



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 6: Μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (μέρος Α)

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Εισαγωγή

- Διαφορική εξίσωση πλάκας

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Οι συνοριακές συνθήκες (2 σε κάθε παρειά) είναι εξισώσεις που συνδέουν την άγνωστη συνάρτηση w και τις παραγώγους της

$$w \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}$$

- Οι πιο απλή συνοριακή συνθήκη είναι $w = 0$ (έδραση ή πάκτωση).
- Η πιο σύνθετη συνδέει το πολύ 3 από τις παραπάνω ποσότητες (ελαστικά βυθιζόμενη ή στρεφόμενη παρειά)
- Η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (Finite Difference Method - FDM) λύνει τη διαφορική εξίσωση της πλάκας αριθμητικά.
- Δηλαδή, αντί να υπολογίσει τη συνάρτηση $w(x, y)$, βρίσκει τις τιμές της w_{ij} σε πολλά χαρακτηριστικά σημεία.

Εισαγωγή

- Διαφορική εξίσωση πλάκας

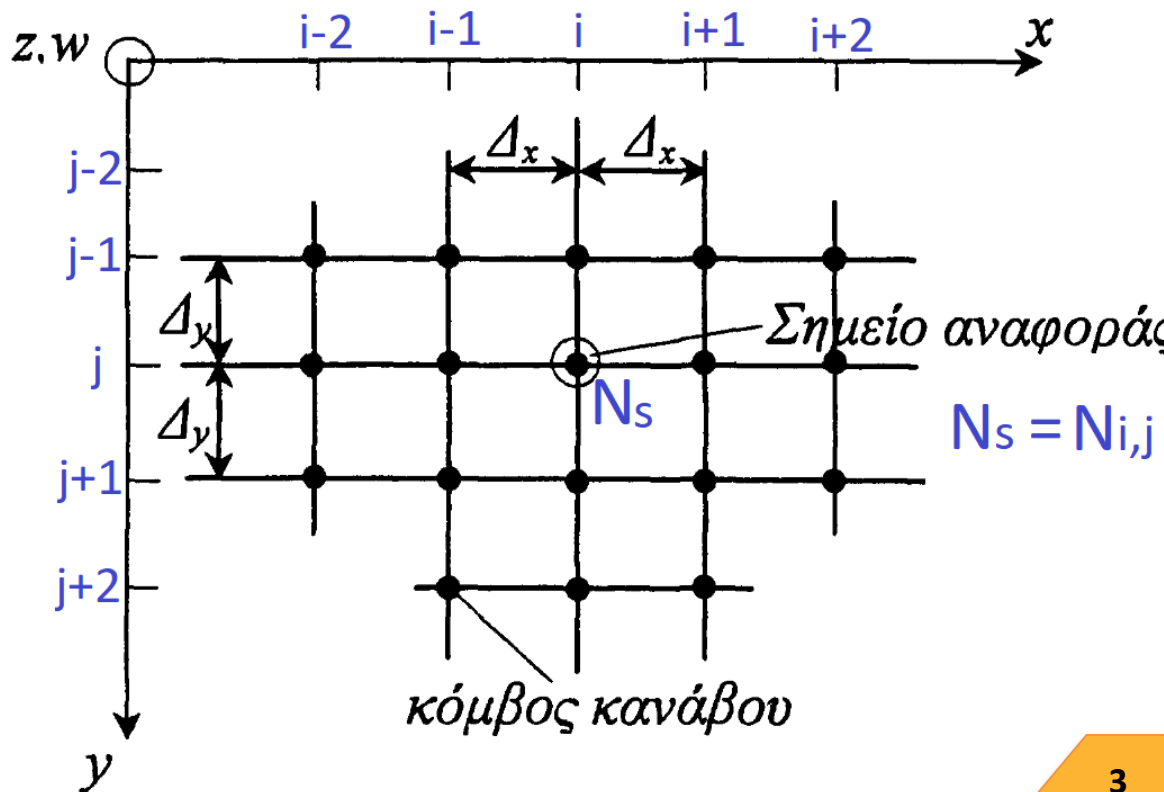
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Η μέθοδος Πεπερασμένων Διαφορών (ΠΔ), βρίσκει τις τιμές $w_{i,j}$ της $w(x, y)$ στις σε πολλά χαρακτηριστικά σημεία (x_i, y_j) .

- Αυτά διατάσσονται σε ένα πλέγμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- Το πλέγμα αποκαλείται **κάνναβος** (grid, mesh) πεπερασμένων διαφορών

- Τα σημεία $N_{i,j}(x_i, y_j)$ αποκαλούνται **κόμβοι** (nodes) του καννάβου.



Εισαγωγή

- Διαφορική εξίσωση πλάκας

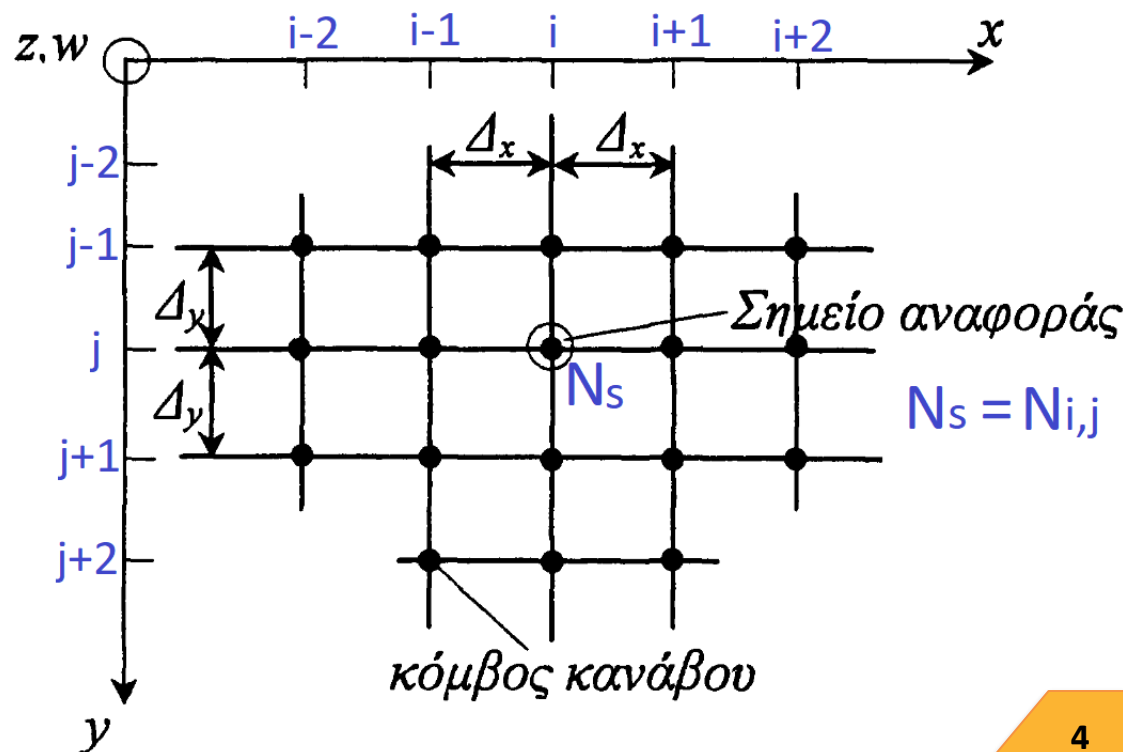
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Η συνάρτηση βύθισης αντικαθιστάται από τις διακριτές τιμές $w_{i,j}$.
- Οι παράγωγοι στους κόμβους $N_{i,j}$ εκφράζονται συναρτήσει των $w_{i,j}$. Π.χ.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

- Αντικαθιστούμε τις παραγώγους 4^{ης} τάξης στη δ.ε. για κάθε κόμβο στο εσωτερικό της πλάκας.

- Έτσι προκύπτουν γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους τις βυθίσεις $w_{i,j}$ των εσωτερικών κόμβων.

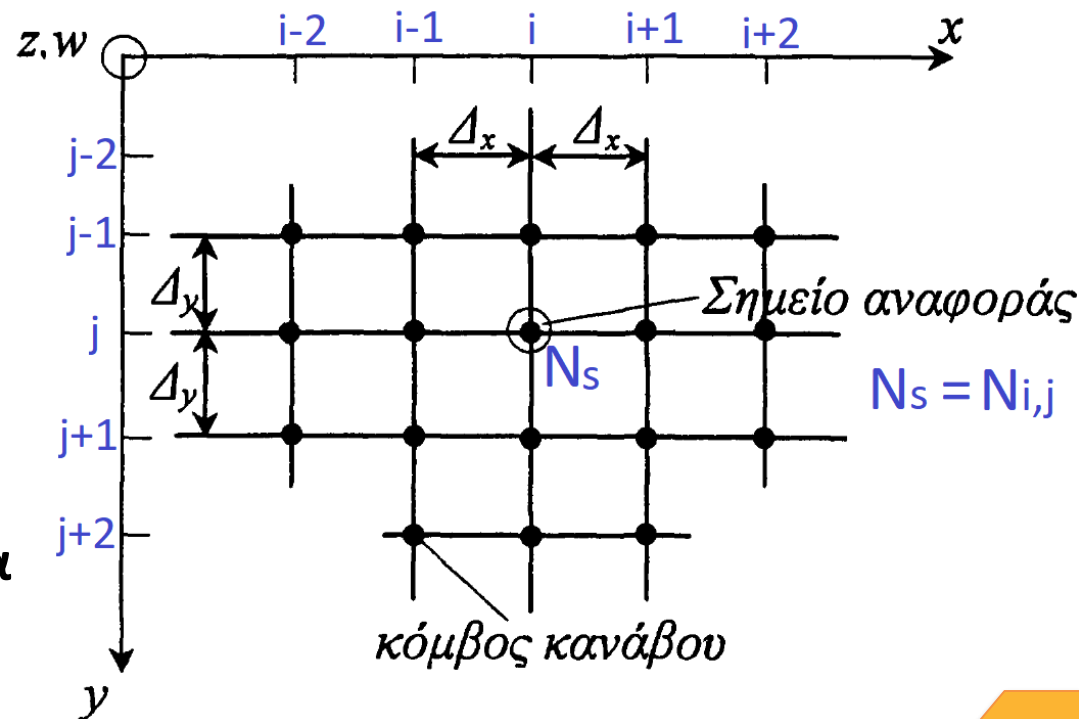


Εισαγωγή

- Η συνάρτηση βύθισης αντικαθιστάται από τις διακριτές τιμές $w_{i,j}$.
- Οι παράγωγοι στους κόμβους $N_{i,j}$ εκφράζονται συναρτήσει των $w_{i,j}$. Π.χ.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x}$$

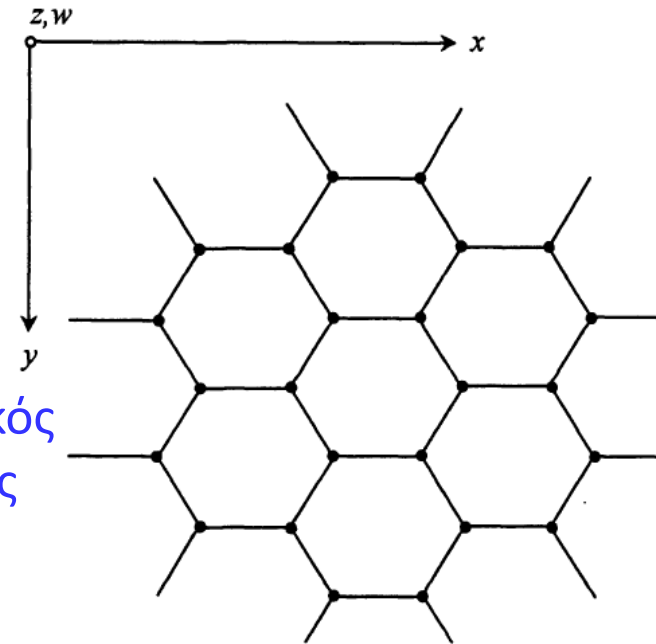
- Αντικαθιστούμε τα $w_{i,j}$ και τις παραγώγους 1^{ης} – 4^{ης} τάξης στις **συνοριακές συνθήκες** που αντιστοιχούν σε κάθε κόμβο στο **σύνορο** της πλάκας.
- Έτσι προκύπτουν και άλλες γραμμικές εξισώσεις με αγνώστους τα $w_{i,j}$.
- Λύνουμε το **γραμμικό σύστημα** όλων των εξισώσεων ως προς τα $w_{i,j}$



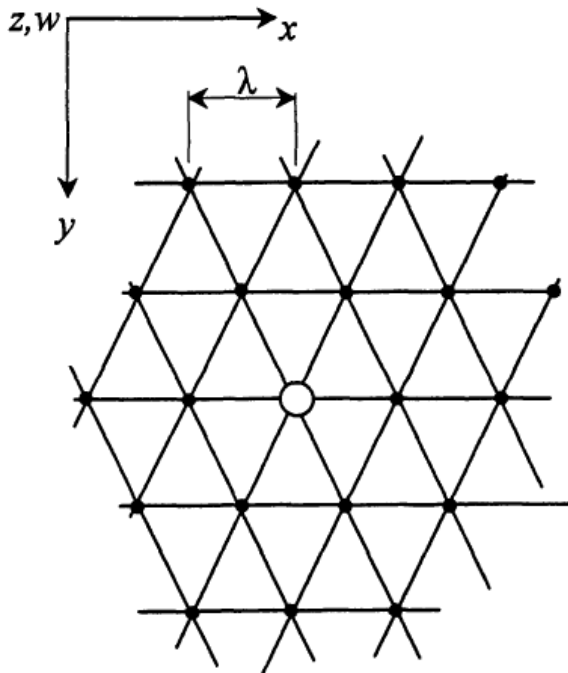
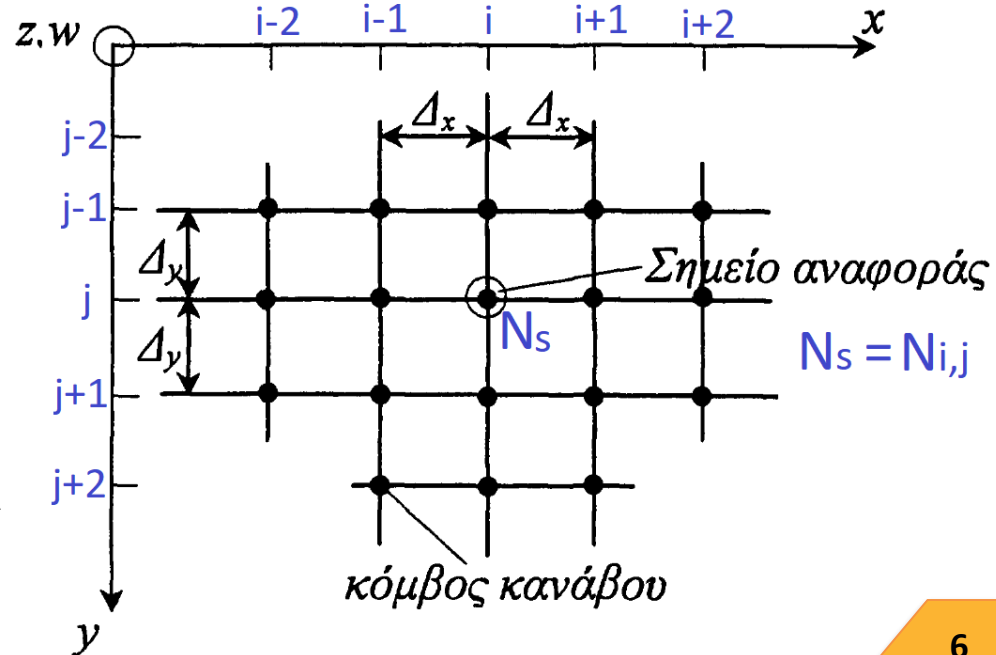
Κάνναβος ΠΔ

- Υπάρχουν διάφοροι τύποι καννάβου πεπερασμένων διαφορών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν.

Εξαγωνικός
κάνναβος



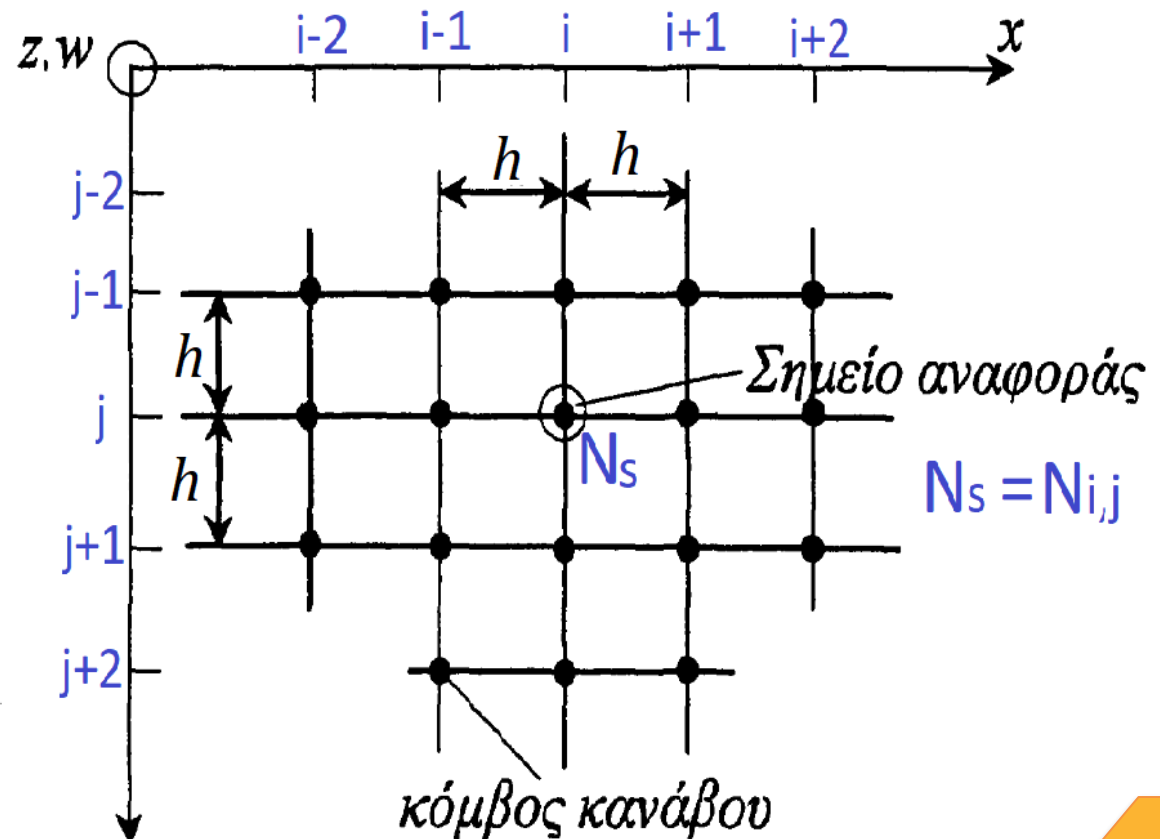
Ορθογωνικός
κάνναβος



Τριγωνικός κάνναβος

Κάνναβος ΠΔ

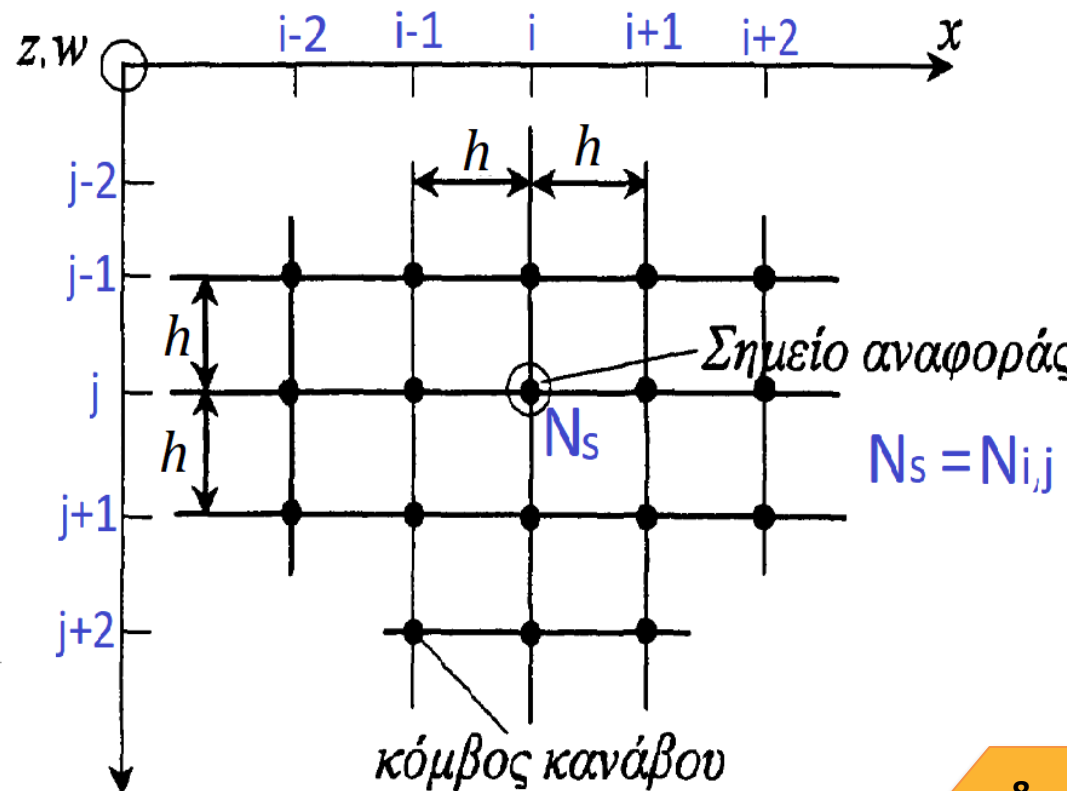
- Στα επόμενα θα εστιάσουμε σε **ορθοκανονικό** κάνναβο, που
 - Είναι ορθογώνιος
 - Οι αποστάσεις των κόμβων κατά x και y είναι παντού σταθερές και ίσες με h



Κάνναβος ΠΔ

- Ο ορθοκανονικός κάνναβος του σχήματος δημιουργείται ως
 - Έχουμε $i = 1, 2, \dots, n_i$ γραμμές κάθετες άξονα x , που απέχουν $\Delta x = h$.
 - Έχουμε $j = 1, 2, \dots, n_j$ γραμμές κάθετες άξονα y , που απέχουν $\Delta y = h$.
 - Οι κόμβοι του καννάβου $N_{i,j}$ είναι τα σημεία τομής των παραπάνω γραμμών

- Κάθε κόμβος θα περιγράφεται από το ζεύγος (i, j) .
- Αναφέρομαι σε αυτόν ως $N_{i,j}$
- Ο ίδιος κόμβος έχει επίσης έναν αύξοντα αριθμό s .
- Άρα αναφέρομαι στον ίδιο κόμβο και ως $N_s \equiv N_{i,j}$



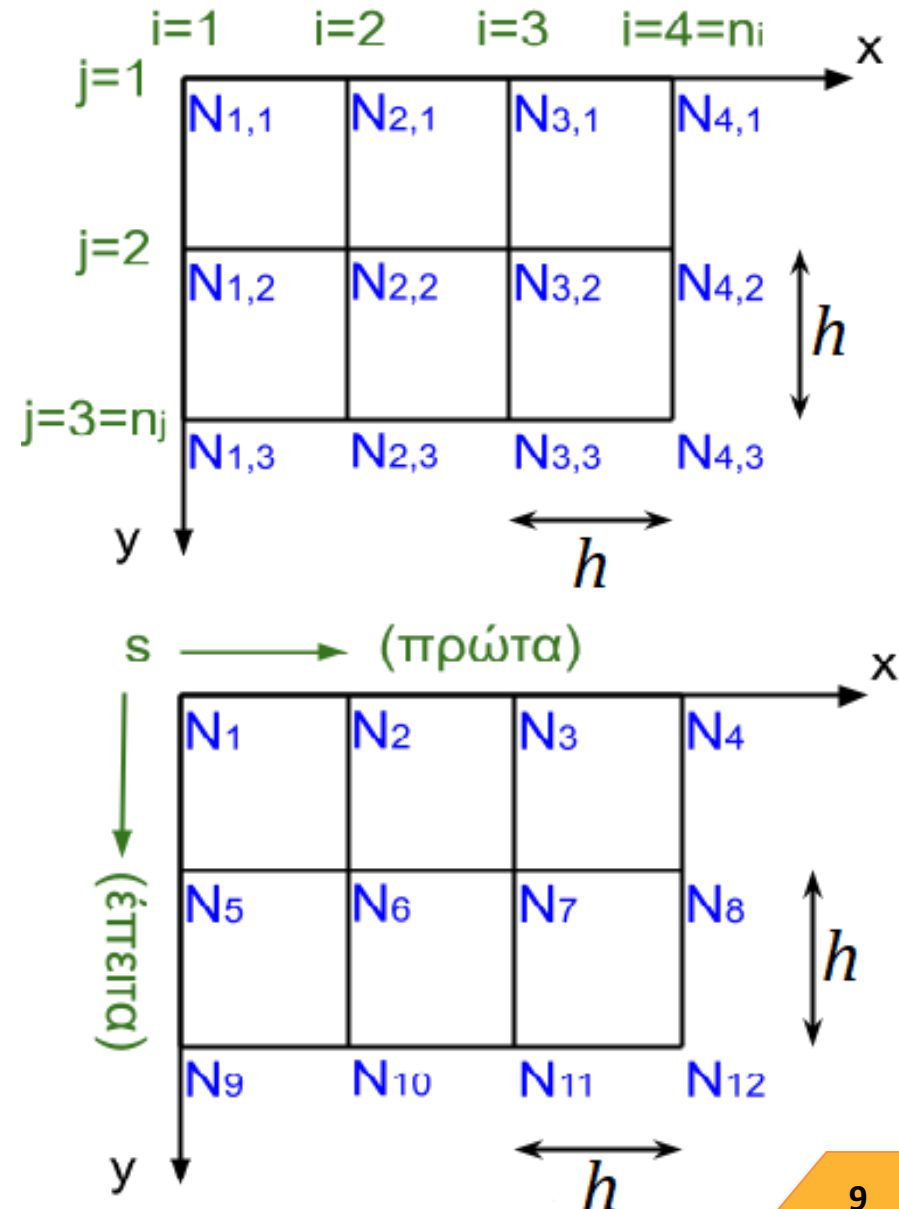
Κάνναβος ΠΔ

- Αναφέρονται σε κάθε κόμβο ως $N_{i,j}$
- Συχνά βολεύει να έχω έναν μόνο αύξοντα αριθμό s για κάθε κόμβο.
- Άρα αναφέρονται στον ίδιο κόμβο και ως $N_s \equiv N_{i,j}$
- Θα ισχύει $s = (j - 1) \cdot n_i + i$
- Οι συντεταγμένες του κόμβου $N_{i,j}$ είναι (x_i, y_j) :

$$x_i = (i - 1) \cdot h$$

$$y_j = (j - 1) \cdot h$$
- Αν a, b είναι οι διαστάσεις της πλάκας στους άξονες x, y

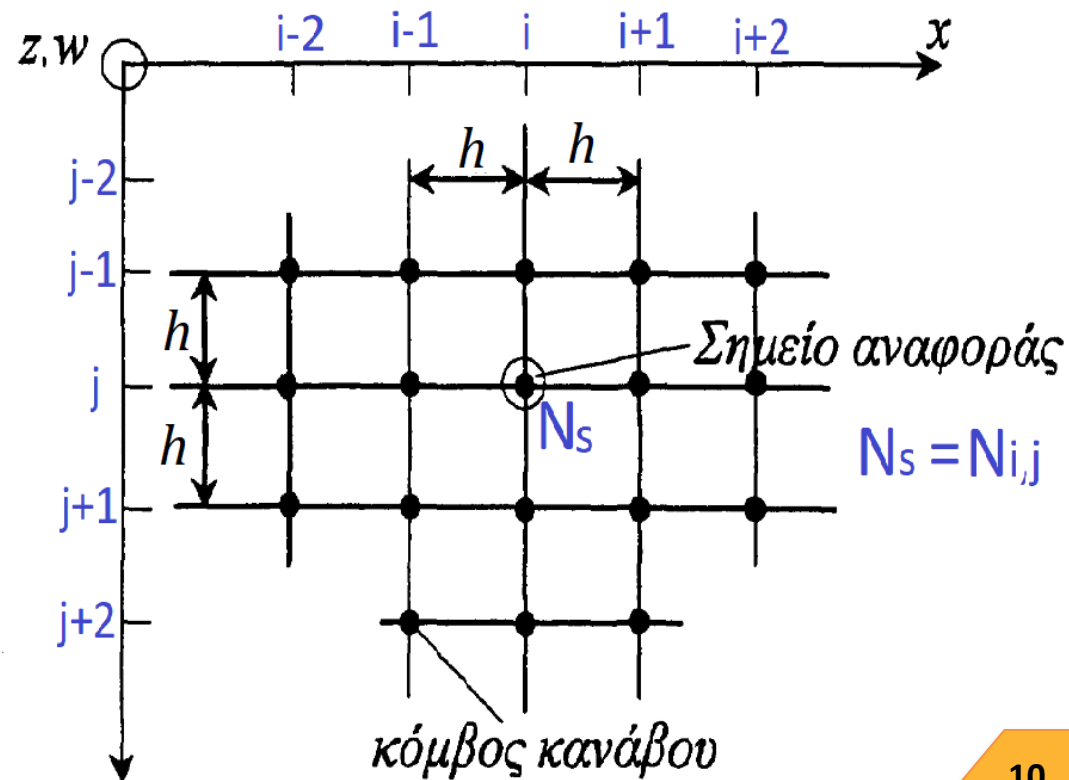
$$h = \frac{a}{n_i - 1} = \frac{b}{n_j - 1}$$





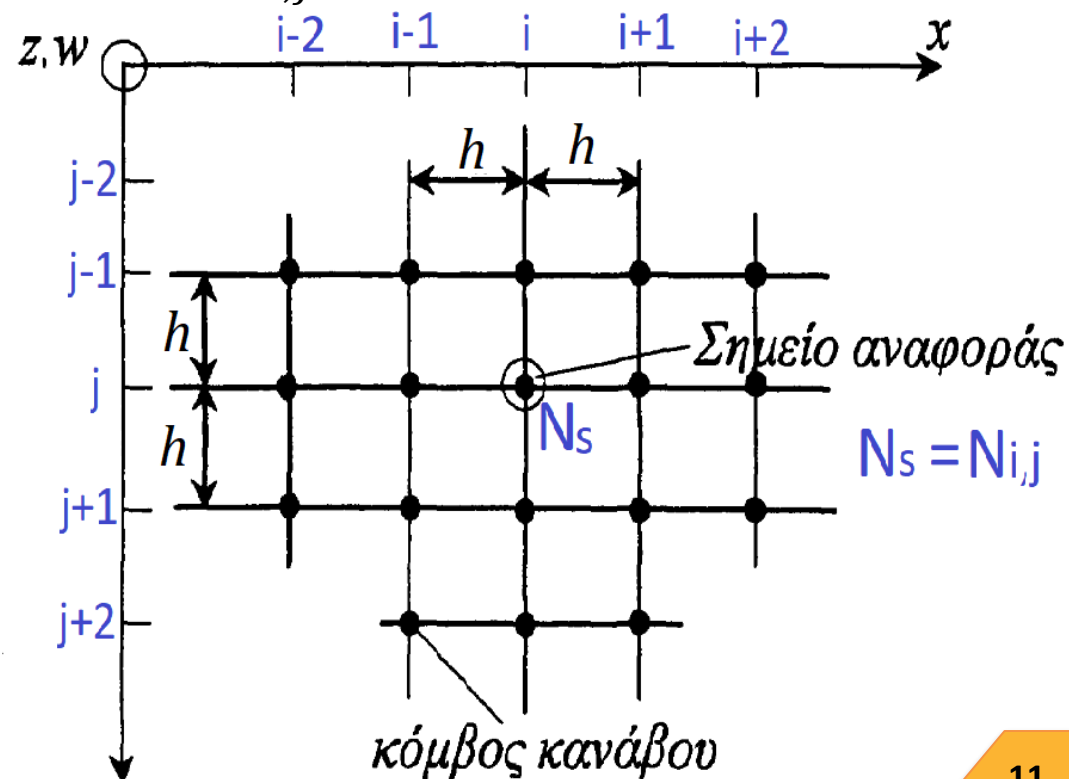
Βύθιση

- Η τιμή της βύθισης στον κόμβο $N_{i,j}$ είναι $w_{i,j} = w(x_i, y_j)$
- Αυτές είναι οι άγνωστες ποσότητες που θα εμφανίζονται στο τελικό γραμμικό σύστημα.
- Όλες οι παράγωγοι στους κόμβους $N_{i,j}$ εκφράζονται ως προς τις $w_{i,j}$.
- Τα εντατικά μεγέθη και οι τάσεις γράφονται συναρτήσει της βύθισης (από θεωρία Kirchhoff).
- Άρα όλα τα εντατικά μεγέθη και οι τάσεις μπορούν να υπολογιστούν στους κόμβους $N_{i,j}$, μόλις βρεθούν οι βυθίσεις $w_{i,j}$



Βύθιση

- Η βύθιση προσεγγίζεται λοιπόν από τις επικόμβιες τιμές $w_{i,j} = w(x_i, y_j)$
- Τα $w_{i,j}$ είναι οι άγνωστοι ενός γραμμικού συστήματος που προκύπτει από τη δ.ε. και τις συνοριακές συνθήκες.
- Τα εντατικά μεγέθη και οι τάσεις μπορούν να υπολογιστούν στους κόμβους $N_{i,j}$, μόλις βρεθούν οι βυθίσεις $w_{i,j}$
- Όσο περισσότεροι είναι οι κόμβοι σε κάθε άξονα, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η ακρίβεια των βυθίσεων $w_{i,j}$, αλλά και των εντατικών μεγεθών.
- Όμως έτσι μεγαλώνει το γραμμικό σύστημα, οπότε απαιτείται περισσότερος χρόνος και μνήμη για να λυθεί



Σειρές Taylor

- Σειρά Taylor (πολυωνυμική) για οποιαδήποτε 1D συνάρτηση

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots$$

- Δηλαδή εκφράζω την $f(x)$ ως πολυώνυμο με συντελεστές που προκύπτουν από τις τιμές της και των παραγώγων της στη θέση x_0 .

- Αν πάρω $\Delta x = x - x_0$, η σειρά μπορεί να γραφτεί και ως

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Delta x^3 + \dots$$

- Σειρά Taylor (πολυωνυμική) για την 2D βύθιση της πλάκας

$$\begin{aligned} w(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & w(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

Σειρές Taylor

- Σειρά Taylor (πολυωνυμική) για την βύθιση της πλάκας

$$\begin{aligned} w(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & w(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + \dots \end{aligned}$$

- Η παραπάνω είναι πολυωνυμική λόγω των δυνάμεων των $\Delta x, \Delta y$. Οι συντελεστές των πολυωνύμων προκύπτουν από την τιμή της w και των παραγώγων της στη θέση (x_0, y_0)
- Στην σειρά Taylor, οι πρώτοι όροι του αθροίσματος (μονώνυμα μικρού βαθμού) δίνουν τη μεγαλύτερη προσφορά στην τιμή της συνάρτησης w .
- Μπορώ να πάρω λίγους μόνο από τους άπειρους όρους της παραπάνω (π.χ. μέχρι μονώνυμα 3^{ου} βαθμού), οπότε προσεγγίζω την w , αλλά χάνω κάποια ακρίβεια

Σειρές Taylor

- Αν πάρω μόνο τους όρους της σειράς Taylor μέχρι και 3^ο βαθμό:

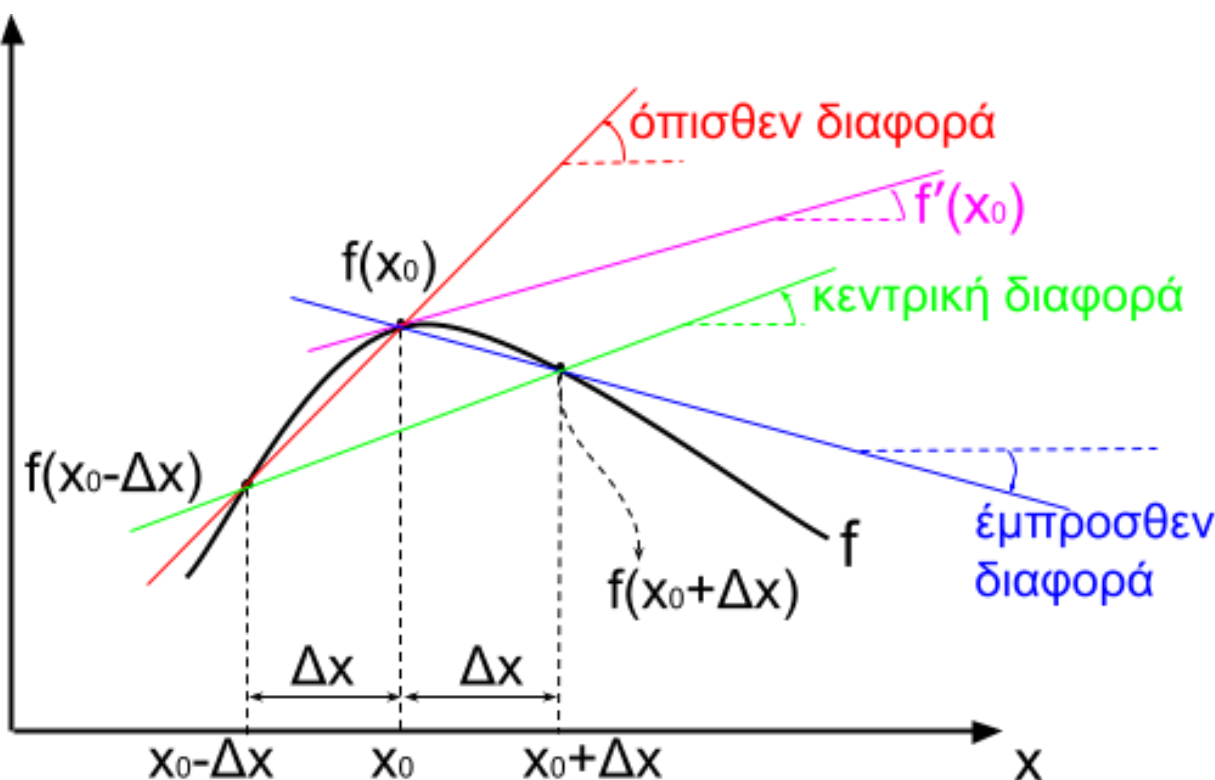
$$\begin{aligned} w(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = & w(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial w}{\partial y} \Delta y \right) + \\ & + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Delta y^2 \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \Delta x^3 + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \Delta x^2 \Delta y + 3 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \Delta x \Delta y^2 + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \Delta y^3 \right) + O_3 \end{aligned}$$

- Όπου O_3 είναι το σφάλμα αν κρατήσω μόνο μέχρι και 3^ο βαθμό.
- Όσο μεγαλύτερο βαθμό κρατάω στη σειρά Taylor, τόσο θα μειώνεται το σφάλμα και θα έχω καλύτερη εκτίμηση.
- Επίσης, για δεδομένο μέγιστο βαθμό των όρων της σειράς (π.χ. 3^ο βαθμό), όσο μικρότερα είναι τα $\Delta x, \Delta y$, τόσο μικρότερο θα είναι το σφάλμα

Προέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Στη μέθοδο ΠΔ, όλες οι παράγωγοι εκφράζονται συναρτήσει της τιμής της βύθισης.
- Προτιμούμε να χρησιμοποιούμε **κεντρικές διαφορές**. Π.χ. σε 1D:

$$\frac{df(x_0)}{dx} \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$



Προσέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Για την 2^η παράγωγο χρησιμοποιούμε τα αναπτύγματα Taylor, που δίνουν καλύτερη ακρίβεια:

$$f(x_0 + \Delta x) \simeq f(x_0) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Delta x^3$$

$$f(x_0 - \Delta x) \simeq f(x_0) - \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} \Delta x^3$$

- Προσθέτωντας προκύπτει:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) \simeq 2f(x_0) + \frac{d^2 f}{dx^2} \Delta x^2 \Rightarrow$$
$$\frac{d^2 f}{dx^2} \simeq \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

- Με συνδυασμό των 2 ιδεών (κεντρική διαφορά, Taylor) προκύπτουν προσεγγιστικές σχέσεις για όλες τις παραγώγους.

Προσέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Αντίστοιχα σε 2D:

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{x_0, y_0} \simeq \frac{w(x_0 + \Delta x, y_0) - w(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{x_0, y_0} \simeq \frac{w(x_0, y_0 + \Delta y) - w(x_0, y_0 - \Delta y)}{2\Delta y}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{x_0, y_0} \simeq \frac{w(x_0 + \Delta x, y_0) - 2w(x_0, y_0) + w(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2}$$

...

- Στη μέθοδο ΠΔ θα χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω σχέσεις παίρνοντας $\Delta x = \Delta y = h$
- Επιπλέον θα γράφονται γύρω από τη θέση του κάθε κόμβου (x_i, y_j) , οπότε $w(x_0, y_0) = w_{i,j}$, $w(x_0 + \Delta x, y_0) = w_{i+1,j}$, κτλ.

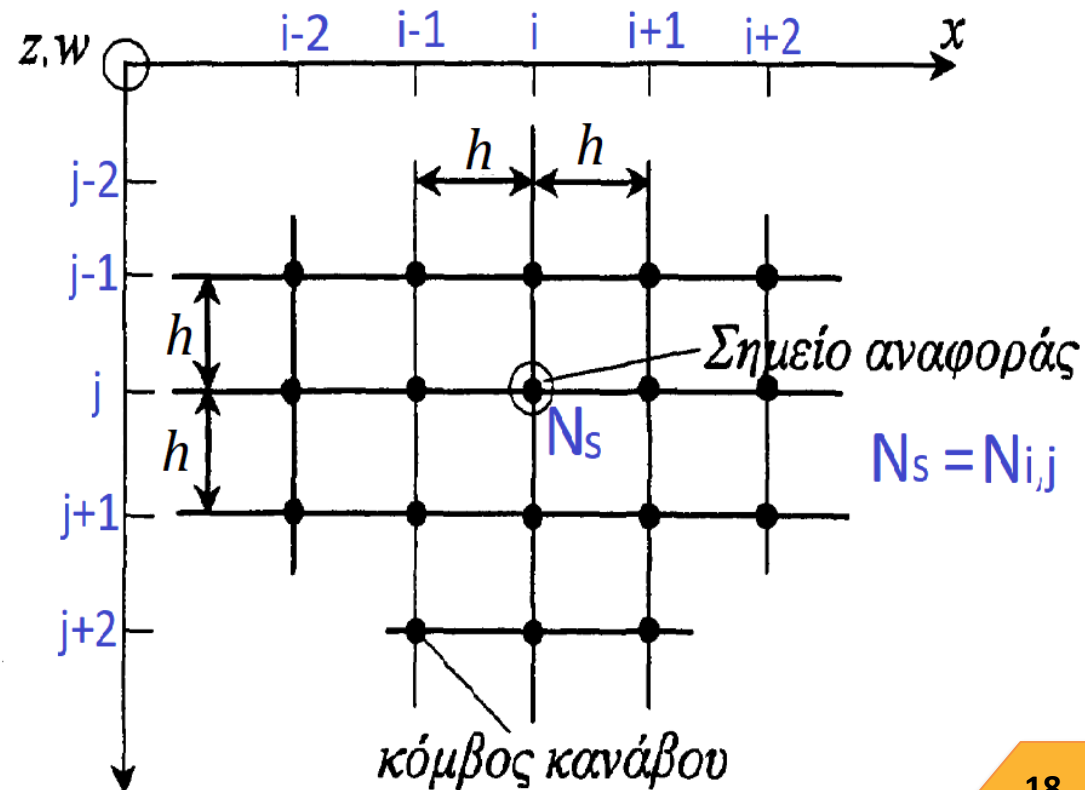
Προέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Για παράδειγμα

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})$$

- Άρα περισσότεροι κόμβοι $\Rightarrow$ μικρότερα $h = \Delta x = \Delta y \Rightarrow$ καλύτερη ακρίβεια



Προέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Δουλεύοντας με κεντρικές διαφορές και αναπτύγματα Taylor προκύπτουν:
- Παράγωγοι 1^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h} (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1})$$

- Παράγωγοι 2^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{h^2} (w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j})$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{h^2} (w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1})$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{4h^2} (w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j+1})$$

Προσέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Παράγωγοι 3^{ης} τάξης:

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h^3} (-w_{i-2,j} + 2w_{i-1,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+2,j})$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h^3} (-w_{i,j-2} + 2w_{i,j-1} - 2w_{i,j+1} + w_{i,j+2})$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h^3} (w_{i+1,j+1} - 2w_{i,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + 2w_{i,j-1} - w_{i-1,j-1})$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{2h^3} (w_{i+1,j+1} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + 2w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1})$$

Προσέγγιση παραγώγων στην ΠΔ

- Παράγωγοι 4^{ης} τάξης:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{h^4} (6w_{i,j} - 4w_{i+1,j} - 4w_{i-1,j} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j})$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|_{i,j} \simeq \frac{1}{h^4} (6w_{i,j} - 4w_{i,j+1} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^4} \cdot & \left[4w_{i,j} - 2w_{i,j+1} - 2w_{i,j-1} - 2w_{i+1,j} - 2w_{i-1,j} \right. \\ & \left. + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} \right] \end{aligned}$$

Stencil υπολογισμού

- Στη μέθοδο ΠΔ οι πράξεις και ο μετέπειτα προγραμματισμός διευκολύνονται με τη χρήση **stencil** (άβακας) υπολογισμού.
- Π.χ. έστω ότι χρειάζεται να υπολογιστεί η ποσότητα F_{ij} για κάποιο κόμβο
$$F_{ij} = a_1 \cdot w_{i-1,j-1} + a_2 \cdot w_{i,j-1} + a_3 \cdot w_{i,j+1} + a_4 \cdot w_{i-1,j} + a_5 \cdot w_{i,j} + a_6 \cdot w_{i+1,j+1}$$
- όπου τα w_{ij} γύρω από τον κόμβο πολλαπλασιάζονται με κάποιους συντελεστές $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ και στο τέλος άθροίζονται.
- Είναι δηλαδή ένα εσωτερικό γινόμενο μεταξύ διανύσματος συντελεστών α και βυθίσεων w .
- Το stencil υπολογισμού για την ποσότητα F_{ij} είναι μια σχηματική απεικόνιση αυτού του εσωτερικού γινομένου.

Stencil υπολογισμού

$$F_{ij} = a_1 \cdot w_{i-1,j-1} + a_2 \cdot w_{i,j-1} + a_3 \cdot w_{i,j+1} + a_4 \cdot w_{i-1,j} + a_5 \cdot w_{i,j} + a_6 \cdot w_{i+1,j+1}$$

- Το stencil υπολογισμού για την ποσότητα F_{ij} είναι μια σχηματική απεικόνιση αυτού του εσωτερικού γινομένου

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \alpha_4 & \boxed{\alpha_5} & \\ & \alpha_3 & \alpha_6 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

- όπου

$$\tilde{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_{i-1,j-1} & w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} \\ w_{i-1,j} & \boxed{w_{i,j}} & w_{i+1,j} \\ w_{i-1,j+1} & w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$$

- Δηλαδή κάθε συντελεστής α πολλαπλασιάζεται με το w στην αντίστοιχη θέση.
- Αν κάποιο w δεν έχει αντίστοιχο συντελεστή α , τότε στο stencil βάζουμε 0 ή τίποτα σε εκείνη τη θέση. Π.χ. Ο συντελεστής του $w_{i+1,j}$.

Stencil υπολογισμού

- Stencil υπολογισμού για την ποσότητα F_{ij}

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \boxed{\alpha_5} & \\ & & \alpha_6 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} \quad \tilde{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_{i-1,j-1} & w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} \\ w_{i-1,j} & \boxed{w_{i,j}} & w_{i,j+1} \\ w_{i-1,j+1} & w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$$

- Δεν χρειάζεται να έχουμε όλους τους συντελεστές. Τα w που δεν αντιστοιχούν σε συντελεστή, δεν συμμετέχουν στον υπολογισμό της $F_{i,j}$.
- Τα stencils γράφονται γύρω από κάποιο «κεντρικό» κόμβο i, j . Τον σημειώνουμε ρητά, π.χ. $\boxed{\alpha_5}$.
- Μπορεί να μην υπάρχει συντελεστής για τον κεντρικό κόμβο. Τον σημειώνουμε και πάλι, π.χ.

$$G_{ij} = w_{i,j-1} - 2w_{i-1,j} - 1w_{i,j+1} + 3w_{i+1,j+1} = \begin{bmatrix} & 1 & \\ -2 & \boxed{} & -1 \\ & 3 & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Stencil υπολογισμού

- Stencil υπολογισμού για την ποσότητα F_{ij}

$$F_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_4 & \boxed{\alpha_5} & \\ & & \alpha_6 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} \quad \tilde{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} w_{i-1,j-1} & w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} \\ w_{i-1,j} & \boxed{w_{i,j}} & w_{i,j+1} \\ w_{i-1,j+1} & w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$$

- Δεν χρειάζεται να έχουμε όλους τους συντελεστές. Τα w που δεν αντιστοιχούν σε συντελεστή, δεν συμμετέχουν στον υπολογισμό της $F_{i,j}$.
- Μπορεί το stencil να έχει περιορισμένες γραμμές. Π.χ.
$$H_{ij} = w_{i-1,j} - 2w_{i,j} + w_{i+1,j} = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$
- Σε όλα τα παραδείγματα το $\tilde{W}_{i,j}$ περιέχει όλους τα w γύρω από τον κόμβο i,j .
- Ανάλογα με το ποιες γραμμές, στήλες ή στοιχεία του stencil είναι κενά, τα αντίστοιχα w δεν συμμετέχουν στον υπολογισμό.

Stencil υπολογισμού

- Στη μέθοδο ΠΔ για πλάκες θα χρησιμοποιούμε ως το εξής 13-point stencil:

$$\begin{bmatrix} & & a_{nn} & & \\ & a_{nw} & a_n & a_{ne} & \\ a_{ww} & a_w & \boxed{a_c} & a_e & a_{ee} \\ & a_{sw} & a_s & a_{se} & \\ & & a_{ss} & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

- όπου

$$\tilde{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} & & w_{i,j-2} & & \\ & w_{i-1,j-1} & w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} & \\ w_{i-2,j} & w_{i-1,j} & \boxed{w_{i,j}} & w_{i+1,j} & w_{i+2,j} \\ & w_{i-1,j+1} & w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} & \\ & & w_{i,j+2} & & \end{bmatrix}$$

- Οι δείκτες c, n, s, w, e δηλώνουν “center”, “north”, “south”, “west”, “east”
- Έτσι nn δηλώνει “north-north”, sw δηλώνει “south-west”, κτλ.

Stencil υπολογισμού

- Στη μέθοδο ΠΔ για πλάκες θα χρησιμοποιούμε έως το εξής 13-point stencil:

$$\begin{bmatrix} & & a_{nn} & & \\ & a_{nw} & a_n & a_{ne} & \\ a_{ww} & a_w & \boxed{a_c} & a_e & a_{ee} \\ & a_{sw} & a_s & a_{se} & \\ & & a_{ss} & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

- όπου

$$\tilde{W}_{i,j} = \begin{bmatrix} & & & w_{i,j-2} & \\ & & w_{i-1,j-1} & w_{i,j-1} & w_{i+1,j-1} \\ w_{i-2,j} & w_{i-1,j} & \boxed{w_{i,j}} & w_{i+1,j} & w_{i+1,j} \\ & w_{i-1,j+1} & w_{i,j+1} & w_{i+1,j+1} & \\ & & w_{i,j+2} & & \end{bmatrix}$$

- Όλες οι παράγωγοι, τα εντατικά μεγέθη και οι εξισώσεις εκφράζονται συναρτήσει των επικόμβιων w και βολεύει να γραφονται σε μορφή stencil.
- Το παραπάνω 13-point stencil είναι το πιο πολύπλοκο που θα εμφανιστεί. Τα περισσότερα θα προκύπτουν από αυτό με αρκετές κενές γραμμές και στήλες.

Stencil παραγώγων

- Παράγωγοι 1^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial w}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & \boxed{} & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 \\ \boxed{} \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

- Παράγωγοι 2^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{-2} & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \boxed{-2} \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ & \boxed{} & \\ 1 & & -1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Stencil παραγώνων

- Παράγωγοι 3^{ης} τάξης

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & \square & -2 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ \square \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ & \square & \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h^3} \begin{bmatrix} -1 & & 1 \\ 2 & \square & -2 \\ -1 & & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Stencil παραγώνων

- Παράγωγοι 4^{ης} τάξης:

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & \boxed{6} & -4 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ \boxed{6} \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$\left. \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right|_{i,j} = \frac{1}{h^4} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & \boxed{4} & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Stencil εντατικών μεγεθών

- Και τα εντατικά μεγέθη γράφονται σε μορφή stencil.
- Μόλις βρεθούν τα $w_{i,j}$ μπορούμε με χρήση των stencil να υπολογίσουμε τα εντατικά μεγέθη.

- Ροπές:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

- Ενεργές τέμνουσες:

$$R_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$R_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]$$

Stencil εντατικών μεγεθών

- Ροπές:

$$M_x = \frac{-D}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & \boxed{\frac{-2-2\nu}{\nu}} & 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$M_y = \frac{-D}{h^2} \begin{bmatrix} \nu & \boxed{\frac{-2-2\nu}{1}} & \nu \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \frac{-D(1-\nu)}{4h^2} \begin{bmatrix} -1 & \boxed{} & 1 \\ 1 & & -1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Stencil εντατικών μεγεθών

- Ενεργές τέμνουσες:

$$R_x = \frac{-D}{2h^3} \begin{bmatrix} \nu - 2 & & 2 - \nu \\ -1 & 6 - 2\nu & \square & 2\nu - 6 & 1 \\ & \nu - 2 & & 2 - \nu & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

$$R_y = \frac{-D}{2h^3} \begin{bmatrix} & -1 & \\ \nu - 2 & 6 - 2\nu & \nu - 2 \\ & \square & \\ 2 - \nu & 2\nu - 6 & 2 - \nu \\ & 1 & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$

Διαφορική εξίσωση ισορροπίας

- Η διαφορική εξίσωση ισορροπίας της πλάκας

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

Ισοδύναμο
φορτίο στον
κόμβο (i, j)

- Γράφεται σε μορφή stencil ως

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = \frac{q_{ij}}{D} h^4$$

- Για σύγκριση, χωρίς stencil θα έπρεπε να δουλεύουμε με τη εξίσωση ως

$$\begin{aligned} & 20w_{i,j} \\ & -8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) \\ & + 2(w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}) \\ & + (w_{i,j+2} + w_{i,j-2} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j}) = \frac{q_{i,j}}{D} h^4 \end{aligned}$$

Διαφορική εξίσωση ισορροπίας

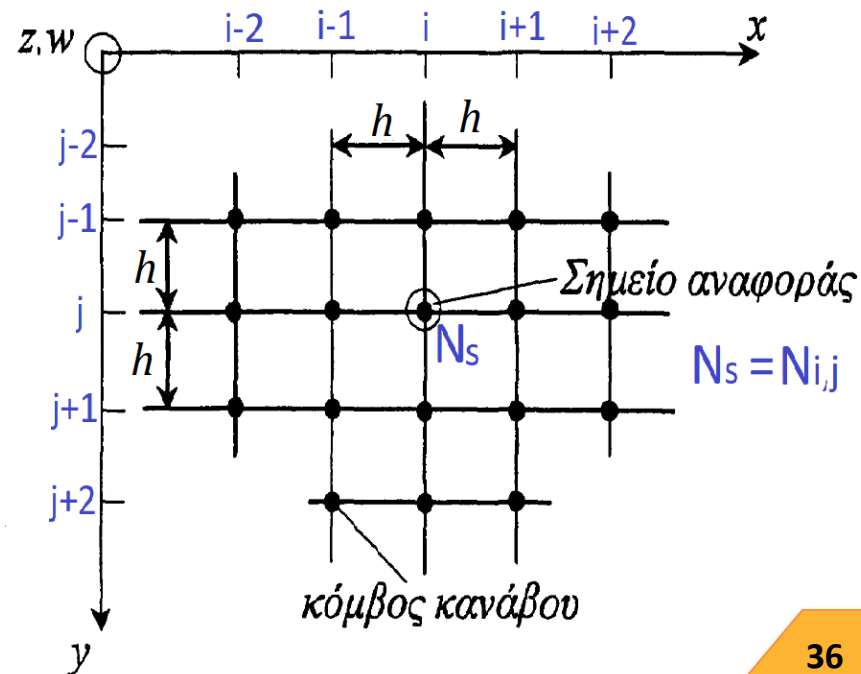
- Η δ.ε. ισορροπίας της πλάκας μετατράπηκε σε γραμμική εξίσωση (με stencil)

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = \frac{q_{ij}}{D} h^4$$

- τα εμπλεκόμενα w εντός του $\tilde{W}_{i,j}$ είναι οι άγνωστοι του προβλήματος.
- Η παραπάνω είναι εξίσωση γράφεται για κάθε κόμβο όπου όπου η βύθιση $w_{i,j}$ είναι ελεύθερη να αναπτυχθεί, δηλαδή:
 - στο εσωτερικό της πλάκας
 - σε ελεύθερες παρειές ή με ελαστικές στηρίξεις
- Από όλες τις εξισώσεις θα προκύψει ένα γραμμικό σύστημα. Λύνοντάς το υπολογίζονται όλα τα επικόμβια w .
- Τα υπόλοιπα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν (π.χ. εντατικά) υπολογίζονται συναρτήσει των επικόμβιων w με κατάλληλα stencils.

Φορτία

- Στο δεξί μέλος των γραμμικών εξισώσεων ισορροπίας εμφανίζεται η ποσότητα $q_{i,j}$
- Στη μέθοδο ΠΔ γράφουμε τις γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας μόνο στους κόμβους του καννάβου, όμως η φόρτιση της πλάκας είναι το κατανεμημένο φορτίο $q(x, y)$ σε όλη την επιφάνειά της.
- Για να είναι οι γραμμικές εξισώσεις ισορροπίας στατικά ισοδύναμες με την αρχική διαφορική εξίσωση, θα πρέπει να ασκηθούν στους κόμβους ισοδύναμα φορτία
- Έτσι σε κόμβο $N_{i,j}$ θα ασκείται φορτίο $q_{i,j}$, το οποίο προκύπτει από την κατανομή του κατανεμημένου φορτίου $q(x, y)$ γύρω από τον κόμβο $N_{i,j}$



Φορτία

A) Ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο

- Δηλαδή $q(x, y) = q_0 = \text{const}$
- Το φορτίο σε κάθε κόμβο θα είναι

$$q_{i,j} = q_0$$

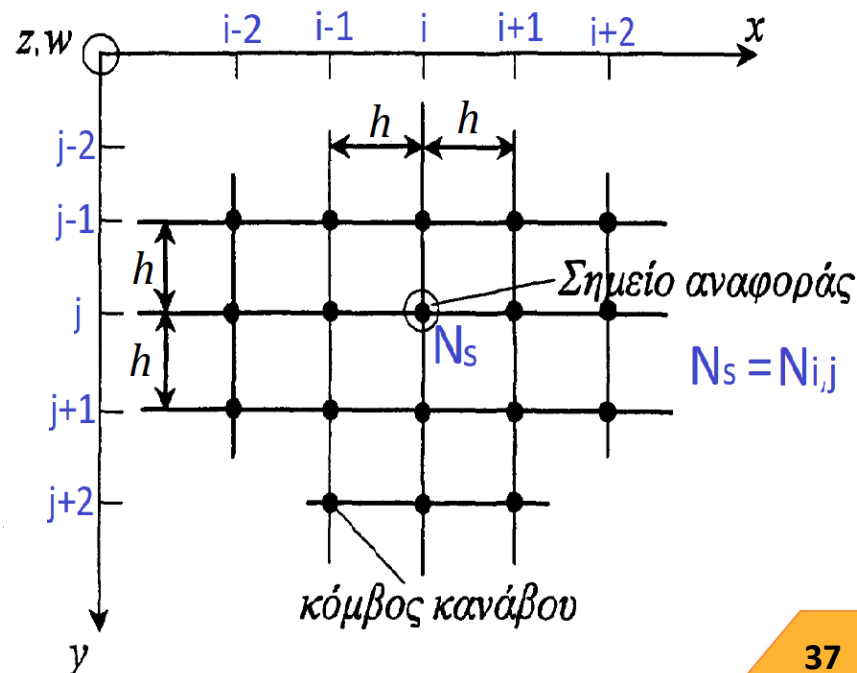
B) Συγκεντρωμένο φορτίο

- Έστω συγκεντρωμένο φορτίο P_z σε κόμβο $N_{i,j}$

- Το φορτίο P_z ισοδυναμεί με ομοιόμορφο κατανεμημένο φορτίο

$$q_{i,j} = \frac{P_z}{\Delta x \Delta y} = \frac{P_z}{h^2}$$

- Το οποίο ασκείται μόνο στον κόμβο $N_{i,j}$



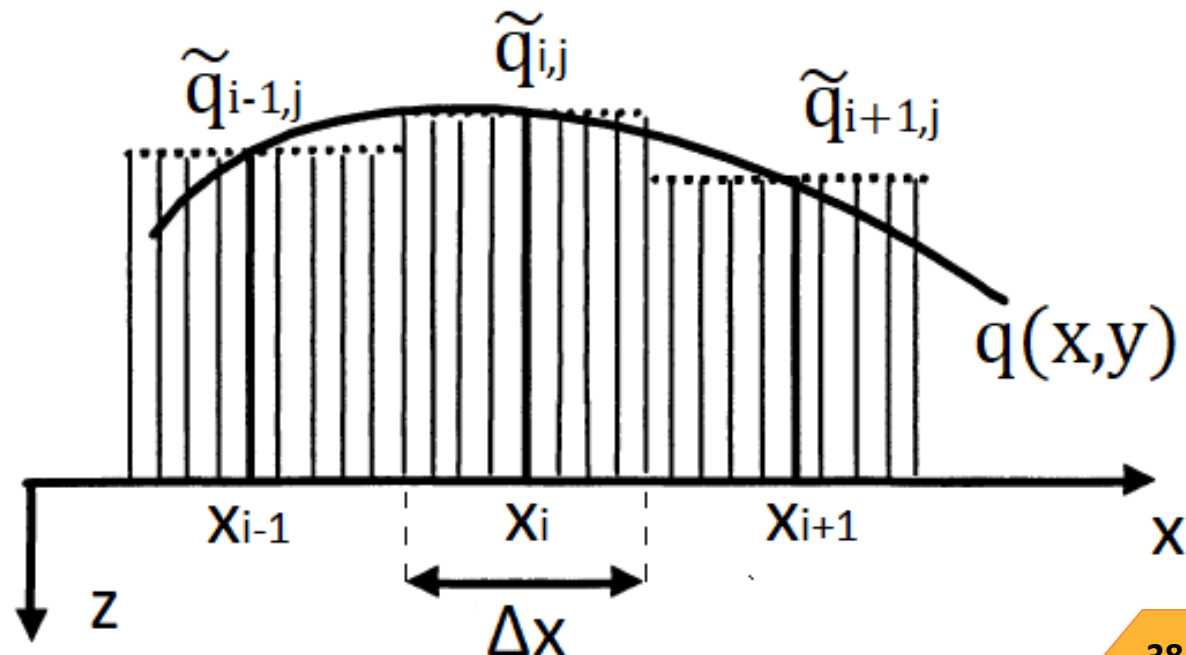
Φορτία

Γ) Ομαλά μεταβαλλόμενο κατανεμημένο φορτίο

- Έστω $\tilde{q}_{i,j} = q(x_i, y_j)$ η τιμή της $q(x, y)$ στον κόμβο που μας ενδιαφέρει.
- Αν η μεταβολή του φορτίου είναι αργή, μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν σταθερό σε περιοχή $(\pm \Delta x, \pm \Delta y)$ γύρω από τον κόμβο $N_{i,j}$.
- Ανάλογα με το ομοιόμορφο φορτίο, το ισοδύναμο $q_{i,j}$ θα είναι:

$$q_{i,j} = \tilde{q}_{i,j} = q(x_i, y_j)$$

- Δηλαδή ίσο με την τιμή της $q(x, y)$ στον κόμβο $N_{i,j}$, που όμως δεν είναι σταθερή.



Φορτία

Δ) Έντονα μεταβαλλόμενο κατανεμημένο φορτίο

- Έστω $\tilde{q}_{i,j} = q(x_i, y_j)$ η τιμή της $q(x, y)$ σε κάποιο κόμβο.
- Από στατική ισορροπία ισοδύναμου μοντέλου αμφιέρειστων δοκών, προκύπτει

$$q_{i,j} = \frac{1}{36} \cdot \left(\tilde{q}_{i-1,j-1} + 4\tilde{q}_{i,j-1} + \tilde{q}_{i+1,j-1} + 4\tilde{q}_{i,j+1} + 16\tilde{q}_{i,j} + 4\tilde{q}_{i+1,j} + \tilde{q}_{i-1,j+1} + 4\tilde{q}_{i,j+1} + \tilde{q}_{i+1,j+1} \right)$$

- Ή σε μορφή stencil

$$q_{i,j} = \frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & \boxed{16} & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} * \tilde{Q}_{i,j} \quad \tilde{Q}_{i,j} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{i-1,j-1} & \tilde{q}_{i,j-1} & \tilde{q}_{i+1,j-1} \\ \tilde{q}_{i-1,j} & \boxed{\tilde{q}_{i,j}} & \tilde{q}_{i,j+1} \\ \tilde{q}_{i-1,j+1} & \tilde{q}_{i,j+1} & \tilde{q}_{i+1,j+1} \end{bmatrix}$$

Συνοριακές συνθήκες

- Στις στηριγμένες παρειές τις πλάκας δεν ισχύει η εξίσωση ισορροπίας

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = \frac{q_{ij}}{D} h^4$$

- Προκειμένου να λυθεί το πρόβλημα, απαιτούνται επιπλέον εξισώσεις στους κόμβους που ανήκουν στο σύνορο της πλάκας.
- Αυτές οι εξισώσεις θα προκύψουν από τις συνοριακές συνθήκες.
- Υπάρχουν 2 συνοριακές συνθήκες ανά παρειά.
- Αυτές θα μετατραπούν σε γραμμικές εξισώσεις, όπως έγινε και με την διαφορική εξίσωση ισορροπίας.
- Στα επόμενα, οι γραμμικές εξισώσεις στα σύνορα θα γραφτούν σε μορφή stencil

Συνοριακές συνθήκες

Πάκτωση κάθετα στον άξονα y

- Συνοριακές εξισώσεις (με συνεχή μορφή)

$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- Διακριτές γραμμικές εξισώσεις

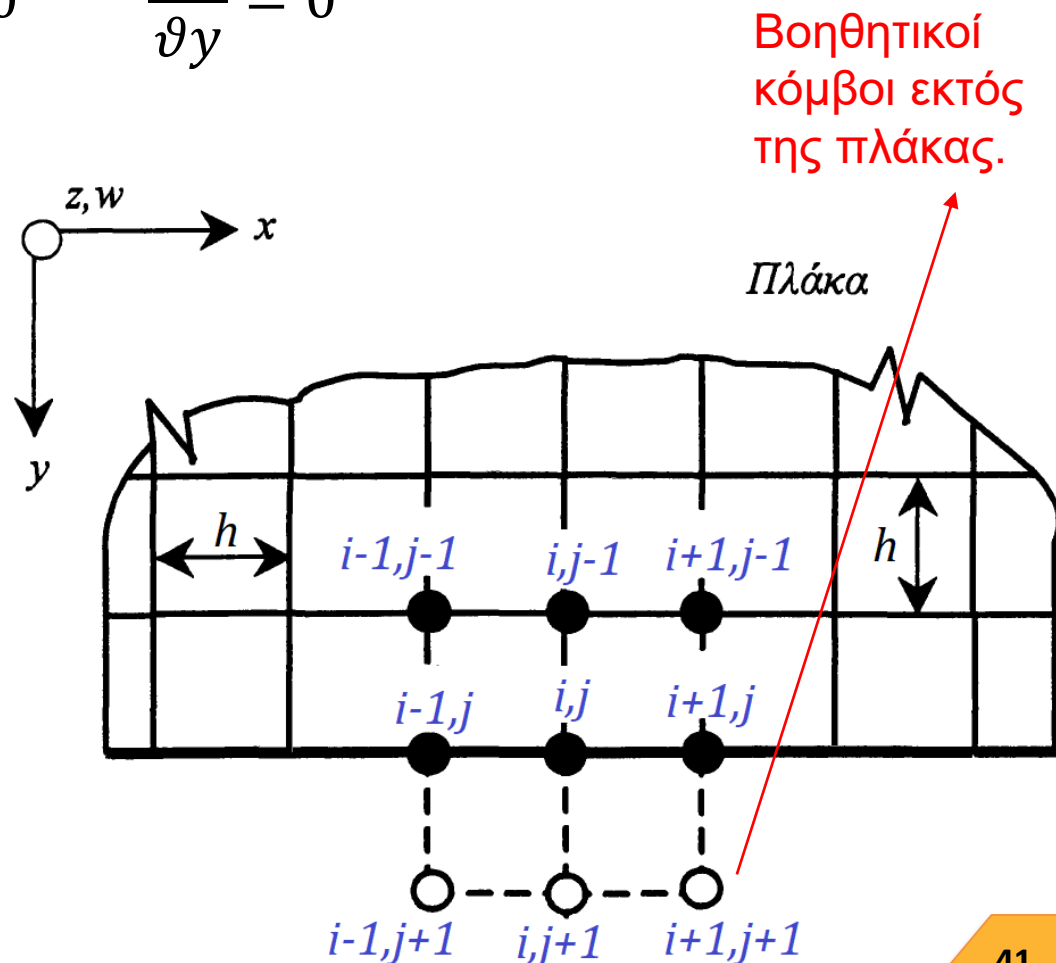
$$w_{i,j} = 0$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial y} \right|_{i,j} = \frac{1}{2h} (w_{i,j+1} - w_{i,j-1}) = 0$$

- Stencils εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ \square \\ +1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$



Συνοριακές συνθήκες

Απλή έδραση κάθετα στον άξονα y

- Συνοριακές εξισώσεις

$$w = 0 \quad M_y = 0$$

Βοηθητικοί
κόμβοι εκτός
της πλάκας.

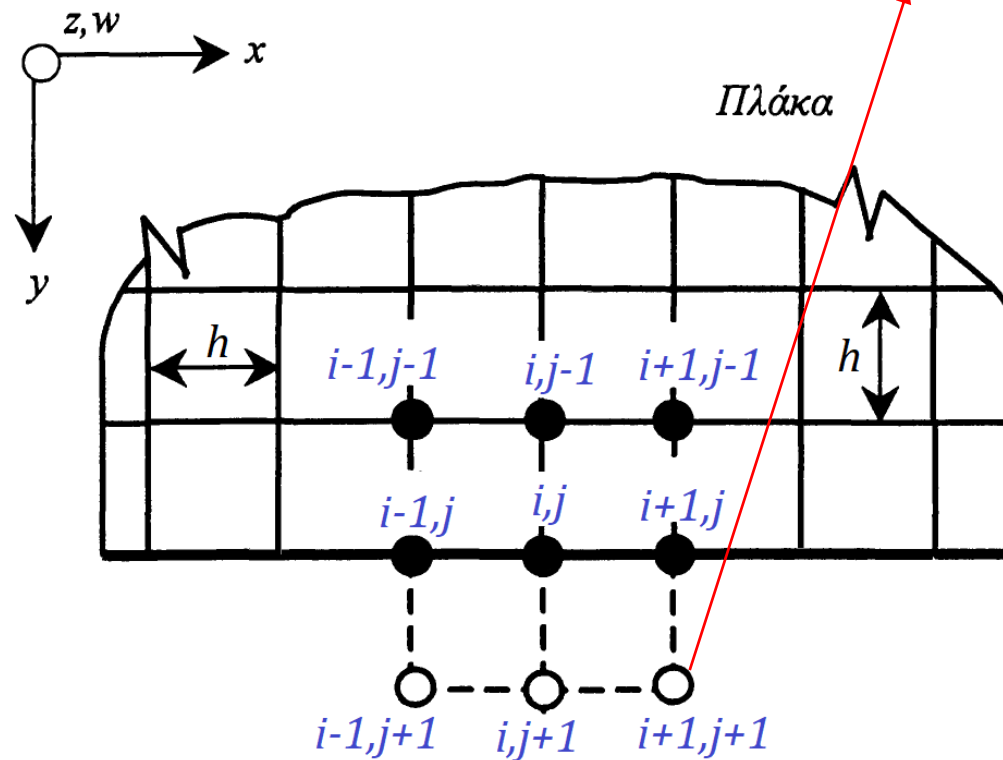
- Υπενθύμιση stencil ροπής

$$M_y = \frac{-D}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 \\ \nu & -2 - 2\nu \\ & 1 \end{bmatrix} \nu * \tilde{W}_{i,j}$$

- Stencils εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$

$$\begin{bmatrix} & 1 \\ \nu & -2 - 2\nu \\ & 1 \end{bmatrix} \nu * \tilde{W}_{i,j} = 0$$



Συνοριακές συνθήκες

Ελεύθερη παρειά κάθετα στον άξονα y

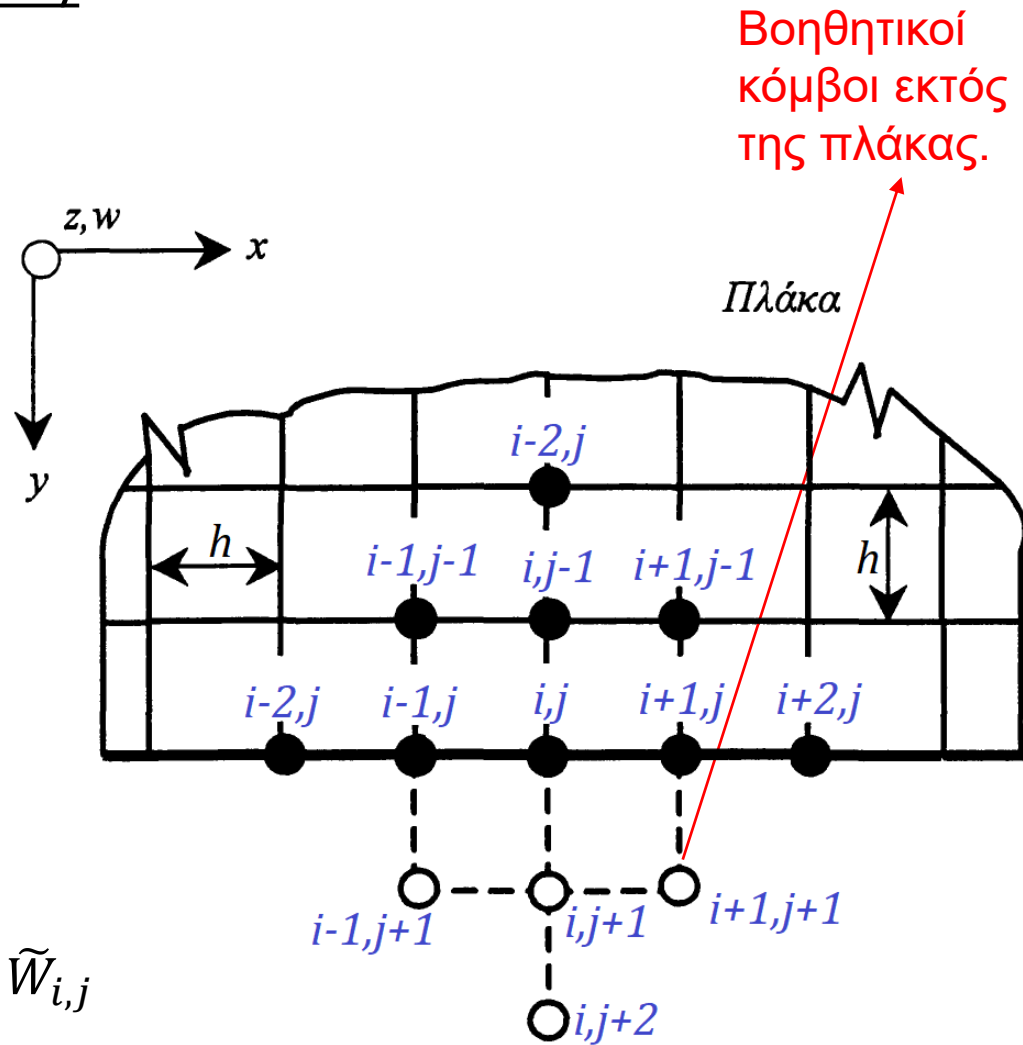
- Συνοριακές εξισώσεις

$$M_y = 0 \quad R_y = 0$$

- Επιπλέον, οι βυθίσεις των κόμβων είναι ελεύθερες να ανπτυχθούν, άρα ισχύει και η διαφορική εξίσωση ισορροπίας.

- Stencil ενεργούς τέμνουσας

$$R_y = \frac{-D}{2h^3} \begin{bmatrix} \nu - 2 & 6 - 2\nu & \nu - 2 \\ 2 - \nu & 2\nu - 6 & 2 - \nu \\ 1 \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j}$$



Συνοριακές συνθήκες

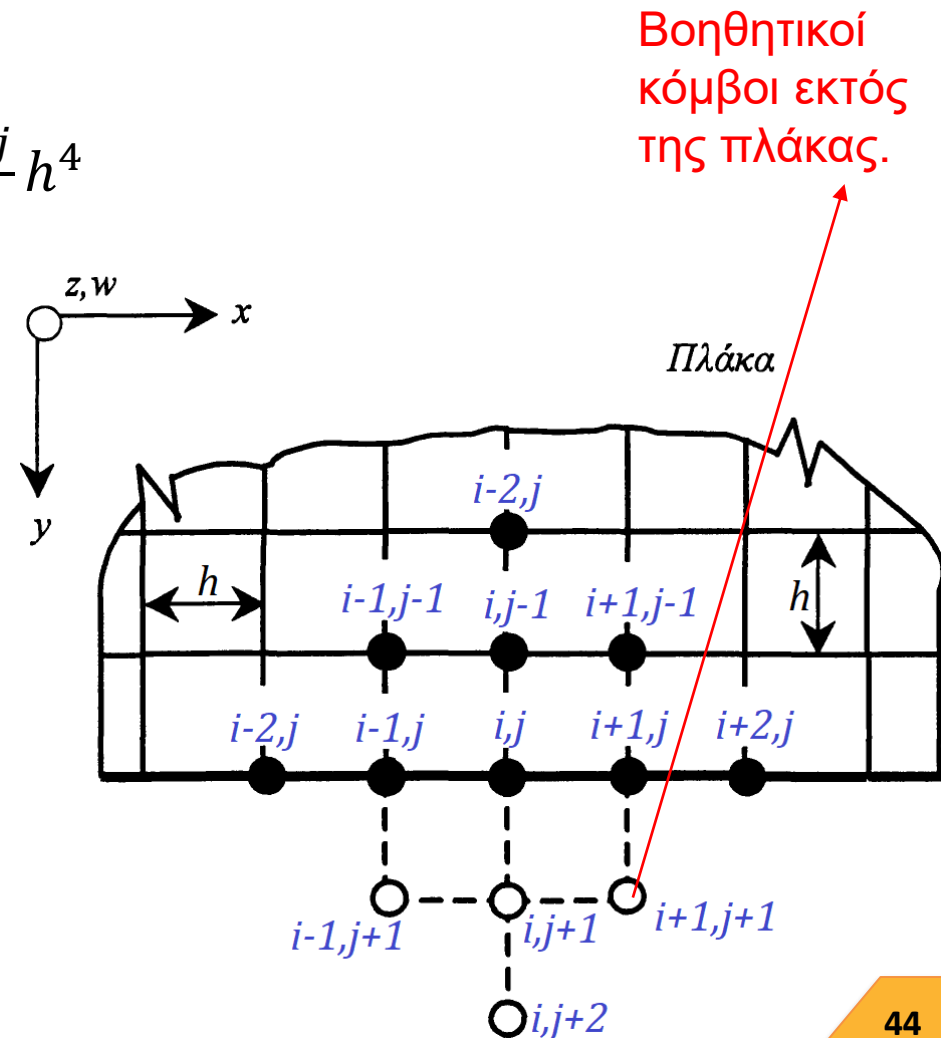
Ελεύθερη παρειά κάθετα στον άξονα y

- Stencils εξισώσεων

$$\begin{bmatrix} & & 1 & & \\ & 2 & -8 & 2 & \\ 1 & -8 & \boxed{20} & -8 & 1 \\ & 2 & -8 & 2 & \\ & & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = \frac{q_{ij}}{D} h^4$$

$$\begin{bmatrix} & 1 & & \\ \nu & \boxed{-2 - 2\nu} & & \nu \\ & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$

$$\begin{bmatrix} & -1 & & \\ \nu - 2 & 6 - 2\nu & \nu - 2 & \\ & \boxed{} & & \\ 2 - \nu & 2\nu - 6 & 2 - \nu & \\ & 1 & & \end{bmatrix} * \tilde{W}_{i,j} = 0$$



Συνοριακές συνθήκες σε γωνίες

- Τα προηγούμενα αφορούσαν τους κόμβους που ανήκουν στις παρειές της πλάκας, αλλά όχι πάνω στις γωνίες.
- Στις γωνίες της πλάκας οι συνοριακές συνθήκες μεταβάλλονται ανάλογα με το είδος στήριξης.

- Για πάκτωση έχουμε

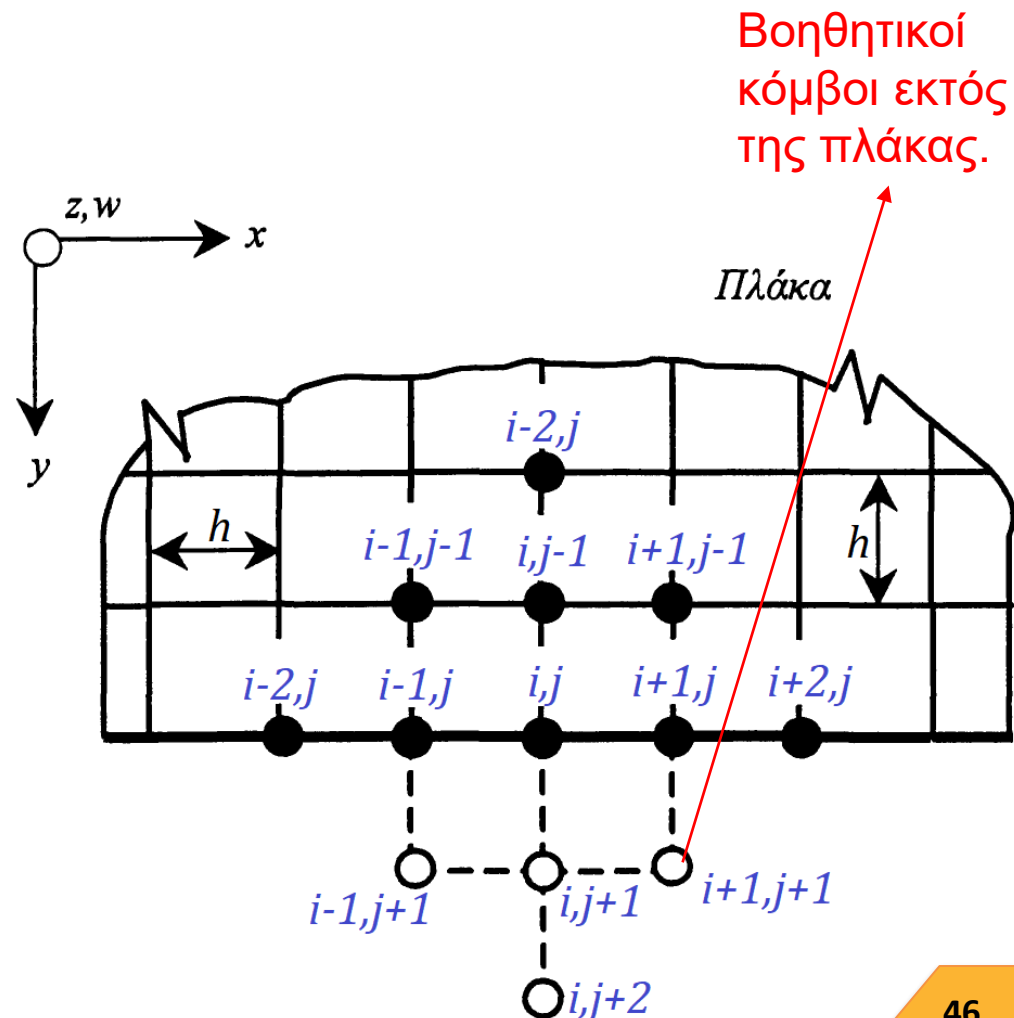
$$w = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

- Για απλή έδραση έχουμε

$$w = 0 \quad M_x = 0 \quad M_y = 0$$

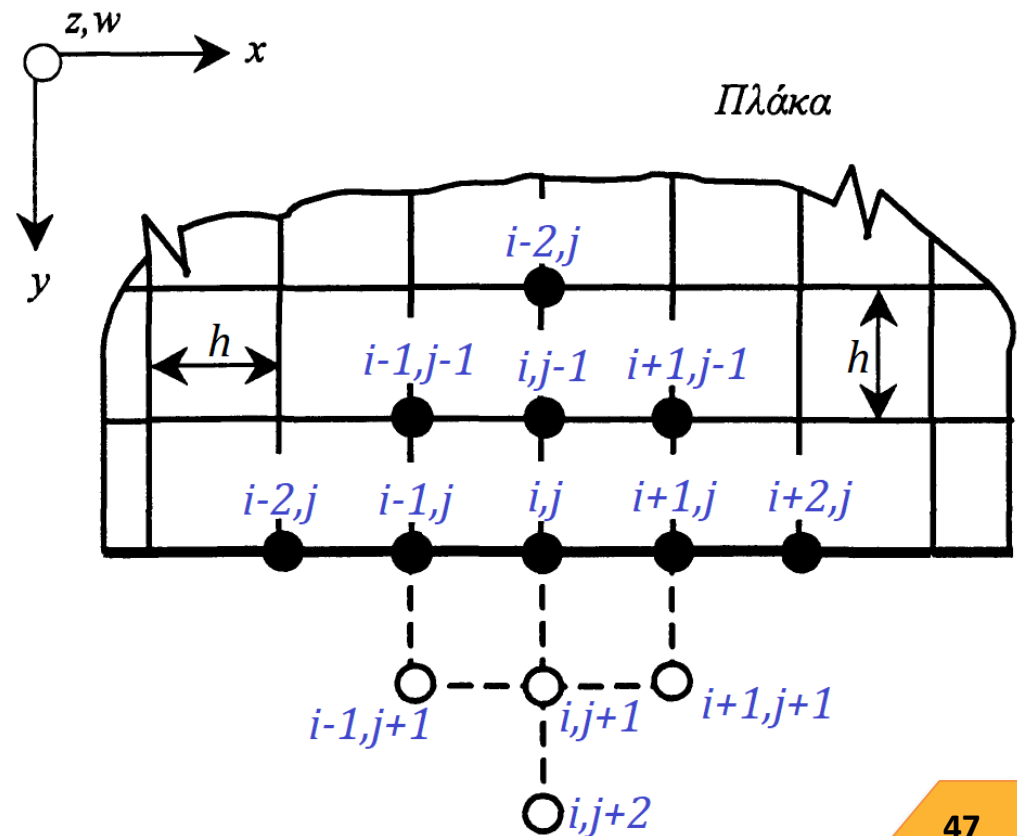
Βοηθητικοί κόμβοι

- Οι εξίσωσεις ισορροπίας στους κόμβους ακριβώς πριν το σύνορο ή πάνω σε αυτό, χρησιμοποιούν άγνωστα w που δεν αντιστοιχούν σε άλλους κόμβους της πλάκας.
- Για αυτό το λόγο, στον κάνναβο εισάγουμε βοηθητικούς κόμβους (ghost nodes) σε 2 στρώσεις από τους ακραίους πραγματικούς κόμβους της πλάκας.
- Κάποιοι από αυτούς είναι ανενεργοί, αφού δεν χρησιμοποιούνται (π.χ. για πάκτωση ή απλή έδραση στο σύνορο).
- Θα τους εντοπίσουμε και αφαιρέσουμε αλγεβρικά.



Βοηθητικοί κόμβοι

- Εισάγουμε βοηθητικά w σε 2 στρώσεις από τους ακραίους πραγματικούς κόμβους της πλάκας.
- Ταυτόχρονα, οι συνοριακές συνθήκες δίνουν γραμμικές εξαρτήσεις των βοηθητικών w ως προς τα πραγματικά.
- Έτσι καταλήγουμε σε σύστημα με ίδιο αριθμό αγνώστων και ανεξάρτητων εξισώσεων
- Άρα αυτό έχει μοναδική λύση.



Διαδικασία επίλυσης

- Καθορίζουμε τις συνοριακές συνθήκες στους κόμβους των παρειών και γωνιών
- Γράφουμε τη γραμμική εξίσωση ισορροπίας σε κάθε εσωτερικό κόμβο, με βοήθεια των stencils.
- Γράφουμε τις γραμμικές εξισώσεις λόγω συνοριακών συνθηκών σε κάθε κόμβο παρειάς και γωνίας, με βοήθεια των stencils.
- Συγκεντρώνουμε όλες τις εξισώσεις σε πίνακα A (αριστερά μέλη των εξισώσεων) και διάνυσμα b (δεξιά μέλη των εξισώσεων).
- Οι άγνωστοι θα ανήκουν σε διάνυσμα w το οποίο και ψάχνουμε.
- Για τους ανενεργούς κόμβους, αφαιρούμε τις αντίστοιχες στήλες από το A (και τα αντίστοιχα στοιχεία του w), οπότε έχουμε A_{act}, w_{act}
- Λύνουμε το γραμμικό σύστημα $A_{act} \cdot w_{act} = b$, που έχει μοναδική λύση.
- Έχοντας τα επικόμβια w , υπολογίζουμε εντατικά μεγέθη, κτλ, με βοήθεια των stencils.