \boxed{-2 - 2\nu} \quad \nu \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$

- Για τον κόμβο (4,3):

$$\begin{bmatrix} 0.3 & \boxed{-2.6} & 0.3 \\ 1 & & \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} [1][w_{20}] \\ w_{19} & \boxed{w_{20}} & w_{21} \\ w_{28} & & \end{bmatrix} = 0$$

- Άρα έχουμε 2 νέες γραμμές στον πίνακα $[A]$ και στο διάνυσμα $[b]$

$$\begin{bmatrix} \dots & 12 & \dots & 19 & \dots & 20 & \dots & 21 & \dots & 28 & \dots \\ \dots & 1 & \dots & 0.3 & \dots & -2.6 & \dots & 0.3 & \dots & 1 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Συνοριακοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 6, j = 4 \Rightarrow s = 30$
- Ελεύθερη παρειά, άρα θα έχουμε 3 εξισώσεις:

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -8 & 2 \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 \\ 2 & -8 & 2 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{6,4} = \frac{q_{6,4}}{D} h^4$$

$$b) M_x \Big|_{6,4} = 0$$

$$c) R_x \Big|_{6,4} = 0$$

- Αυτές θα προσθέσουν 3 νέες γραμμές στον πίνακα $[A]$ και στο διάνυσμα $[b]$
- Προφανώς χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα stencil των M_x, R_x

Παράδειγμα 1: Γραμμικές εξισώσεις

Γωνιακοί κόμβοι

- Π.χ. Στον $i = 6, j = 3 \Rightarrow s = 22$
- Πάκτωση σε γωνία, άρα θα έχουμε 3 εξισώσεις:

$$a) w_{6,3} = 0$$

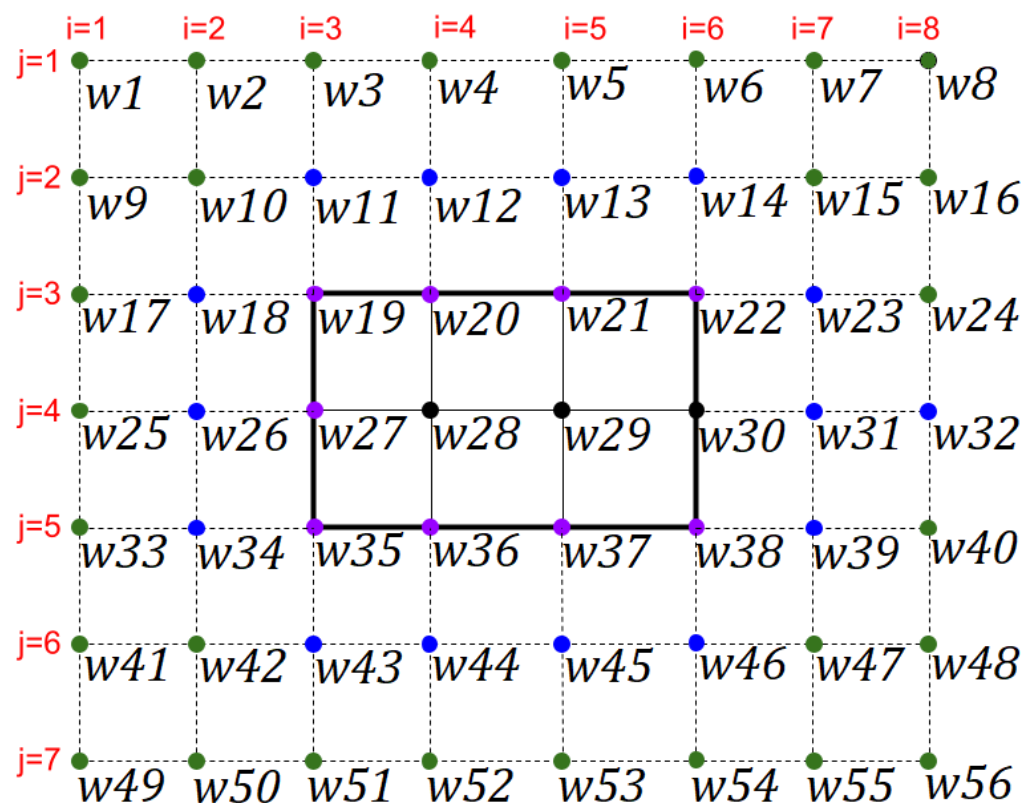
$$b) \left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{6,3} = 0$$

$$c) \left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{6,3} = 0$$

- Αυτές θα προσθέσουν 3 νέες γραμμές στον πίνακα $[A]$ και στο διάνυσμα $[b]$
- Προφανώς χρησιμοποιούμε τα αντίστοιχα stencil των παραγώγων.

Παράδειγμα 1: Επίλυση συστήματος

- Κάνοντας τα προηγούμενα σε κάθε κόμβο της πλάκας (εσωτερικό και συνοριακό), παίρνουμε μία ή περισσότερες εξισώσεις από κάθε κόμβο και τις τοποθετούμε στον πίνακα $[A]$ και το διάνυσμα $[b]$
- Έτσι καταληγουμε σε γραμμικό σύστημα $[A] \cdot [w] = [b]$.
- Παρατηρούμε ότι υπάρχουν περισσότεροι άγνωστοι, από ότι εξισώσεις, άρα δεν μπορεί να λυθεί το σύστημα..
 - Π.χ. εδώ υπάρχουν 27 εξισώσεις και 56 αγνώστους.
- Όμως, απο αυτούς μόνο 27 άγνωστοι συμμετέχουν στις εξισώσεις, οπότε θα λέγονται ενεργοί. Οι υπόλοιποι είναι ανενεργοί και μπορούν να αφαιρεθούν.



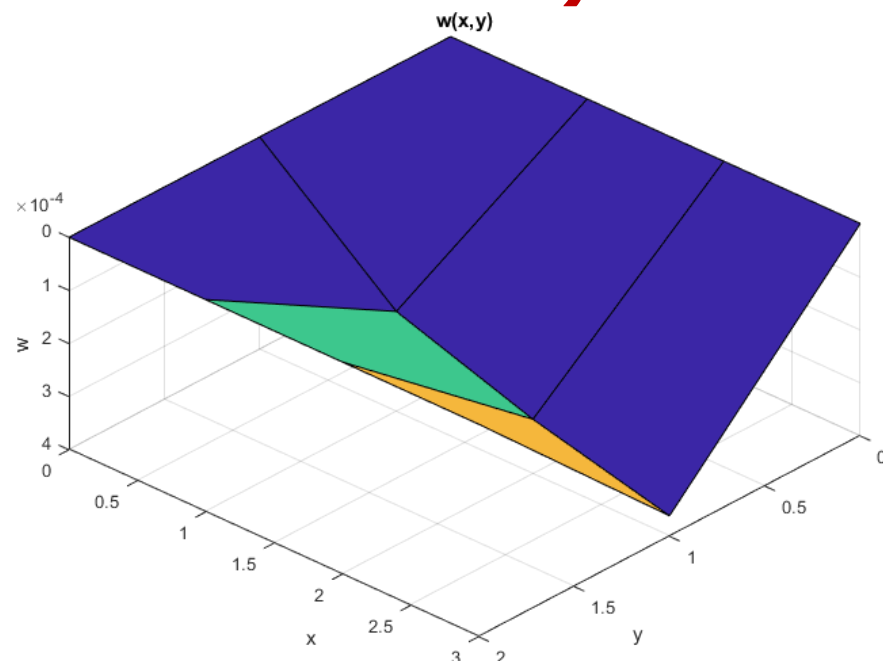
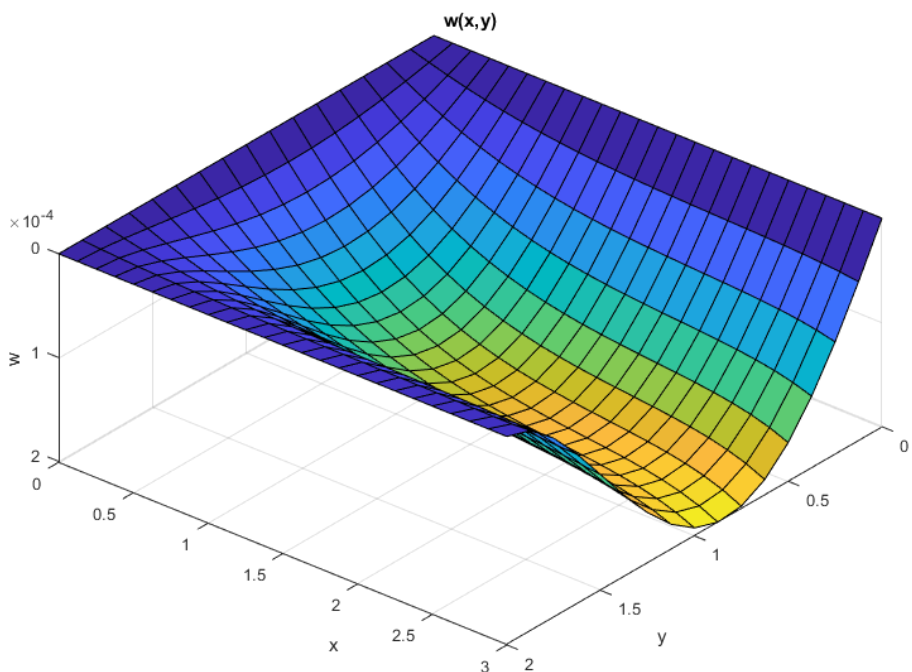


Παράδειγμα 1: Επίλυση συστήματος

- Κρατώντας μόνο τους ενεργούς αγνώστους, παίρνουμε το διάνυσμα αγνωστων $[w_{act}]$ και τον αντίστοιχο πίνακα $[A_{act}]$.
- Για τον $[A_{act}]$, αρκεί να αφαιρεθούν από τον $[A]$ οι στήλες που έχουν παντού μηδενικά στοιχεία
- Τελικά λύνουμε το γραμμικό σύστημα $[A_{act}] \cdot [w_{act}] = [b]$
- Στο σύστημα αυτό, ο πίνακας $[A_{act}]$ έχει τόσες ανεξάρτητες εξισώσεις, όσοι και οι ενεργοί άγνωστοι $[w_{act}]$.
- Άρα λύνεται (εύκολα?) με κάποια μέθοδο γραμμικής άλγεβρας.
- Τα w εντός του $[w_{act}]$ είναι
 - οι ζητούμενες βυθίσεις των κόμβων της πλάκας και
 - βοηθητικοί άγνωστοι (πλέον έχουν υπολογιστεί) για να υπολογιστούν παράγωγοι, εντατικά μεγέθη, τάσεις, κτλ μέσω stencil.
- Τα ανενεργά w που αφαιρέθηκαν δεν χρησιμεύουν κάπου και δεν ασχολούμαστε μαζί τους πλέον.

Παράδειγμα 1: Βυθίσεις

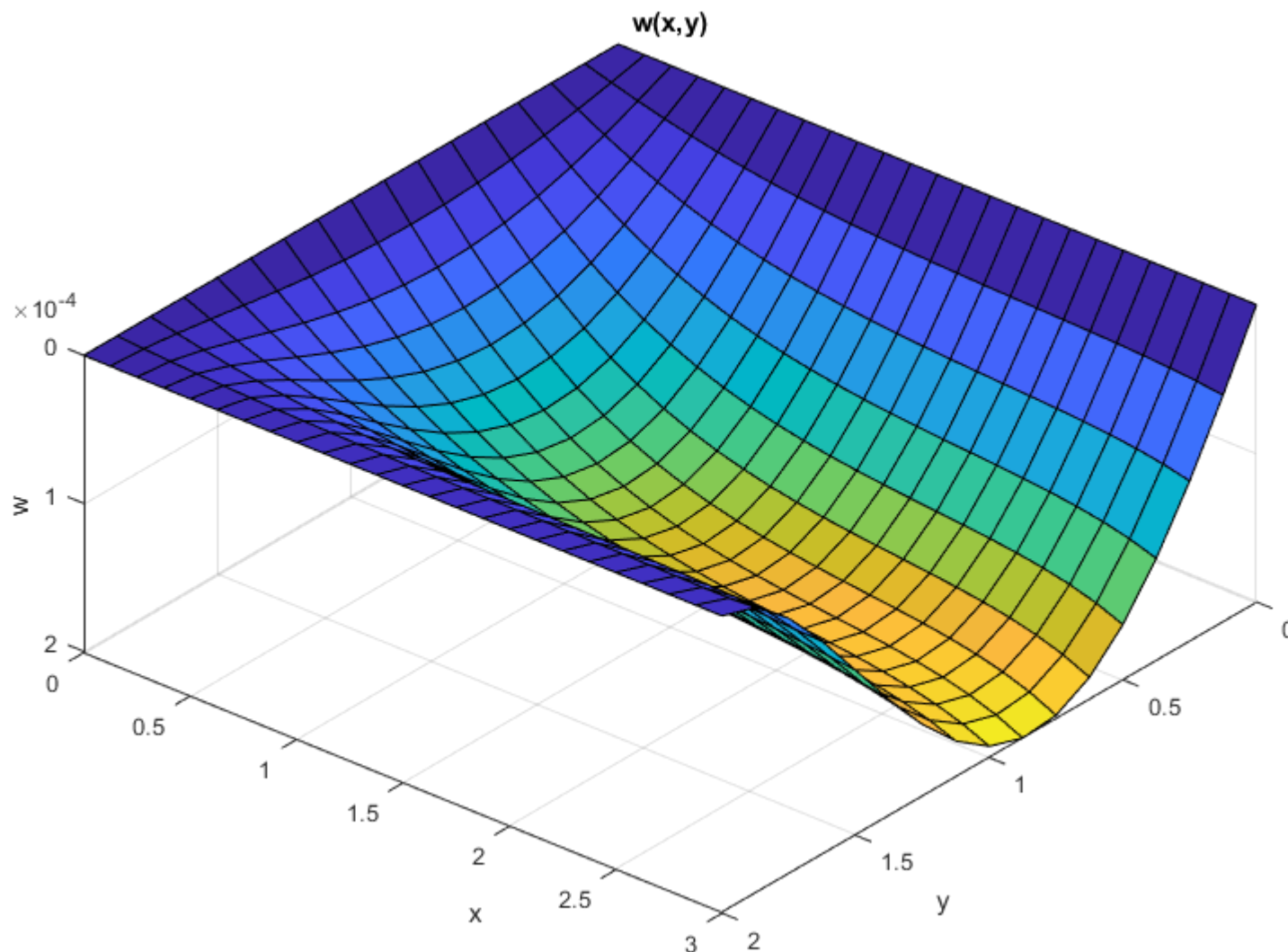
- Σχεδιάζοντας τις βυθίσεις που προκύπτουν, φαίνεται ότι ο κάνναβος με 4×3 κόμβους επί της πλάκας είναι πολύ αραιός για ικανοποιητική ακρίβεια.



- Χρησιμοποιώντας κάνναβο με 25×17 κόμβους, προκύπτουν ικανοποιητικά αποτελέσματα.
- Για τη μέγιστη βύθιση w_{max} , αρκεί να βρούμε το μέγιστο στοιχείο του $[w_{act}]$ που αντιστοιχεί σε πραγματικό κόμβο

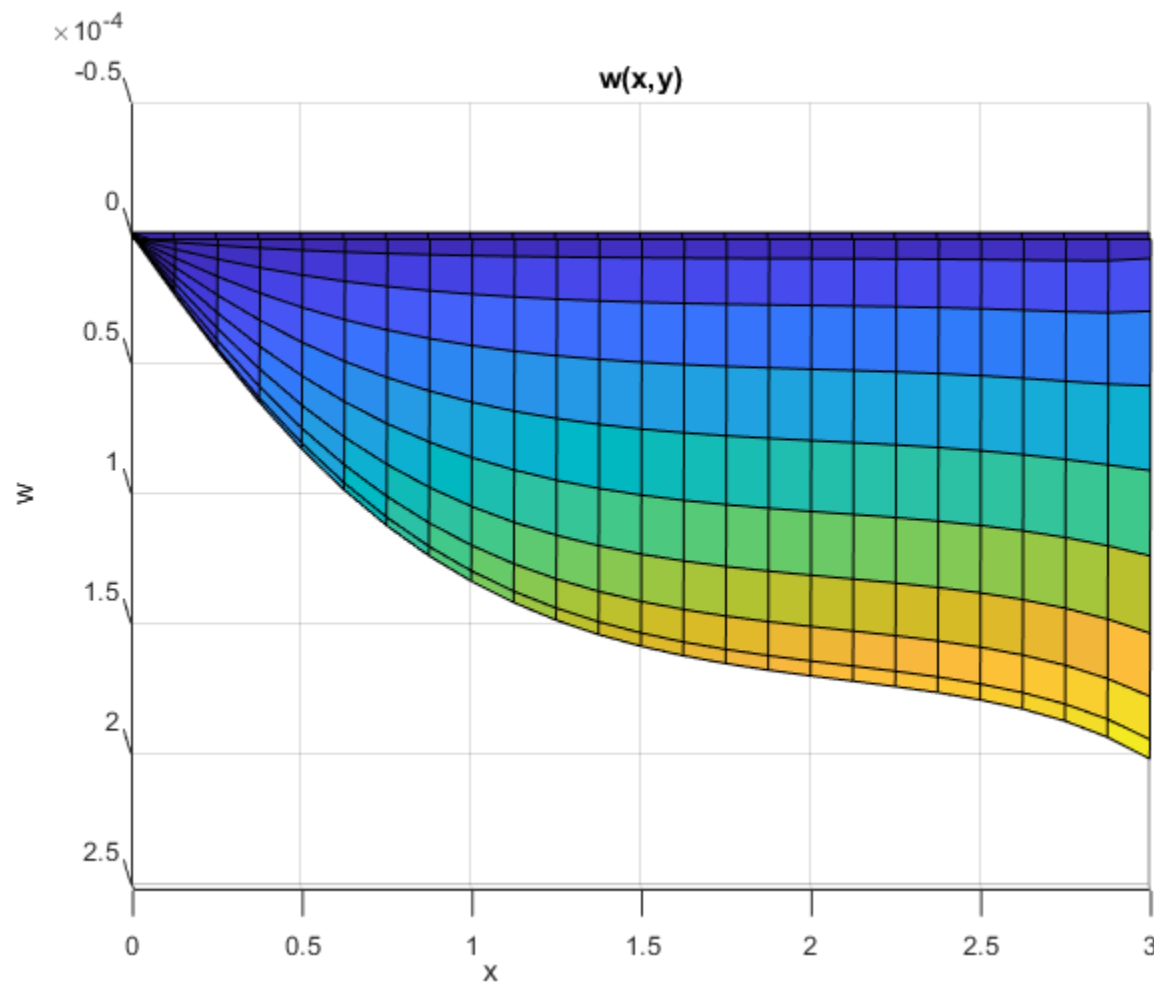
Παράδειγμα 1: Βυθίσεις

- Οι βυθίσεις υπο διαφορετικές γωνίες



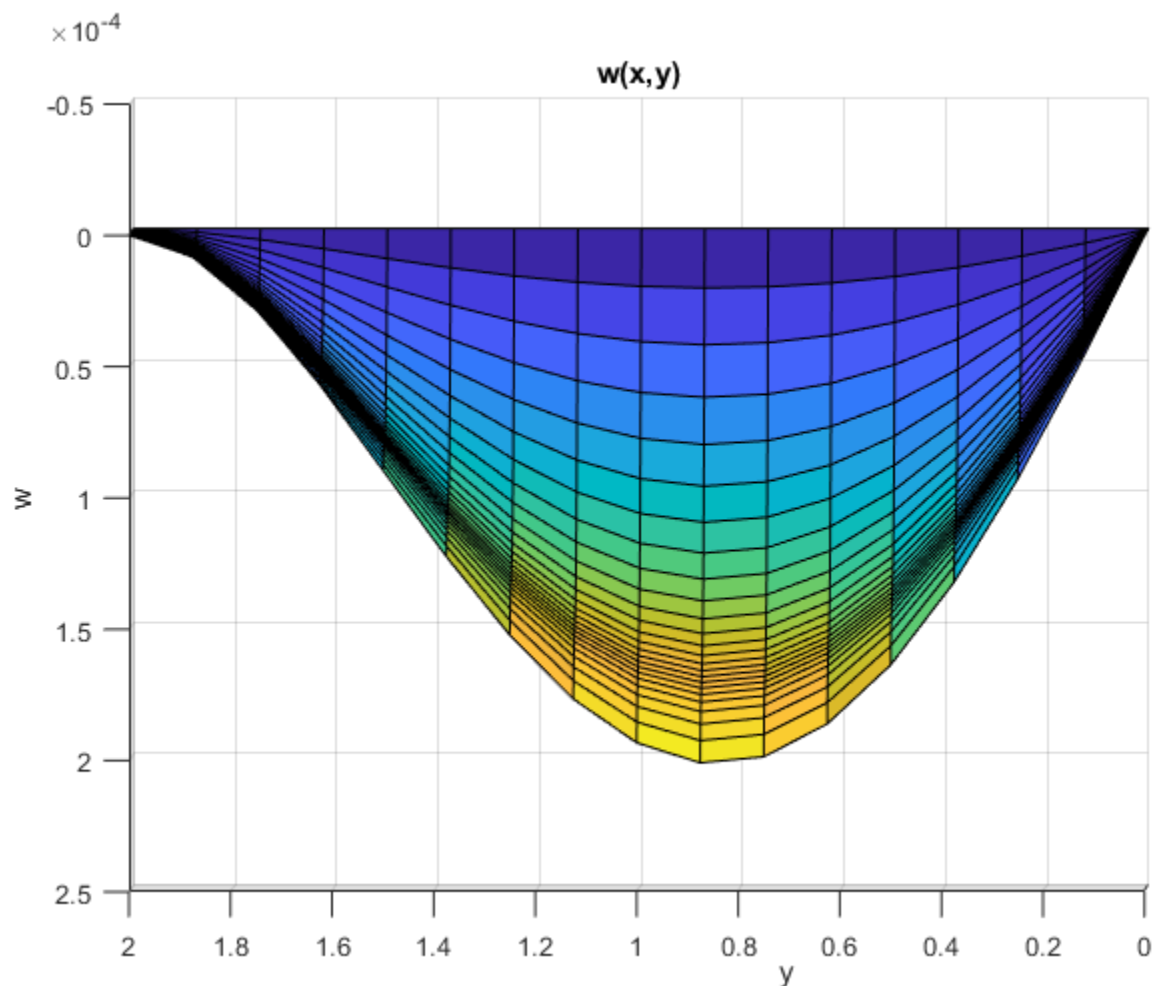
Παράδειγμα 1: Βυθίσεις

- Οι βυθίσεις υπο διαφορετικές γωνίες



Παράδειγμα 1: Βυθίσεις

- Οι βυθίσεις υπο διαφορετικές γωνίες



Παράδειγμα 1: Εντατικά μεγέθη

- Έχοντας τις επικόμβιες βυθίσεις, τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται μέσω των αντίστοιχων stencil. Π.χ. για τις ροπές

$$M_x = \frac{-D}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{-2-2\nu} & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

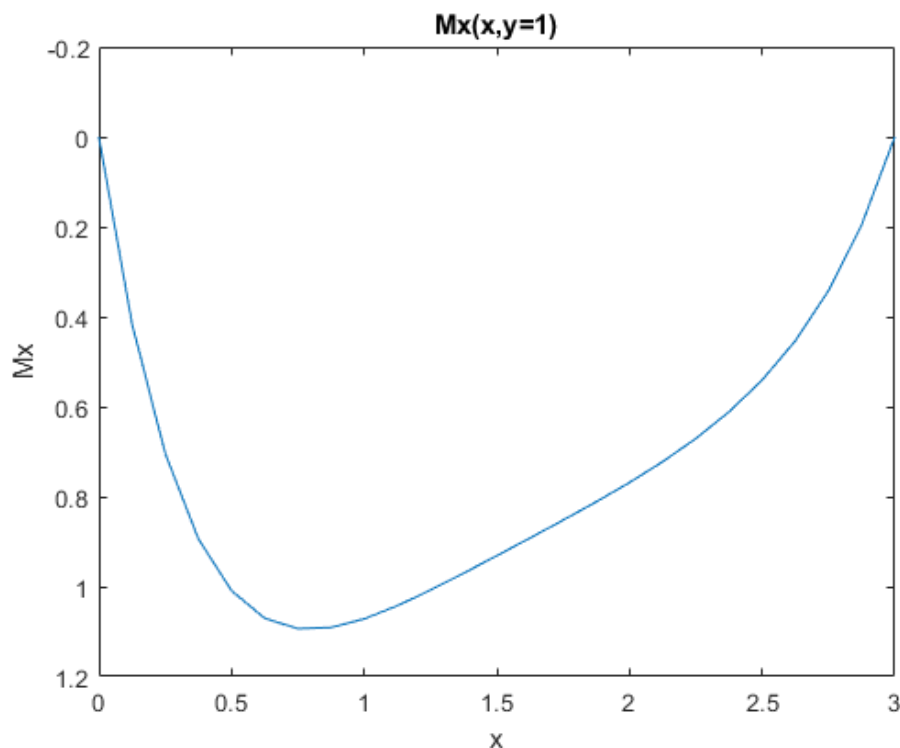
$$M_y = \frac{-D}{h^2} \begin{bmatrix} \nu & \frac{1}{-2-2\nu} & \nu \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$M_{xy} = \frac{-D(1-\nu)}{4h^2} \begin{bmatrix} -1 & \square & 1 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

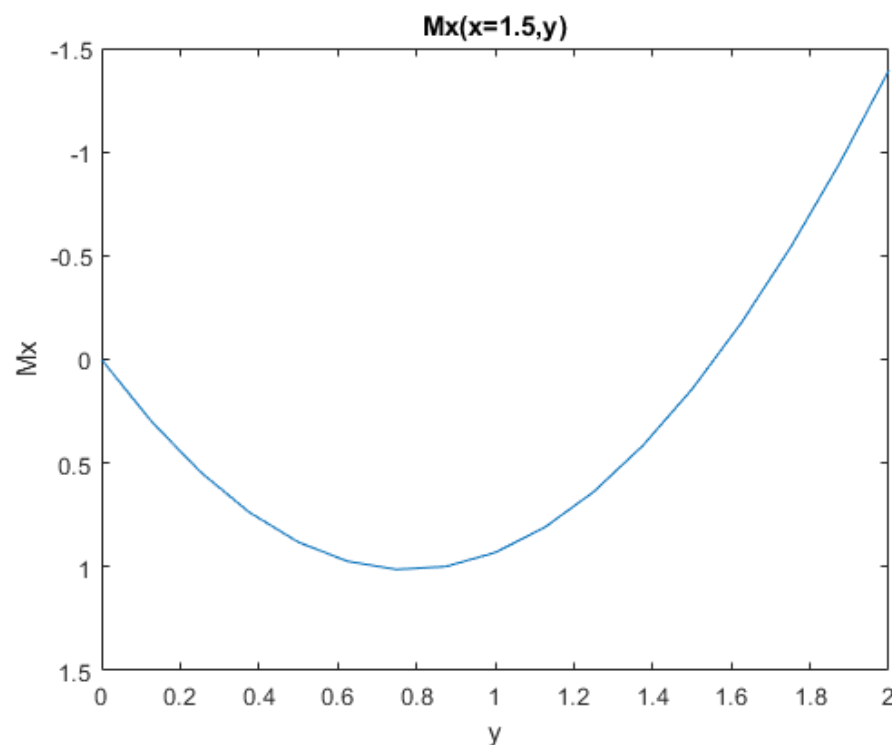
Παράδειγμα 1: Εντατικά μεγέθη

- Γενικώς, τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται και σχεδιάζονται κατά μήκος συγκεκριμένων γραμμών.

παράλληλα στον άξονα x



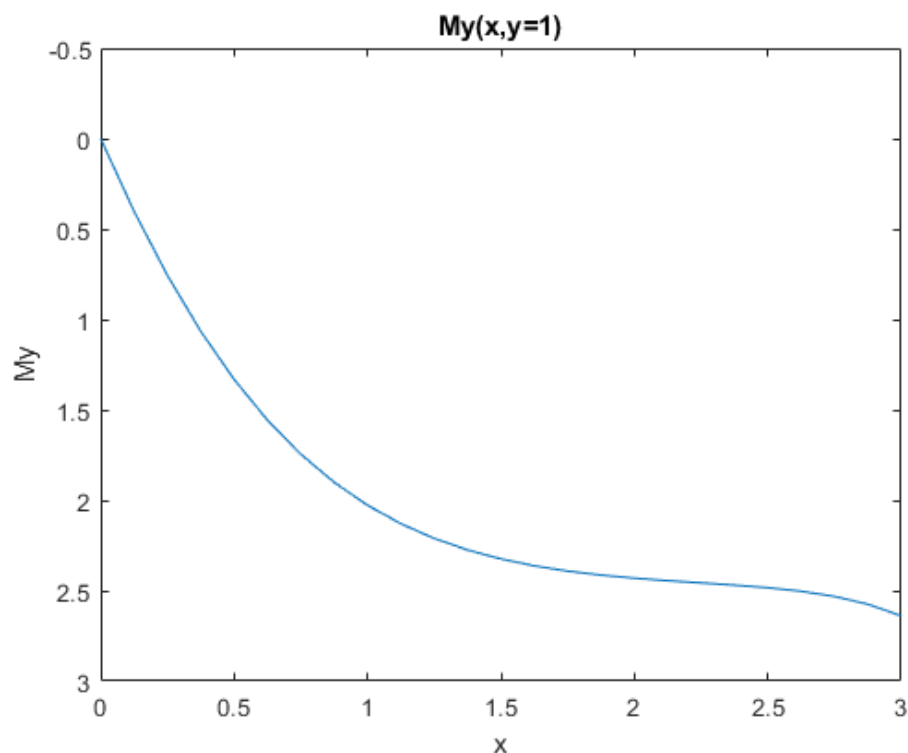
παράλληλα στον άξονα y



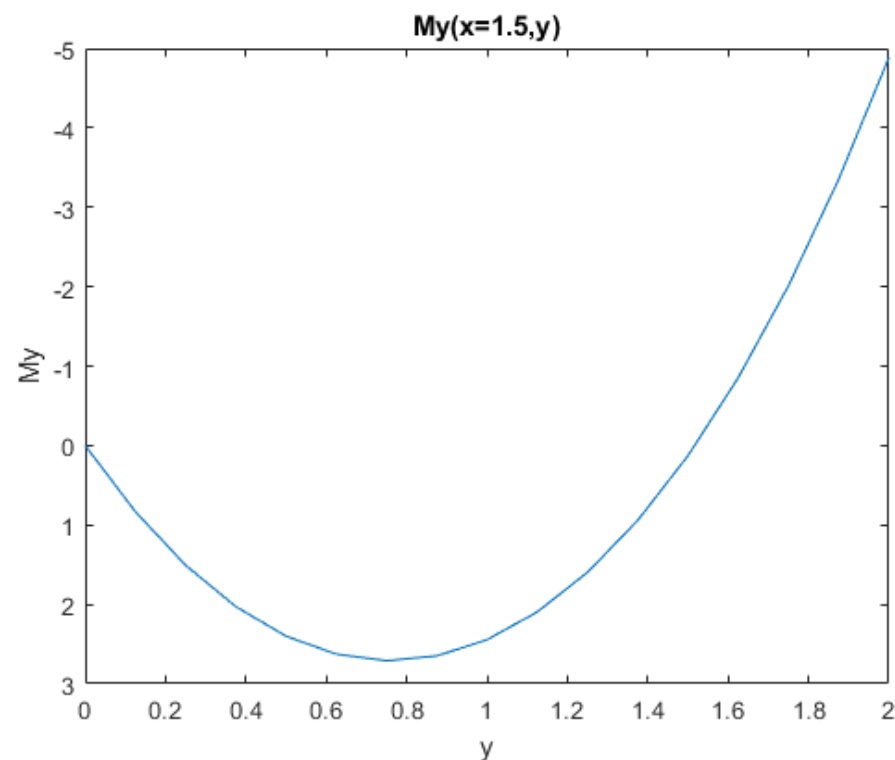
Παράδειγμα 1: Εντατικά μεγέθη

- Γενικώς, τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται και σχεδιάζονται κατά μήκος συγκεκριμένων γραμμών.

παράλληλα στον άξονα x



παράλληλα στον άξονα y

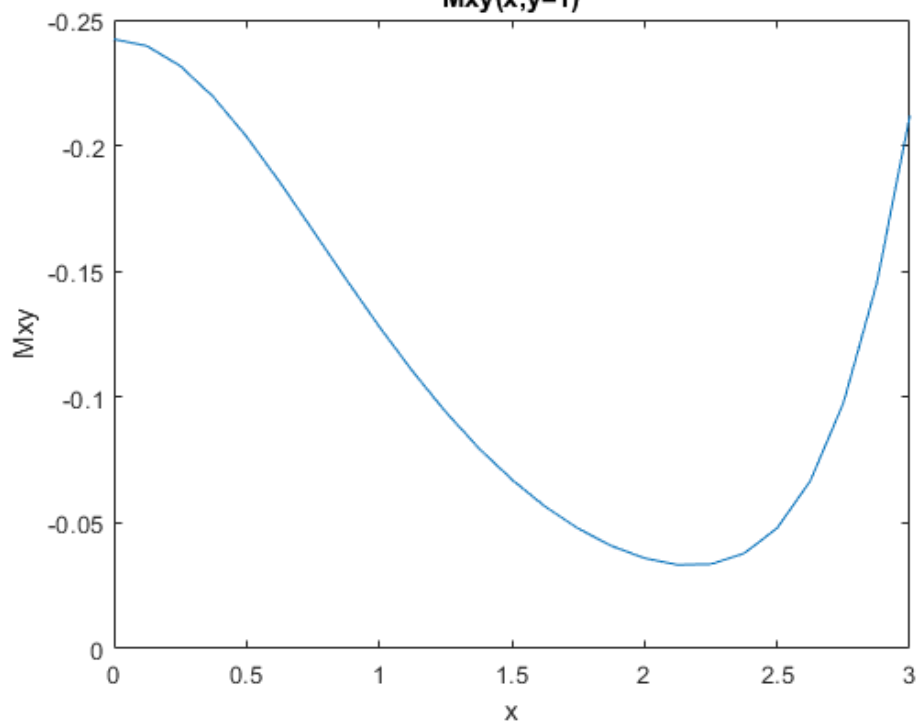


Παράδειγμα 1: Εντατικά μεγέθη

- Γενικώς, τα εντατικά μεγέθη υπολογίζονται και σχεδιάζονται κατά μήκος συγκεκριμένων γραμμών.

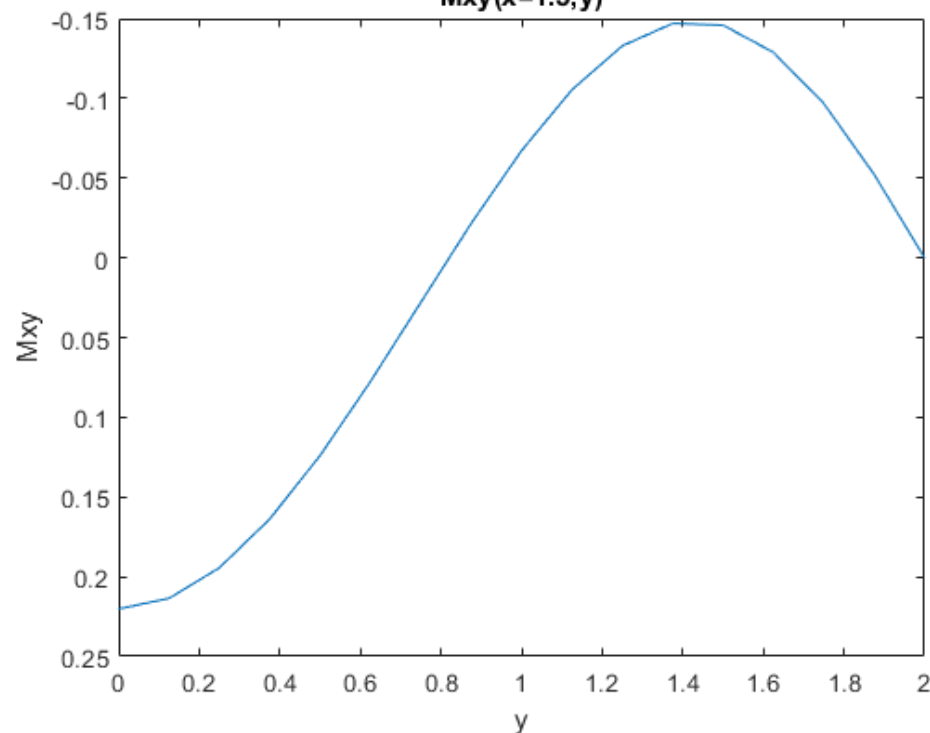
παράλληλα στον άξονα x

$M_{xy}(x, y=1)$



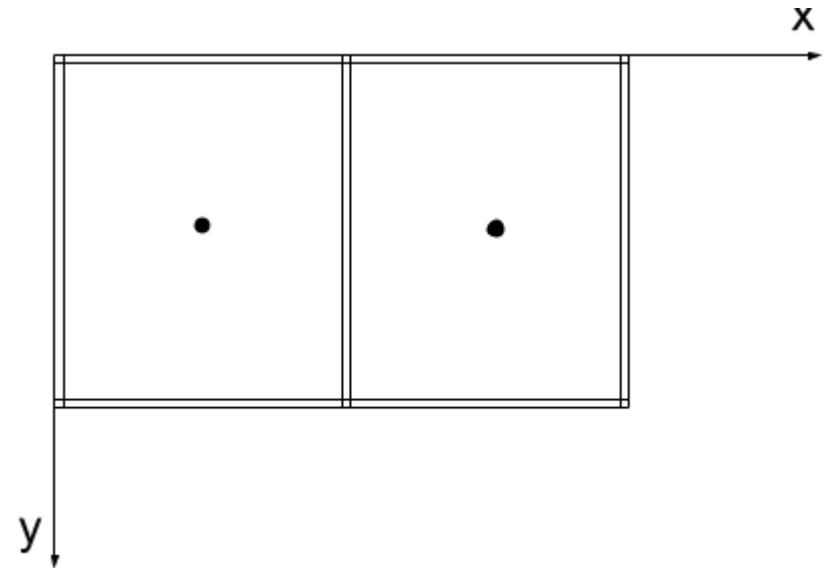
παράλληλα στον άξονα y

$M_{xy}(x=1.5, y)$



Εσωτερικές στηρίξεις

- Με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, είναι πολύ εύκολο να μελετηθούν συνεχείς πλάκες, δηλαδή πλάκες με περισσότερα από ένα ανοίγματα.
- Διακρίνουμε 2 περιπτώσεις εσωτερικών στηρίξεων
 - i. Σημειακές στηρίξεις σε υποστυλώματα.
 - ii. Στηρίξεις κατά μήκος δοκών
- Σημειώνεται ότι πρακτικά πρέπει να αποφεύγεται η έδραση πλάκας απευθείας σε υποστύλωμα, καθώς προκαλείται διάτρηση της πλάκας.
- Ως μηχανικοί, σχεδιάζουμε τις πλάκες να στηρίζονται σε δοκούς και τις δοκούς να στηρίζονται σε υποστυλώματα.



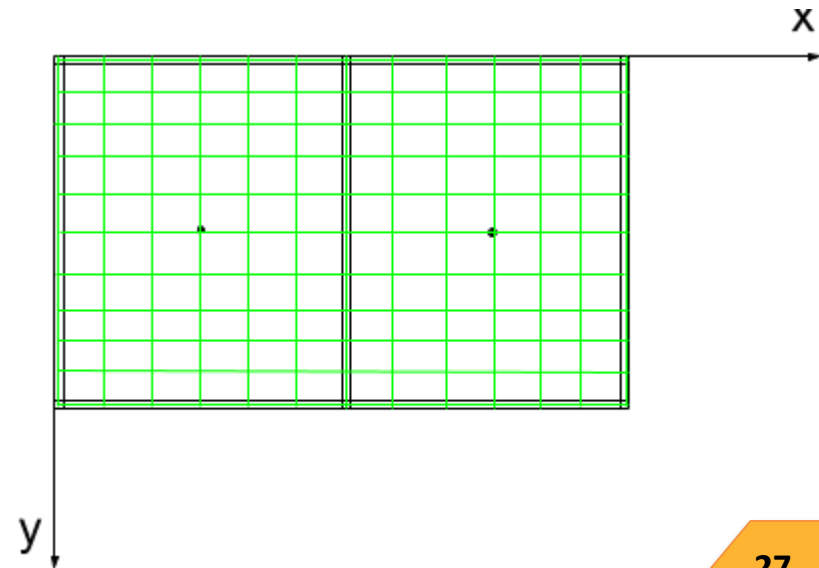
Εσωτερικές στηρίξεις

- Για να αναλυθούν (με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών) πλάκες με εσωτερικές στηρίξεις, θα πρέπει ο κάνναβος να δημιουργηθεί έτσι ώστε να υπάρχουν κόμβοι στις θέσεις των στηρίξεων.
- Στους κόμβους αυτούς δεν ισχύει πλέον η δ.ε. ισορροπίας, οπότε δεν μπορεί να εξαχθεί γραμμική εξίσωση μέσω του stencil

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = \frac{q_{ij}}{D} h^4$$

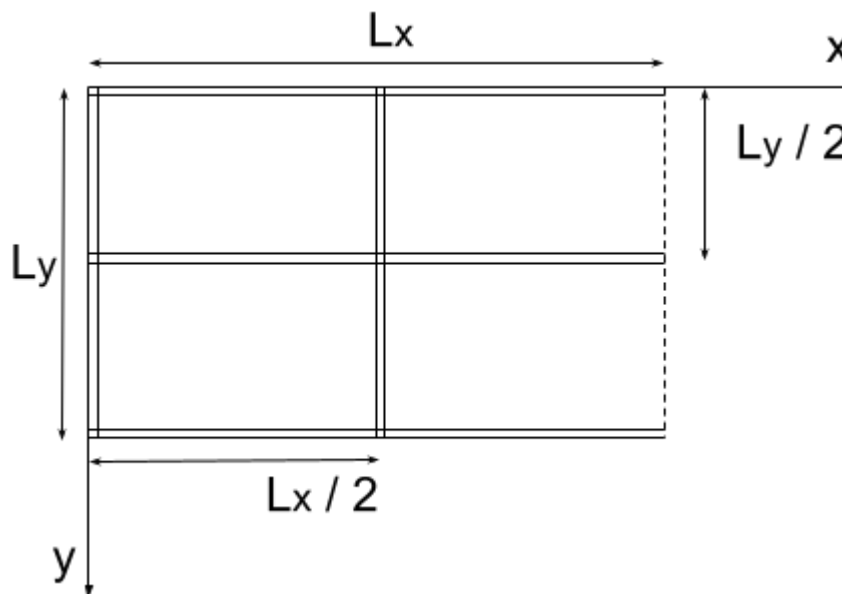
- Ισχύει όμως $w = 0$
- Οπότε η γραμμική εξίσωση για εσωτερικά στηριγμένο κόμβο έχει stencil

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$



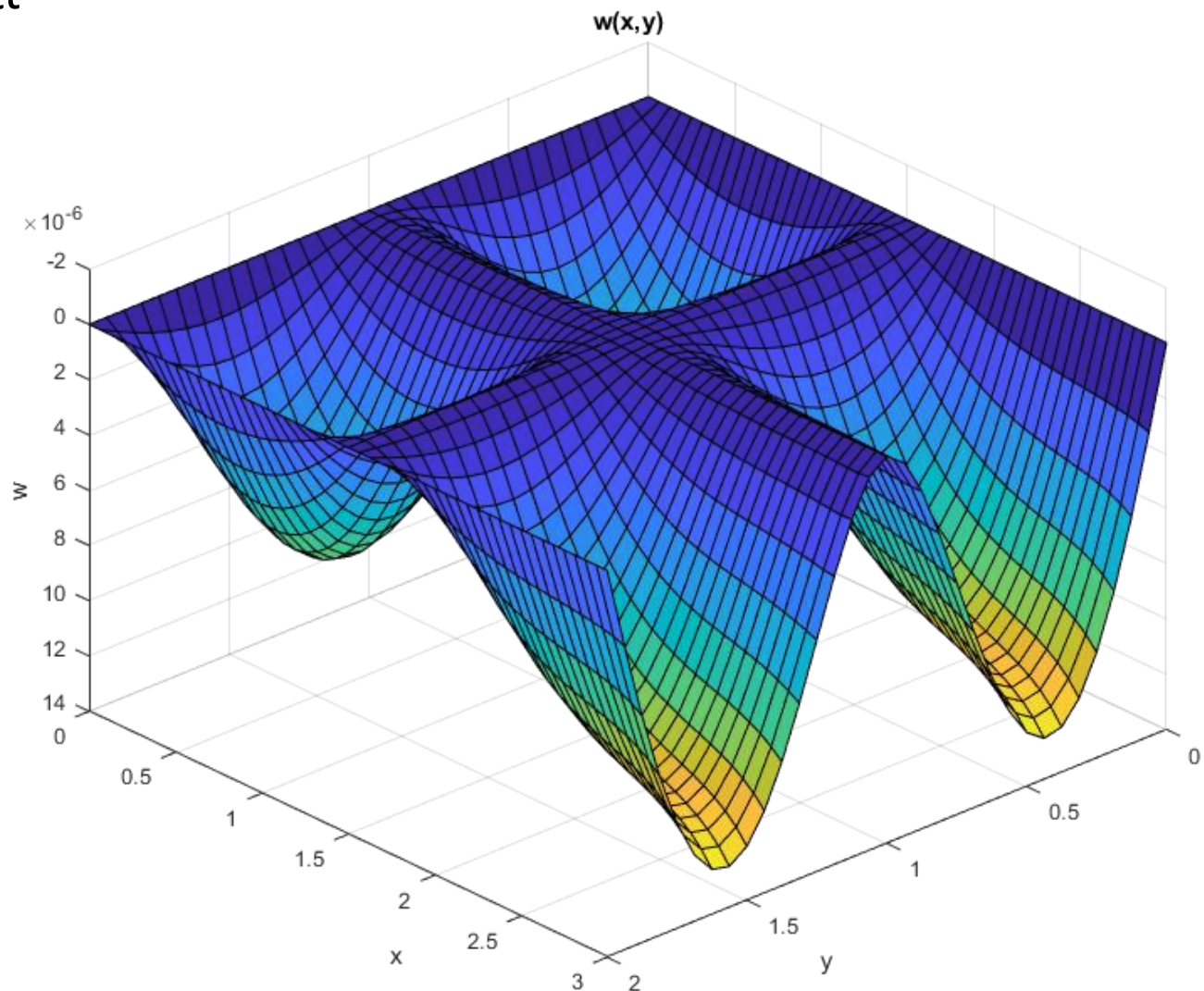
Παράδειγμα 2

- Στην πλάκα του σχήματος με $L_x = 3m, L_y = 2m$ ασκείται φορτίο $q(x, y) = \frac{10kN}{m^2}$. Η πλάκα στηρίζεται σε δοκούς εσωτερικά και περιμετρικά, εκτός από την παρειά $x = L_x$, που είναι ελεύθερη.
- Να βρεθούν με τη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών:
 - Η βύθιση της πλάκας
 - Διαγράμματα ροπών
- Δίνονται
 - $D = 5000 kNm$
 - $\nu = 0,3$
- Να θεωρηθεί ότι οι δοκοί είναι απαραμόρφωτες. → Άρα απλή έδραση



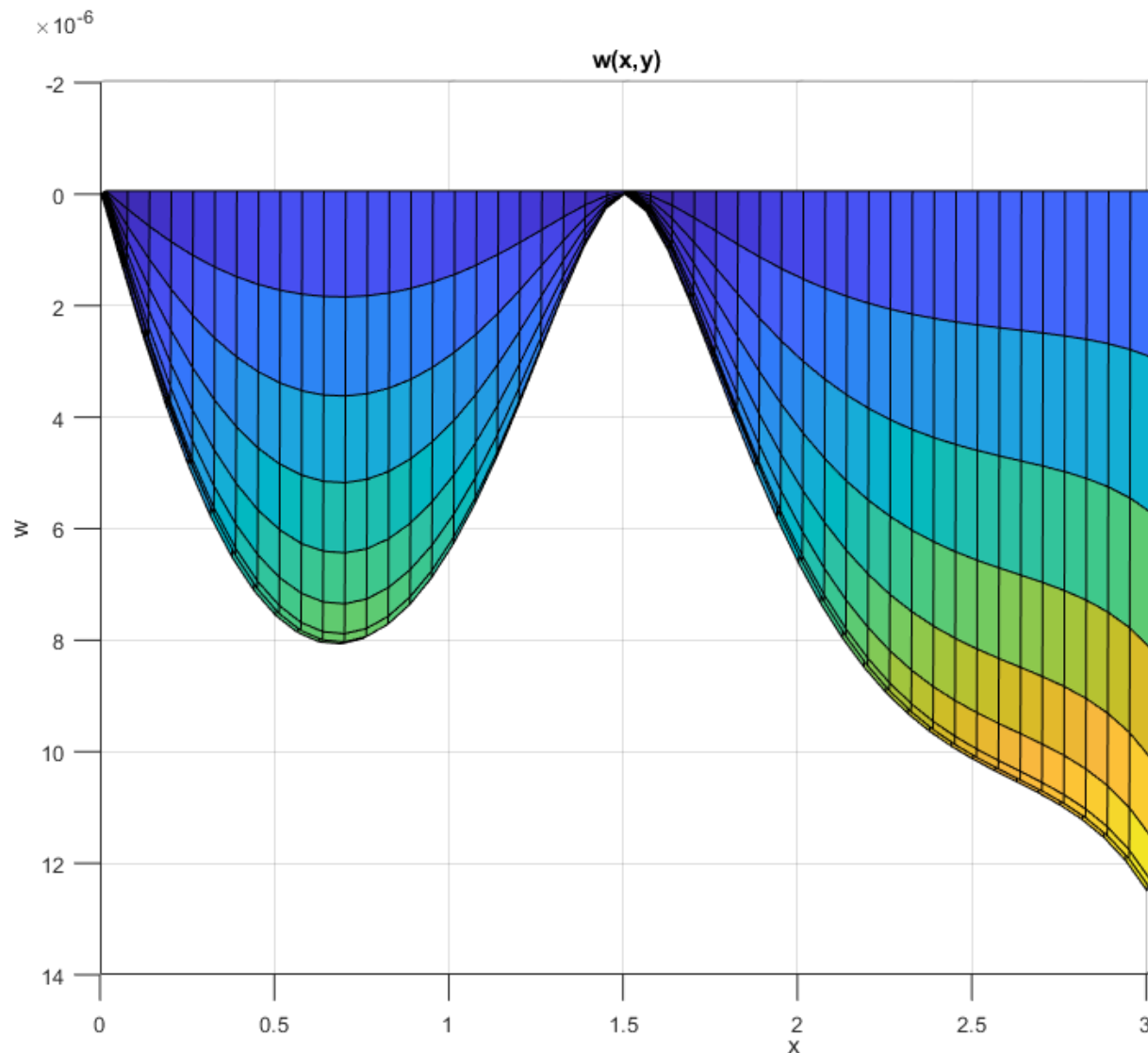
Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

- Με κάνναβο 49×33 κόμβων (εντός της πλάκας και στο σύνορό της), οι βυθίσεις είναι



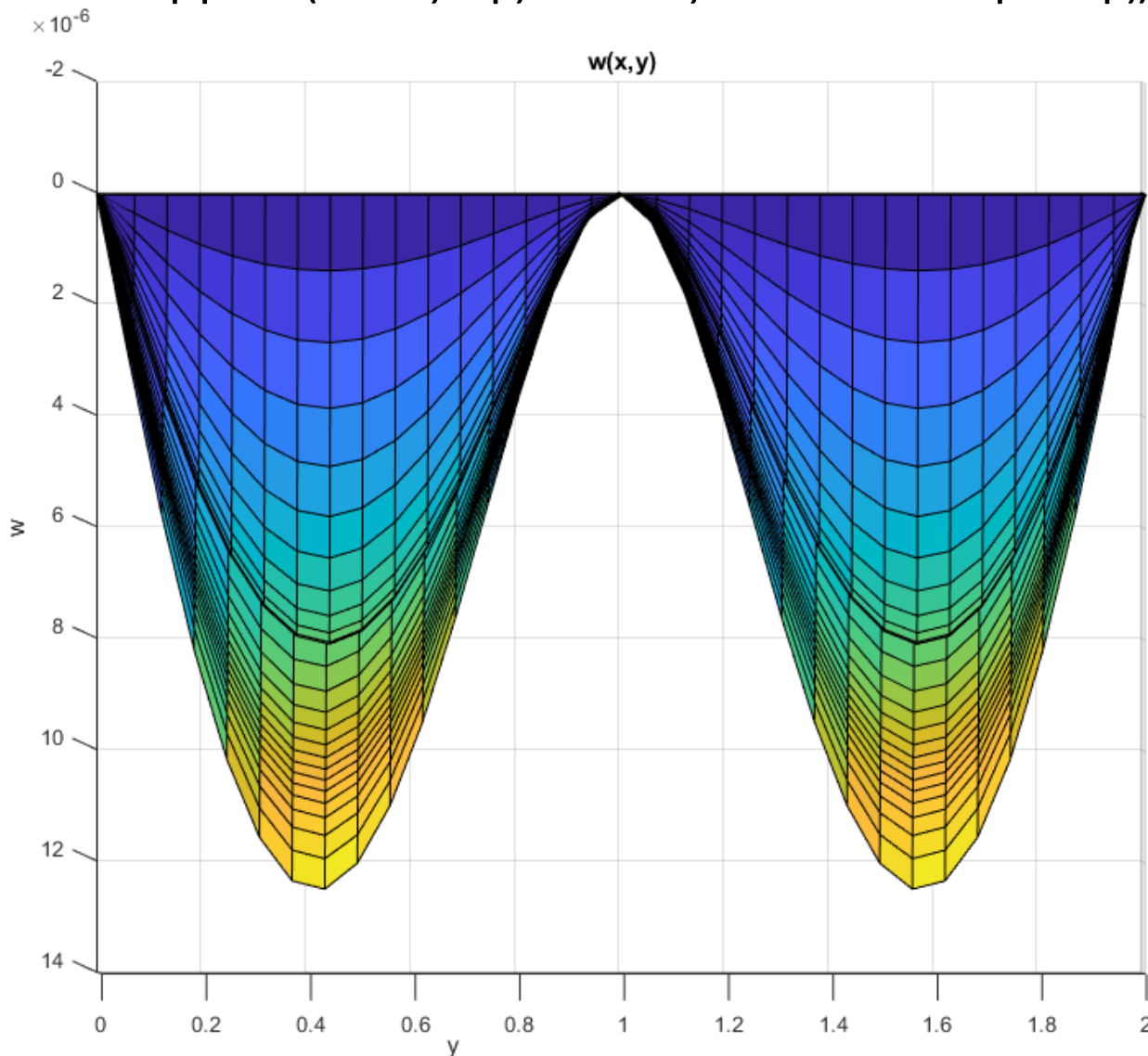
Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

- Με κάνναβο 49×33 κόμβων (εντός της πλάκας και στο σύνορό της), οι βυθίσεις είναι



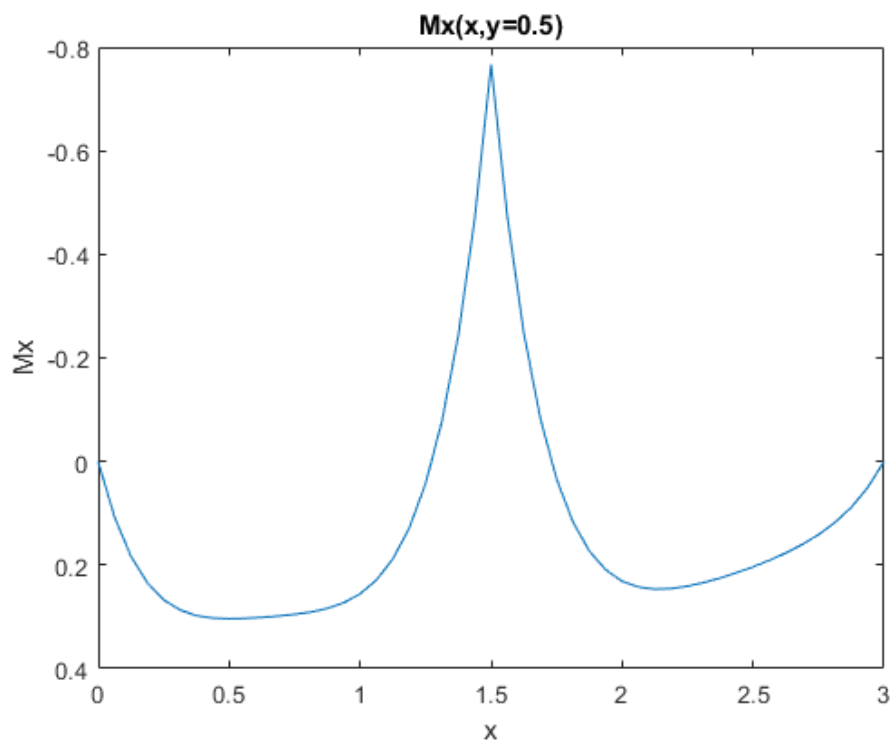
Παράδειγμα 2: Βυθίσεις

- Με κάνναβο 49×33 κόμβων (εντός της πλάκας και στο σύνορό της), οι βυθίσεις είναι

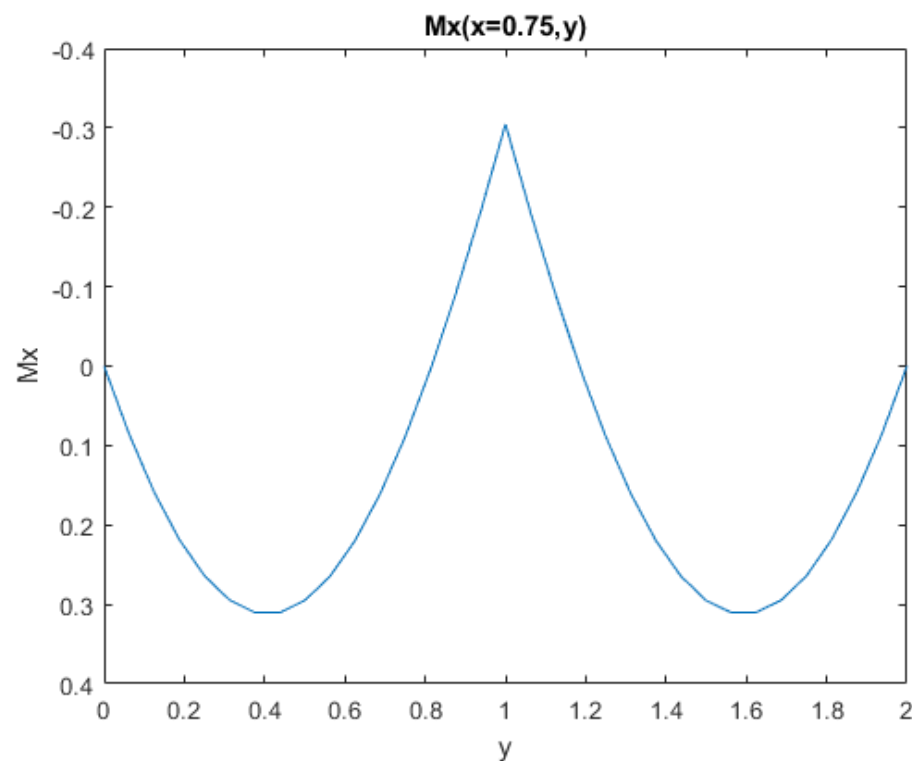


Παράδειγμα 2: Ροπές

παράλληλα στον άξονα x

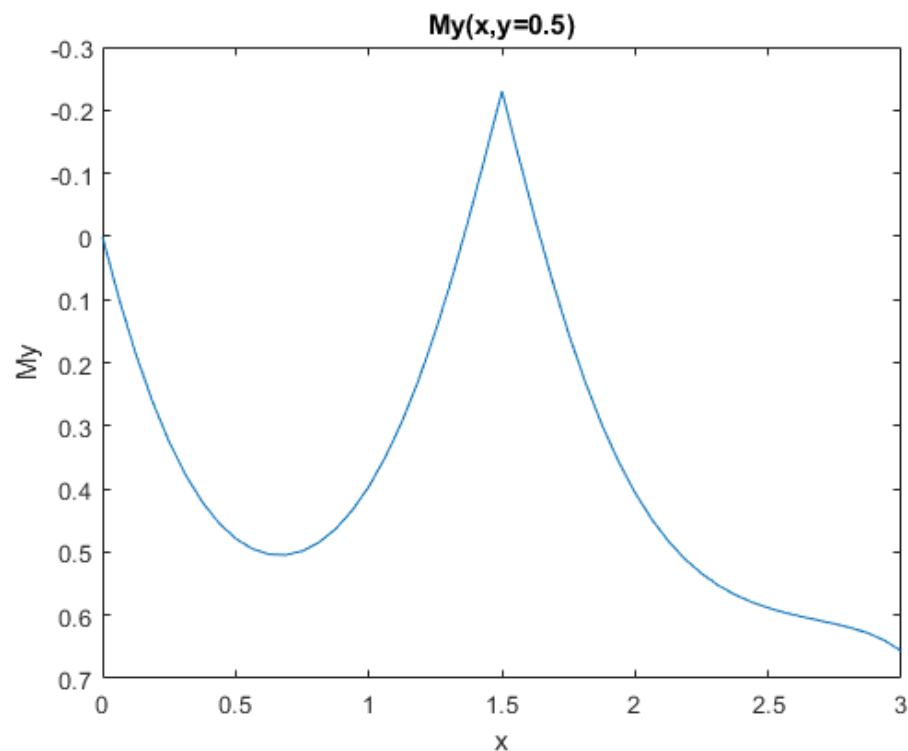


παράλληλα στον άξονα y

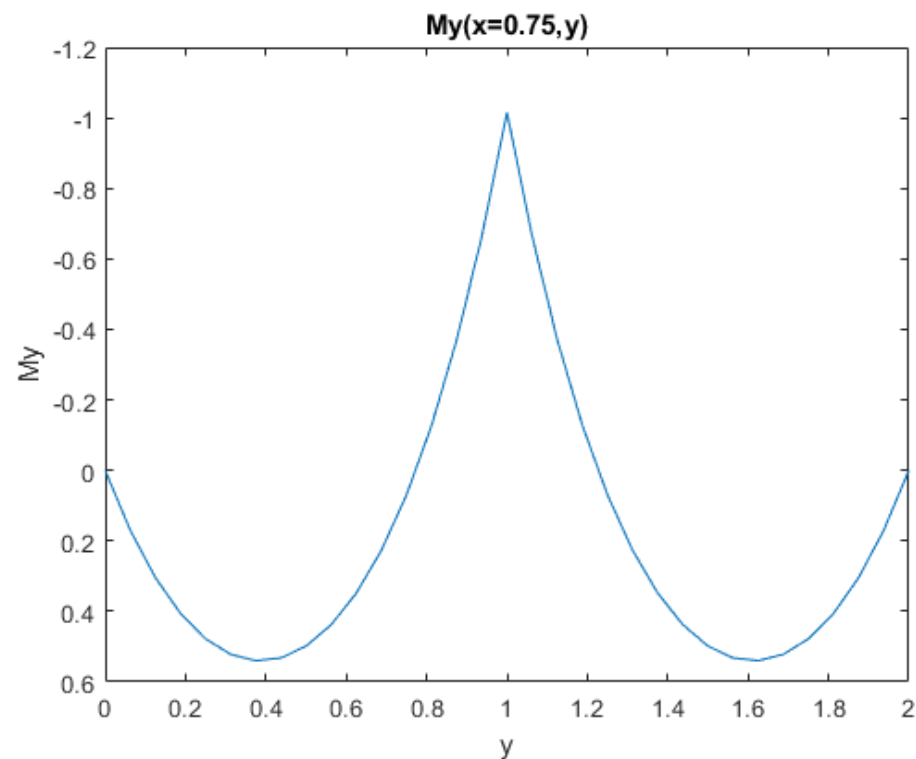


Παράδειγμα 2: Ροπές

παράλληλα στον άξονα x



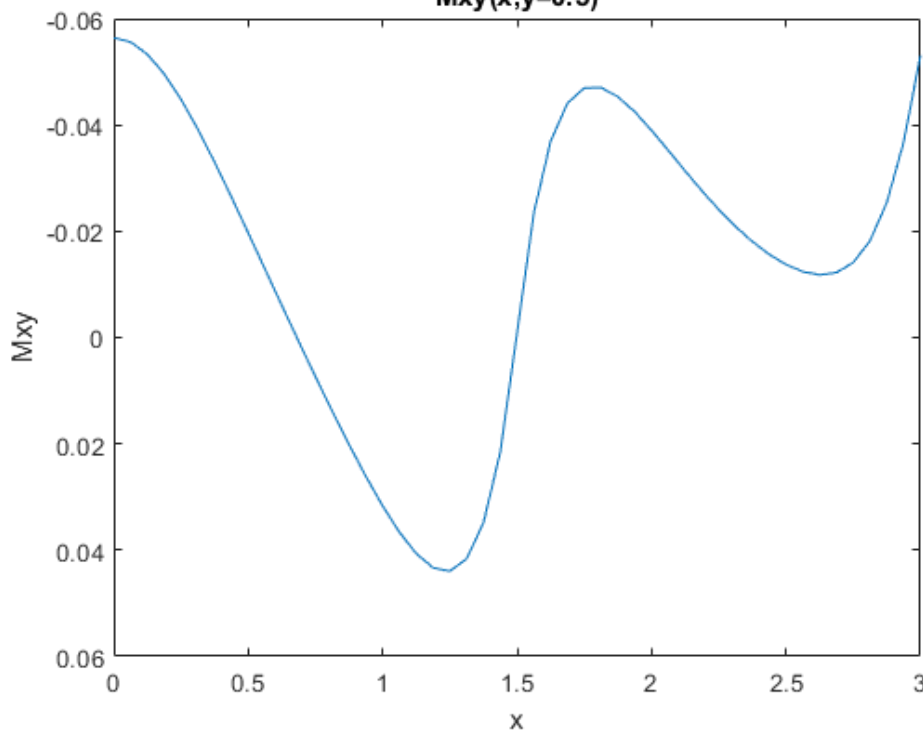
παράλληλα στον άξονα y



Παράδειγμα 2: Ροπές

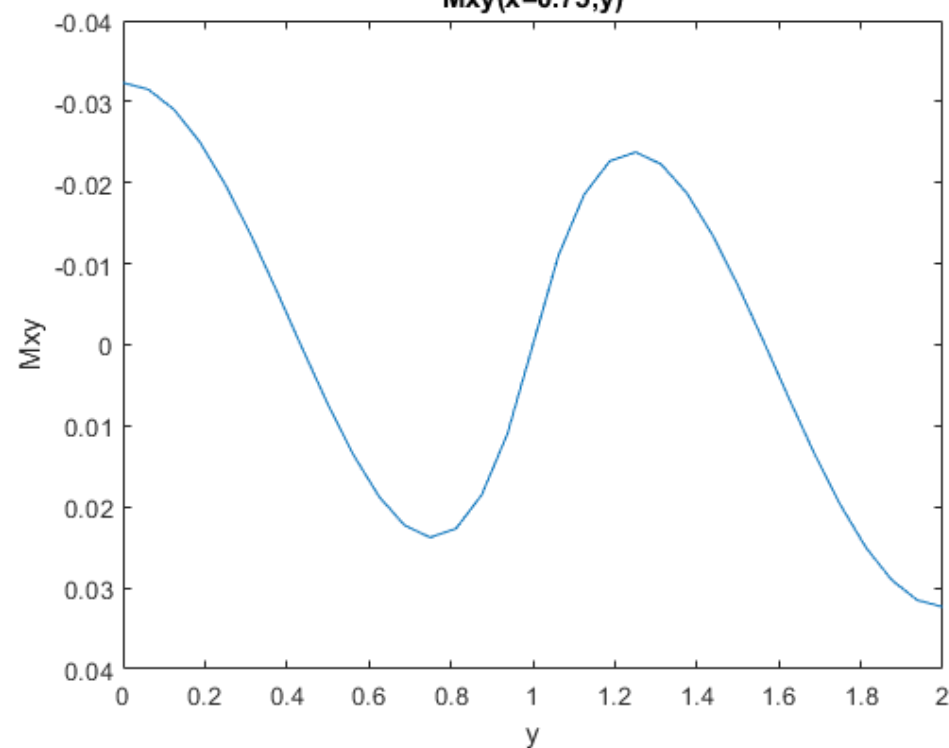
παράλληλα στον άξονα x

$M_{xy}(x, y=0.5)$



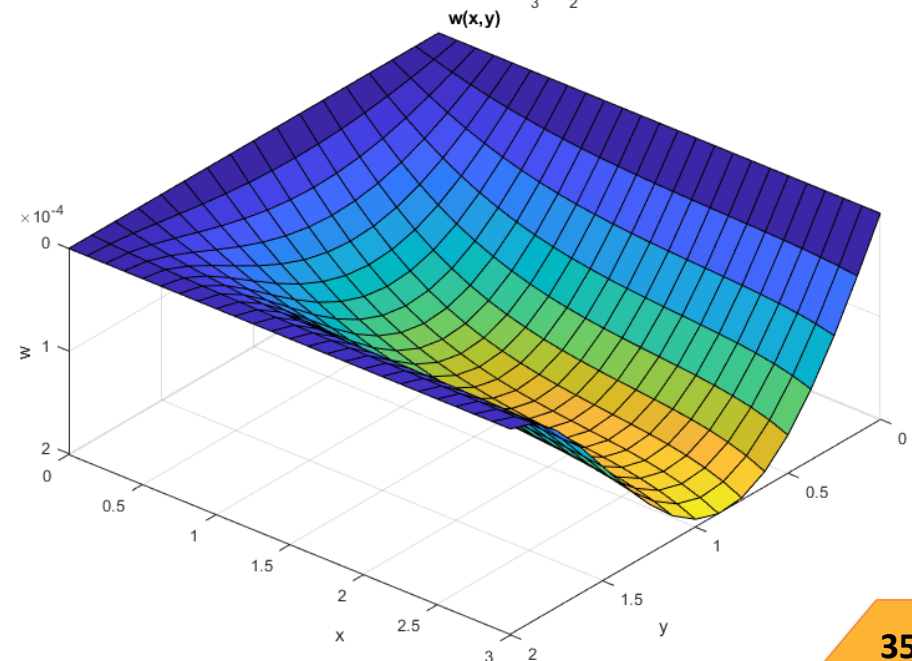
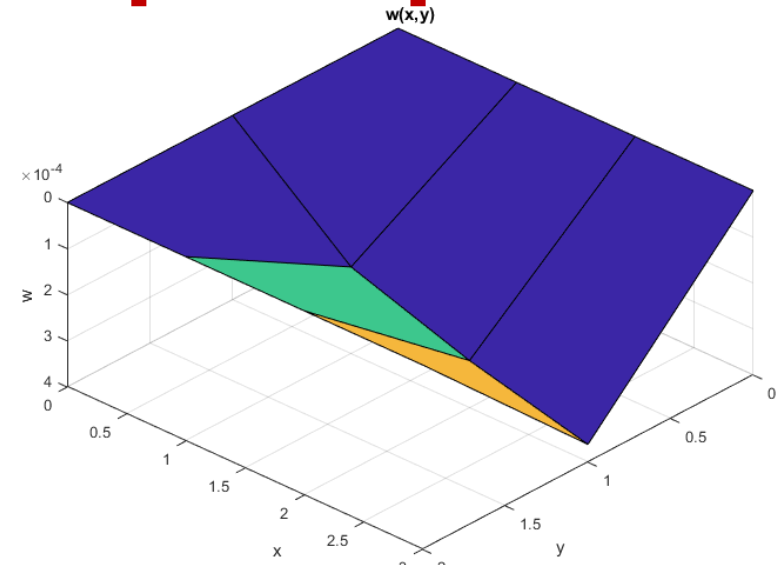
παράλληλα στον άξονα y

$M_{xy}(x=0.75, y)$



Ακρίβεια και σύγκλιση

- Για να βελτιωθεί η ακρίβεια στη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, χρησιμοποιούμε πιο πυκνό κάνναβο
- Έτσι μειώνεται η απόσταση h μεταξύ των κόμβων $\Rightarrow$ πιο ακριβής προσέγγιση των παραγώγων από τις κεντρικές/έμπροσθεν/όπισθεν διαφορές.
- Πλεονεκτήματα: Είναι πολύ εύκολο να χρησιμοποιηθεί πιο πυκνός κάνναβος
- Μεγάλο μειονέκτημα: Αυξάνεται πολύ γρήγορα το μέγεθος του γραμμικού συστήματος.



Ακρίβεια και σύγκλιση

- Για να βελτιωθεί η ακρίβεια στη μέθοδο Πεπερασμένων Διαφορών, χρησιμοποιούμε πιο πυκνό κάνναβο,
- Μεγάλο μειονέκτημα: Αυξάνεται πολύ γρήγορα το μέγεθος του γραμμικού συστήματος. Αυτό σημαίνει:
- Χρονοβόρα επίλυση. Ο χρόνος που αφιερώνεται στην επίλυση του γραμμικού συστήματος είναι συνήθως περισσότερος από το 90% του συνολικού χρόνου ανάλυσης. Σε πολύ μεγάλα συστήματα, μπορεί να χρειαστούν εβδομάδες για να ολοκληρωθεί η ανάλυση.
- Η μνήμη του υπολογιστή δεν αρκεί για να λυθεί το σύστημα ή ακόμα και να αποθηκευτεί ο πίνακας $[A_{act}]$.
- Τα παραπάνω μπορούν να αντιμετωπιστούν μερικώς με τη χρήση προχωρημένων αλγορίθμων επίλυσης. Ωστόσο, τα προβλήματα δεν εξαφανίζονται, απλά είναι πιο διαχειρίσιμα.

Ακρίβεια και σύγκλιση

- Άλλος τρόπος βελτίωσης ακρίβειας: Καλύτερη προσέγγιση των παραγώγων.
- Μέχρι τώρα οι παράγωγοι προσεγγίστηκαν από κεντρικές διαφορές και τα αναπτύγματα Taylor, κρατώντας όρους μέχρι 3^{ης} τάξης

$$\begin{aligned} w(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & w(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) \\ & + \dots \end{aligned}$$

- Κρατώντας περισσότερους όρους, βελτιώνεται σημαντικά η ακρίβεια αριθμητικής προσέγγισης των παραγώγων.

Ακρίβεια και σύγκλιση

- Βελτίωση ακρίβειας προσεγγίζοντας τις παραγώγους με περισσότερους όρους στα αναπτύγματα Taylor.
- Έτσι αλλάζουν ΟΛΑ τα stencil. Π.χ. για το $\nabla^4 w$

$$(\nabla^4)_{i,j} = \left[\begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right] \times \frac{1}{6h^4}$$

The stencil diagram shows a 7x7 grid of nodes. The central node is highlighted with a thick border and contains the value +184. The nodes are arranged in a diamond pattern. The values for the nodes are: -1 for the outermost nodes, +14 for the nodes immediately adjacent to the center, -77 for the next ring, +20 for the next ring, and -1 for the outermost nodes. The horizontal distance between nodes is labeled λ and the vertical distance is labeled h.

- Φαίνεται ότι εμπλέκονται περισσότεροι κόμβοι, άρα χρειάζονται και περισσότεροι βοηθητικοί κόμβοι εκτός της πλάκας.
- Γενικώς πρέπει να διατυπωθούν εξ αρχής τα βήματα της μεθόδου.

Ακρίβεια και σύγκλιση

- Η αύξηση τάξης προσέγγισης των παραγώγων, πρέπει να συνδυάζεται με πύκνωση του καννάβου, για να επιτευχθεί η επιθυμητή ακρίβεια.
- Οπότε υπάρχουν τα ίδια προβλήματα λόγω διόγκωσης του γραμμικού συστήματος.
- Ωστόσο, τα προβλήματα δεν είναι τόσο έντονα,
- Δηλαδή, για το ίδιο επίπεδο ακρίβειας, το γραμμικό σύστημα είναι μικρότερο όταν χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις μεγαλύτερης τάξης.
- Σε συνδυασμό με προχωρημένες μεθόδους επίλυσης συστημάτων, μπορούν να λυθούν μεγαλύτερα συστήματα και να επιτευχθεί καλή ακρίβεια σε λιγότερο χρόνο.
- Πάντα όμως θα υπάρχει ένα όριο στην ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί σε λογικά χρονικά περιθώρια.
- Αυτό είναι το βασικότερο πρόβλημα όλων των αριθμητικών μεθόδων.