



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

Ενότητα 3: Αναλυτική μέθοδος επίλυσης πλακών Navier

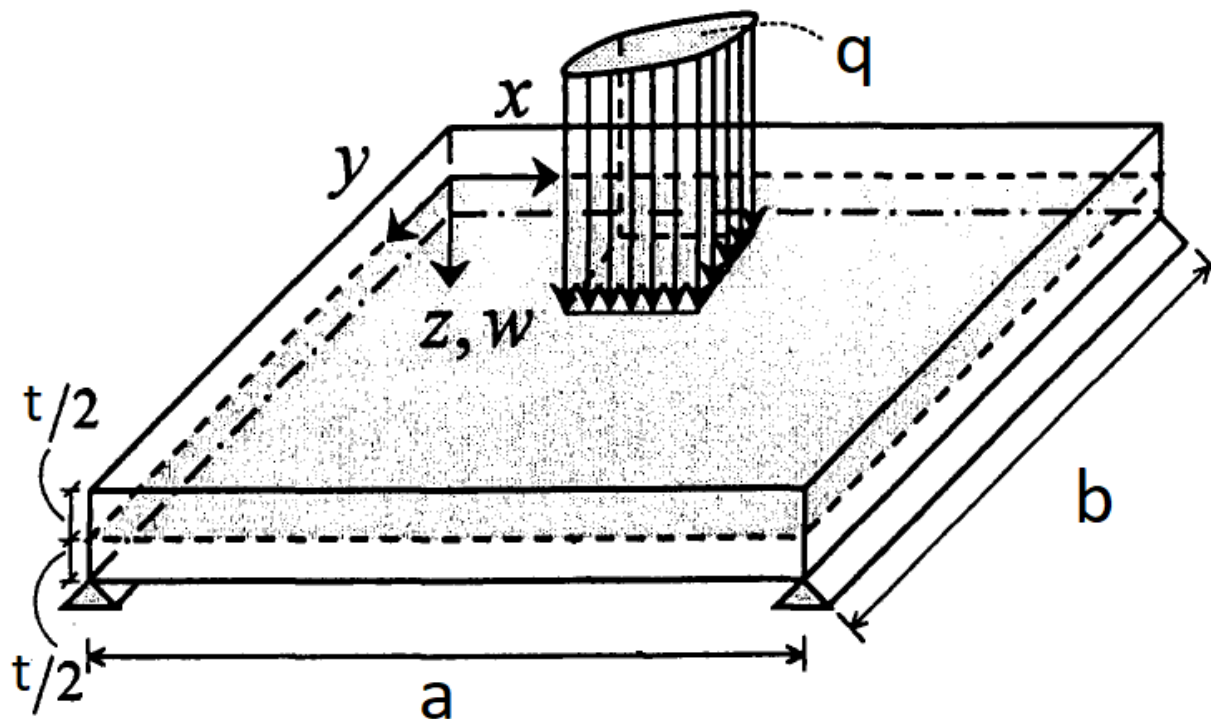
Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Φορέας πλάκα

- Ορθογωνική πλάκα επί του επιπέδου xy , που φορτίζεται κατά z
- Διαφορική εξίσωση της πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Διάφορες συνοριακές συνθήκες στις παρειές της πλάκας.



Αναλυτικές μέθοδοι επίλυσης

- Πλεονεκτήματα
 - Ακρίβεια λύσης
 - Άμεσος υπολογισμός παραγώγων και εντατικών μεγεθών
- Μειονεκτήματα: Περιορισμένη εφαρμογή μόνο σε
 - Απλές γεωμετρίες πλάκας: ορθογωνική, κυκλική
 - Απλές συνοριακές συνθήκες: π.χ. Η μέθοδος Navier απαιτεί απλή έδραση σε όλες τις παρειές της πλάκας
 - Απλές περιπτώσεις φόρτισης: Απαιτείται ανάλυση Fourier της φόρτισης

Η μέθοδος Navier

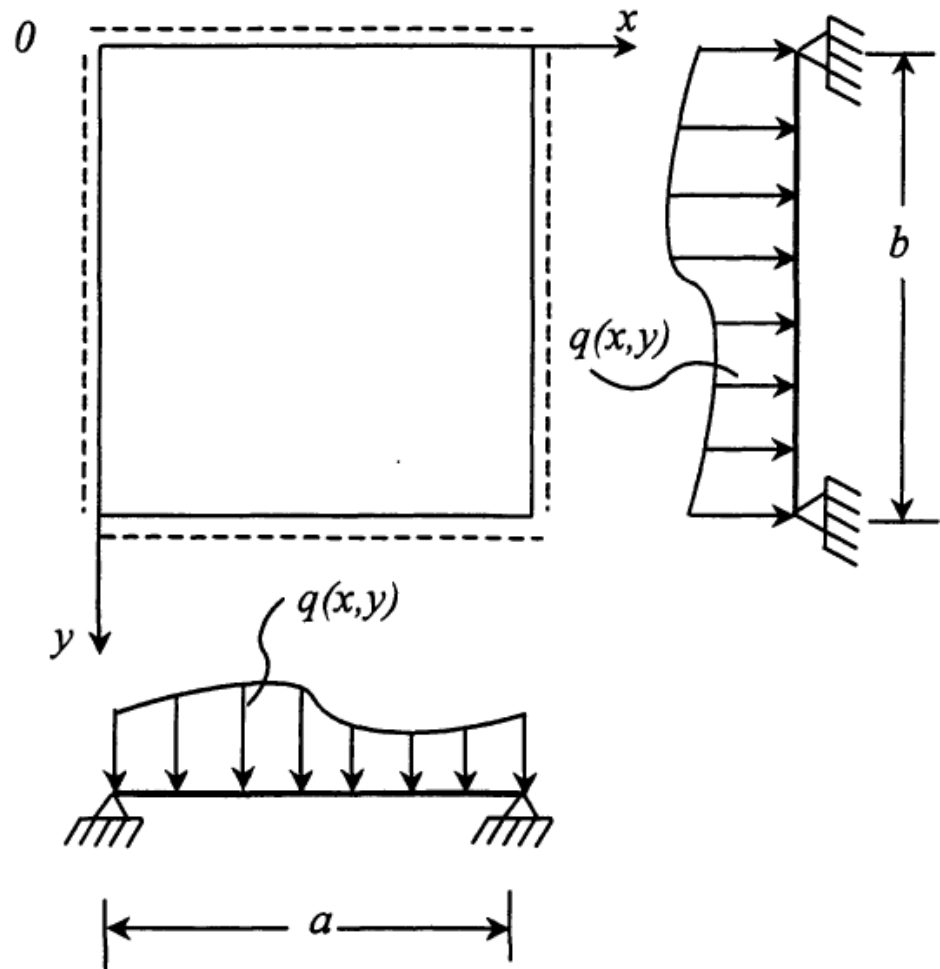
- Δ.ε. της πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Συνοριακές συνθήκες: απλή έδραση σε στις 4 παρειές της πλάκας.
- Φόρτιση: τυχαία κατα x, y
- Ιδέα: η βύθιση w και η φόρτιση q αναλύονται σε διπλές ημιτονικές σειρές Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

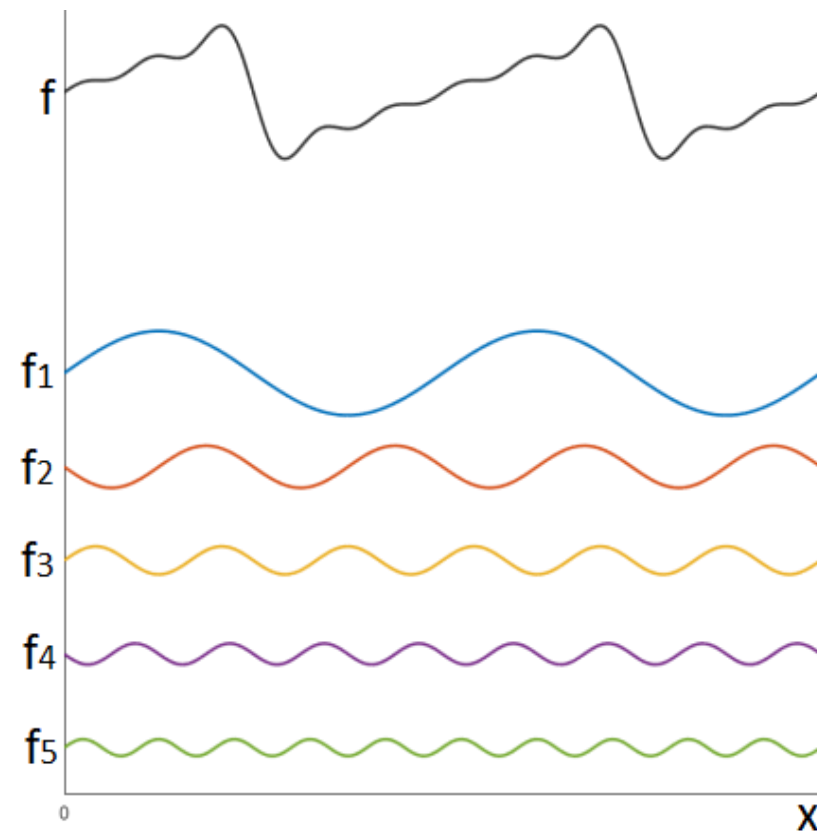


Ανάλυση Fourier

- Έστω τυχαία συνάρτηση $f(x)$
- Μπορούμε να θεωρήσουμε την f ως άθροισμα τριγωνομετρικών συναρτήσεων $f_1, f_2, \dots$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$$
$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x$$

- Κάθε τριγωνομετρική συνάρτηση f_n είναι ένα κύμα με συγκεκριμένο πλάτος που καθορίζεται από τα a_n, b_n και συγκεκριμένη κυκλική συχνότητα ταλάντωσης $\omega = \frac{2\pi n}{L}$.
- Αν πάρουμε άπειρες τέτοιες συναρτήσεις μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση f .



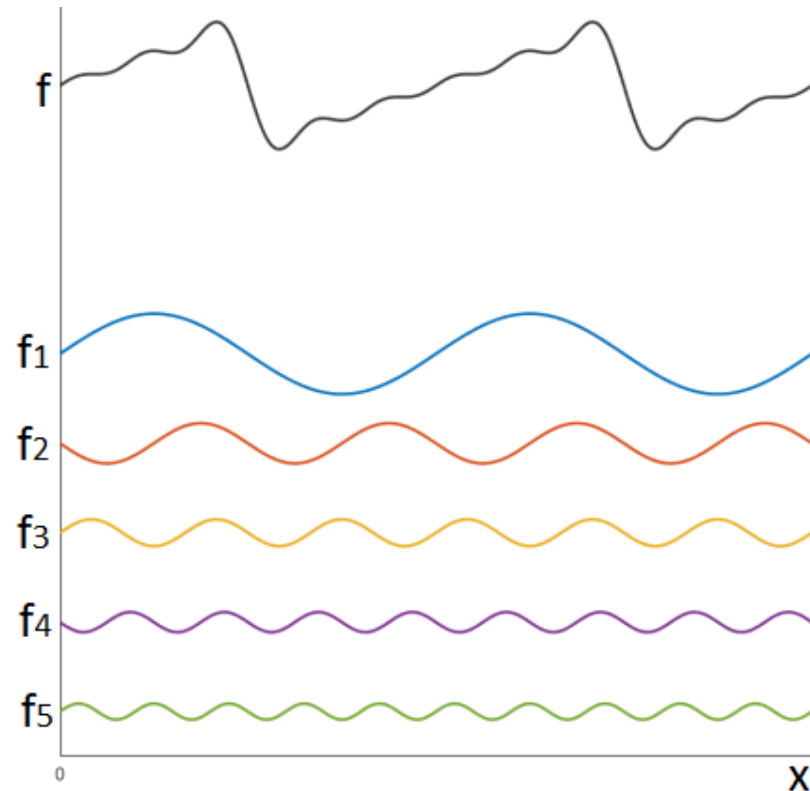
- Ο σταθερός όρος μπορεί να γραφτεί ως

$$a_0 = a_0 \cos \frac{2\pi 0}{L} + b_0 \sin \frac{2\pi 0}{L}$$

Ανάλυση Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi n}{L} x + b_n \sin \frac{2\pi n}{L} x$$

- Αν πάρουμε άπειρες τέτοιες συναρτήσεις μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση f .
- Στην πράξη όμως, η συνεισφορά των μικρών συχνοτήτων (δηλαδή μικρά $\frac{2\pi n}{L}$ άρα μικρά n) είναι πολύ πιο σημαντική, αφού τα πλάτη a_n, b_n μειώνονται γρήγορα όσο το n αυξάνεται.
- Επομένως μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη συνάρτηση f με λίγους μόνο όρους, χωρίς να μειωθεί σημαντικά η ακρίβεια.
- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η σειρά Fourier συγκλίνει γρήγορα στην f .



Ανάλυση Fourier

Για ολοκλήρωμα της μορφής

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \cos \frac{2\pi n' x}{L} dx$$

Μπορούν να αποδειχθούν οι εξής σχέσης ορθογωνικότητας

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \cos \frac{2\pi n' x}{L} dx = 0, \text{ για κάθε } n, n'$$

$$\int_0^L \cos \frac{2\pi n x}{L} \cos \frac{2\pi n' x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}$$

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi n x}{L} \sin \frac{2\pi n' x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}$$

$$\text{Όπου } \delta_{nn'} = \begin{cases} 1, \text{ αν } n = n' \\ 0, \text{ αν } n \neq n' \end{cases}$$

Ανάλυση Fourier

- Μία συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή αν

$$f(-x) = -f(x)$$

- Μία περιττή συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο $2L$ μπορεί να αναλυθεί σε ημιτονοειδή σειρά Fourier (υποπερίπτωση της πλήρους σειράς Fourier χωρίς σταθερό όρο και συνημίτονα)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Η σχέση ορθογωνικότητας είναι

$$\int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n'\pi x}{L} dx = \frac{L}{2} \delta_{nn'}$$

- Και με χρήση της οι συντελεστές b_n υπολογίζονται ως

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Ανάλυση Fourier

- Για τη μέθοδο επίλυσης πλακών Navier, θα περιοριστούμε σε ημιτονικές συναρτήσεις Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

- Οι οποίες γενικεύονται σε διπλές ημιτονικές συναρτήσεις σε δύο διαστάσεις

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Όπου a και b είναι οι διαστάσεις της πλάκας
- Οι σχέσεις ορθογωνικότητας που θα χρησιμοποιούμε είναι

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{L} dx = \frac{a}{2} \delta_{mm'}$$
$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy = \frac{b}{2} \delta_{nn'}$$

Ανάλυση Fourier

Για να υπολογίσουμε τους συντελεστές f_{mn}

- Ξεκινάμε από την εξίσωση της σειράς

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Πολλαπλασιάζουμε την $f(x, y)$ με $\sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b}$ και ολοκληρώνουμε στην περιοχή της πλάκας ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$):

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \\ &= f_{mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy \end{aligned}$$

Ανάλυση Fourier

- Λόγω των σχέσεων ορθογωνικότητας

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m'\pi x}{a} \sin \frac{n'\pi y}{b} dx dy \\ &= f_{mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m'\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n'\pi y}{b} dy \\ &= f_{mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{2} \delta_{mm'} \frac{b}{2} \delta_{nn'} = \frac{ab}{4} f_{mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{mm'} \delta_{nn'} \end{aligned}$$

- Οι όροι του αθροίσματος με $m \neq m'$ ή $n \neq n'$ μηδενίζουν αφού $\delta_{mm'} = 0$ ή $\delta_{nn'} = 0$, άρα μένει μόνο ο όρος όπου $m' = m$ και $n' = n$

$$\frac{ab}{4} f_{mn} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{mm'} \delta_{nn'} = \frac{ab}{4} f_{mn} \delta_{mm} \delta_{nn} = \frac{ab}{4} f_{mn}$$

- Οπότε ο συντελεστής f_{mn} υπολογίζεται ως

$$f_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Ανάλυση Fourier

- Έστω 2 συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει

$$\gamma f(x, y) = \delta g(x, y)$$

- Η ανάλυση Fourier για τις 2 συναρτήσεις είναι

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$g(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} g_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Αν πολλαπλασιάσουμε την πρώτη σχέση με $\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$ και ολοκληρώσουμε στην περιοχή της πλάκας ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$):

$$\gamma \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = \delta \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

- Όμοια με πριν, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθογωνικότητας θα καταλήξουμε σε

$$\gamma \frac{ab}{4} f_{mn} = \delta \frac{ab}{4} g_{mn} \Rightarrow f_{mn} = \frac{\delta}{\gamma} g_{mn}$$

- Οπότε μπορούμε να εξισώνουμε τους συντελεστές Fourier

Η μέθοδος Navier

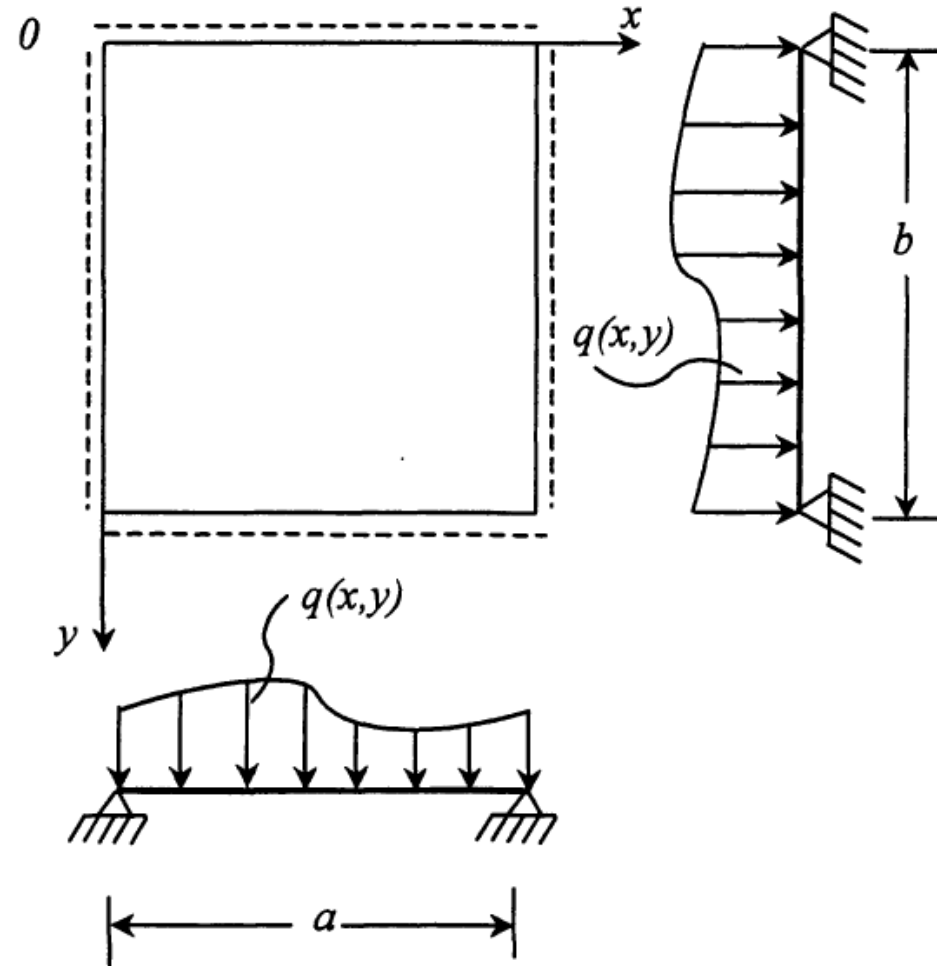
- Δ.ε. της πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q(x, y)}{D}$$

- Συνοριακές συνθήκες: απλή έδραση σε στις 4 παρειές της πλάκας.
- Φόρτιση: τυχαία κατα x, y
- Ιδέα: η βύθιση w και η φόρτιση q αναλύονται σε διπλές ημιτονικές σειρές Fourier:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$



Η μέθοδος Navier

Βήμα 1

- Αναλύουμε τη φόρτιση σε σειρά Fourier

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Και υπολογίζουμε τους συντελεστές

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

Η μέθοδος Navier

Βήμα 2

- Υποθέτουμε ότι η βύθιση $w(x)$ είναι περιττή συνάρτηση

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Η οποία ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες απλής έδρασης

- $x = 0$ ή $x = a$:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

- $y = 0$ ή $y = b$:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Η μέθοδος Navier

Βήμα 3

- Αντικαθιστούμε τις σειρές Fourier της βύθιση $w(x, y)$ και φορτίου $q(x, y)$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Στη διαφορική εξίσωση της πλάκας

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D}$$

- Μετά από τις παραγωγίσεις καταλήγουμε σε

$$\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

- Εξισώνοντας τους συντελεστές Fourier:

$$a_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Η μέθοδος Navier

Βήμα 4

Παραγωγίζουμε τη γνωστή πλέον συνάρτηση $w(x, y)$ για να υπολογίσουμε:

- Εντατικά μεγέθη

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

- Τάσεις

$$\sigma_x = \frac{-E}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1 - \nu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

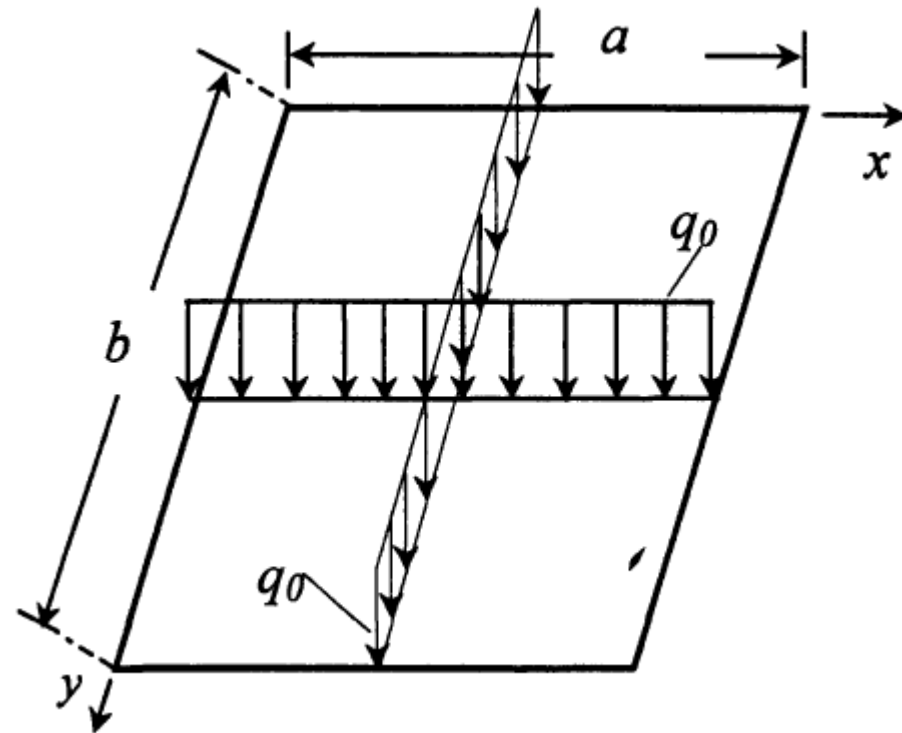
$$\tau_{xy} = \frac{-E}{1 + \nu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Παράδειγμα 1

Δίνεται ορθογωνική πλάκα με απλή έδραση σε όλες τις παρειές της και ομοιόμορφο φορτίο q_0 .

Να υπολογιστούν:

- Η αναλυτική έκφραση της βύθισης w
- Το μέγιστο βέλος της πλάκας
- Οι αναλυτικές εκφράσεις των ροπών M_x, M_y, M_{xy}





Παράδειγμα 1

- Ανάλυση Fourier για το φορτίο:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

- Μετά από πράξεις

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{\pi^2 mn} (\cos m\pi - 1)(\cos n\pi - 1)$$

- Όμως $q_{mn} = 0$ αν m ή n είναι άρτιοι αφού

$$\cos m\pi = (-1)^m \quad \cos n\pi = (-1)^n$$

- Για τους περιττούς $m = 1, 3, \dots$ και $n = 1, 3, \dots$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$$



Παράδειγμα 1

- Οι συντελεστές της βύθισης είναι

$$\alpha_{mn} = \frac{q_{mn}}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

- Άρα η αναλυτική έκφραση της βύθισης είναι

$$w(x, y) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

- Η μέγιστη βύθιση θα βρίσκεται στη θέση $x=a/2, y=b/2$

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{16q_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{m+n-2}{2}}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

Παράδειγμα 1

- Μετά από παραγωγίσεις, οι αναλυτικές εκφράσεις των ροπών είναι

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\frac{m^2}{a^2} + \nu \frac{n^2}{b^2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{16q_0}{\pi^4} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\nu \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{16q_0(\nu - 1)}{\pi^4 ab} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}$$

- Παρατηρούμε ότι στα σύνορα της πλάκας $M_x = M_y = 0$ ενώ $M_{xy} \neq 0$

Παράδειγμα 1

Σύγκλιση των σειρών Fourier

- Οι όροι των παραπάνω σειρών είναι συνάρτηση των ακεραίων m, n
- Στην έκφραση της βύθισης οι σταθεροί συντελεστές είναι της τάξης του $\frac{1}{m^5}$ και $\frac{1}{n^5}$
- Άρα η σειρά της βύθισης συγκλίνει ταχύτατα στην ακριβή λύση
- Πράγματι, σε τετραγωνική πλάκα ($a = b$, πάχος h) και κρατώντας μόνο τον 1^ο όρο του αθροίσματος, δηλαδή $m = n = 1$, η μέγιστη βύθιση είναι

$$w_{max} = \frac{4q_0 a^4}{\pi^6 D} = 0.0454 \frac{q_0 a^4}{E h^3}$$

- Που έχει απόκλιση $\sim 2.5\%$ από την ακριβή λύση $w_{max} = 0.0443 \frac{q_0 a^4}{E h^3}$
- Άρα αρκεί μόνο ο πρώτος τριγωνομετρικός όρος για πολύ καλή ακρίβεια
- Οι σειρές των ροπών συγκλίνουν βραδύτερα αφού οι συντελεστές είναι της τάξης του $\frac{1}{m^3}$ και $\frac{1}{n^3}$

Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Navier

- Ομοιόμορφο φορτίο

$$q(x, y) = q_0$$

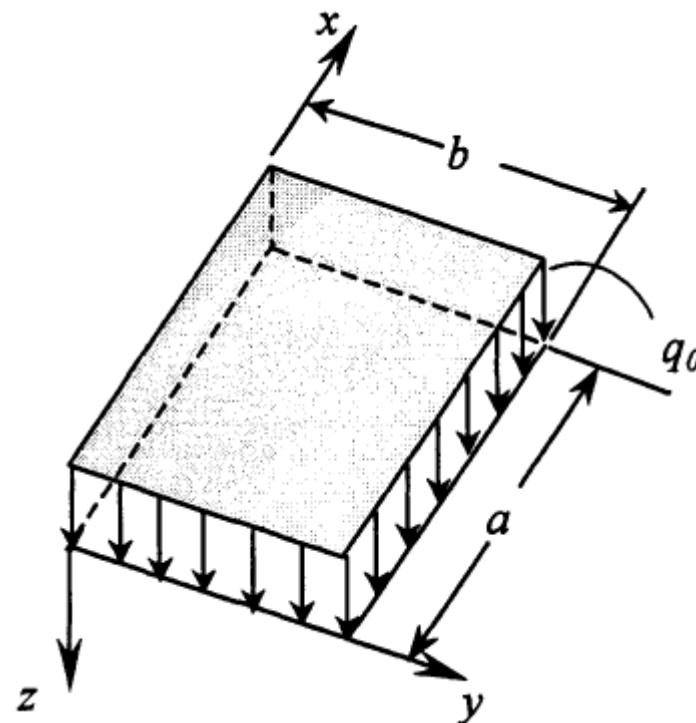
- Συντελεστές

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{\pi^2 mn}$$

όπου

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Navier

- Υδροστατικό φορτίο

$$q(x, y) = q_0 \frac{y}{b}$$

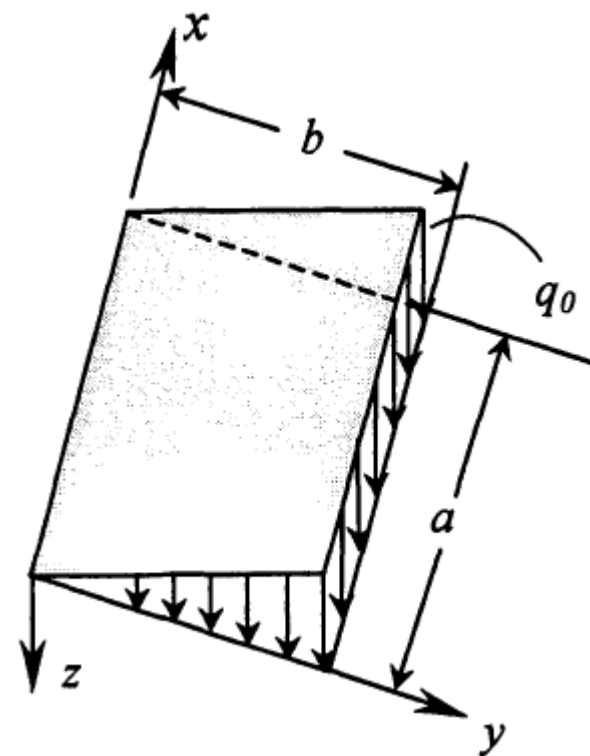
- Συντελεστές

$$q_{mn} = \frac{8q_0}{\pi^2 mn} (-1)^{n+1}$$

όπου

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Navier

- Συγκεντρωμένο φορτίο Q_0
 $q(x, y) = Q_0 \delta(x - x_0, y - y_0)$

- στη θέση (x_0, y_0)

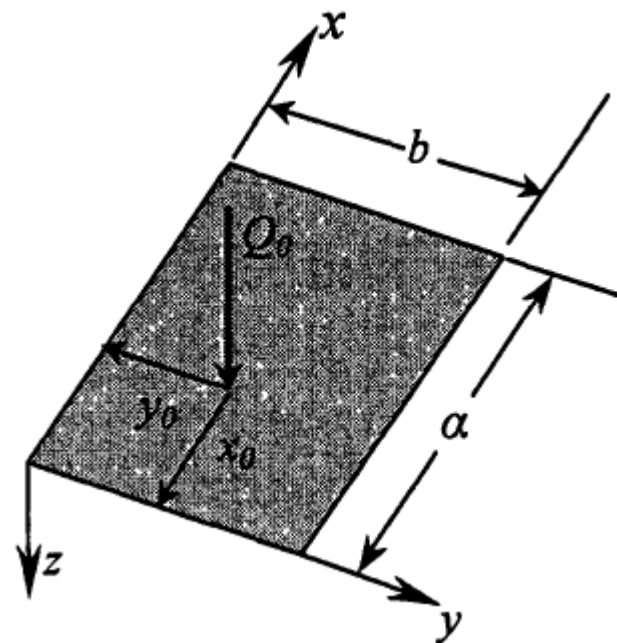
- Συντελεστές

$$q_{mn} = \frac{4Q_0}{ab} \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$$

όπου

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



Συντελεστές φορτίων για μέθοδο Navier

- Γραμμικό φορτίο q
 $q(x, y) = q_0 \delta(y - y_0)$

- στην ευθεία $y = y_0$

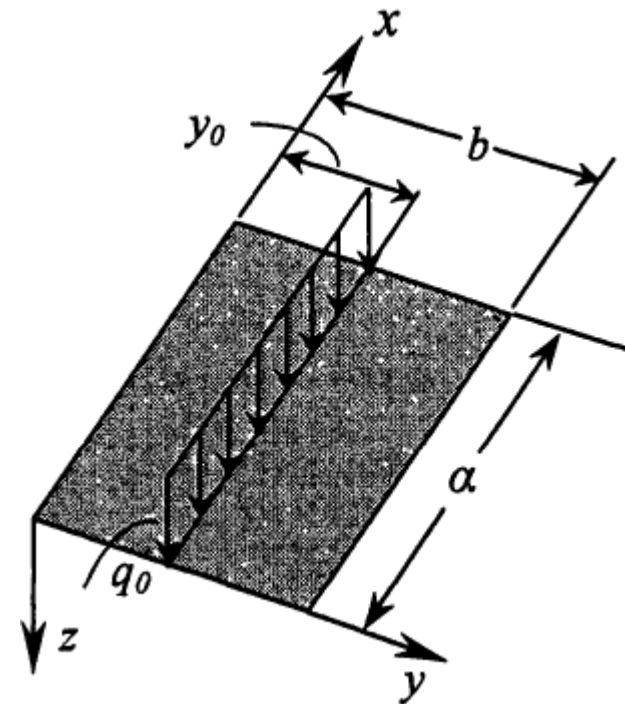
- Συντελεστές

$$q_{mn} = \frac{8q_0}{\pi m b} \sin \frac{n\pi y_0}{b}$$

όπου

$$m = 1, 3, 5, \dots$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$



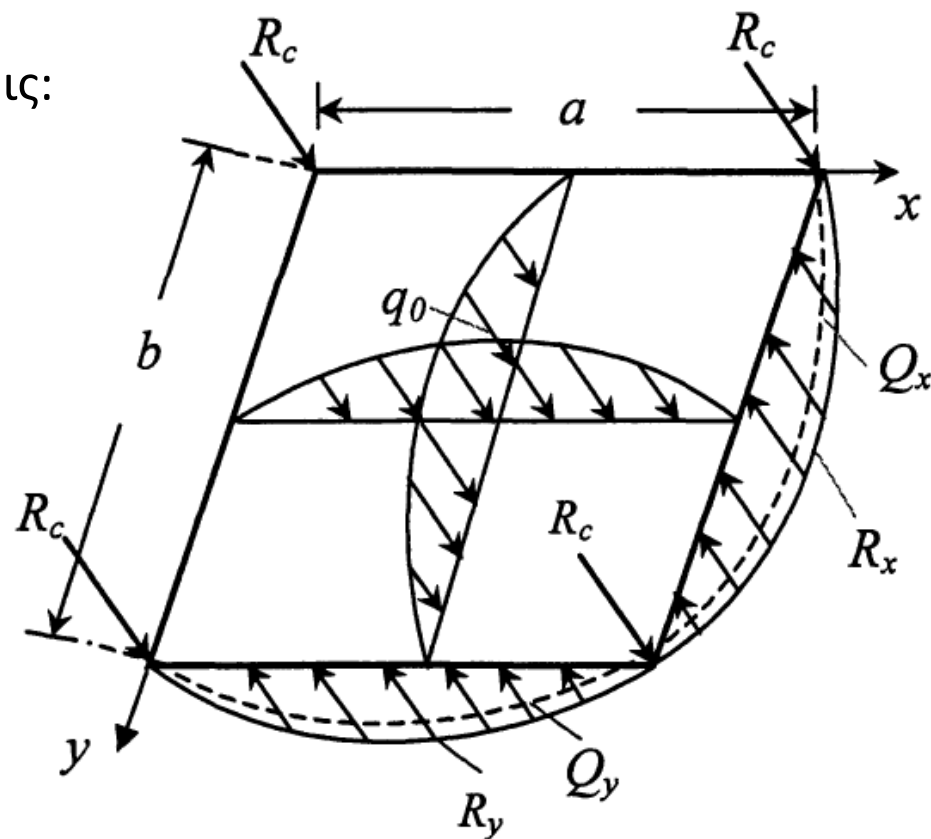
Παράδειγμα 2

Δίνεται ορθογωνική πλάκα με απλή έδραση σε όλες τις παρειές της και κατανεμημένο αρμονικό φορτίο q_0 , δηλαδή

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Να υπολογιστούν οι αναλυτικές εκφράσεις:

- Της βύθισης w
- Των ροπών M_x, M_y, M_{xy}
- Των τεμνουσών Q_x, Q_y
- Των ενεργών τεμνουσών R_x, R_y
- Των συγκεντρωμένων δυνάμεων R_c στις γωνίες της πλάκας



Παράδειγμα 2

- Το φορτίο δίνεται ήδη ως σειρά Fourier

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

- Άρα οι συντελεστές είναι

$$q_{mn} = 0, m \neq 1, n \neq 1$$

$$q_{11} = q_0$$

- Άρα η βύθιση είναι

$$w(x, y) = \frac{q_0}{\pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

- Δηλαδή το μονοχρωματικό φορτίο διεγείρει μόνο μία συχνότητα βύθισης

Παράδειγμα 2

- Μετά από παραγωγίσεις, οι αναλυτικές εκφράσεις των ροπών είναι

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\nu}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \frac{q_0 \left(\frac{\nu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = - \frac{q_0(1-\nu)}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 ab} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

Παράδειγμα 2

- Οι αναλυτικές εκφράσεις των τεμνουσών είναι

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \cos \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}$$

- Η συνολική τέμνουσα στο σύνορο της πλάκας είναι

$$2 \int_0^b Q_x dy + 2 \int_0^a Q_y dx = \frac{4q_0 ab}{\pi^2}$$

- Και ισορροπεί το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια της πλάκας

$$\int_0^b \int_0^a q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = \frac{4q_0 ab}{\pi^2}$$

Παράδειγμα 2

- Και οι αναλυτικές εκφράσεις των ενεργών τεμνουσών είναι

$$R_x = \pm \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi y}{b} \pm \frac{q_0(1-\nu)}{\pi a b^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi y}{b}$$

$$R_y = \pm \frac{q_0}{\pi a \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a} \pm \frac{q_0(1-\nu)}{\pi a^2 b \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)} \sin \frac{\pi x}{a}$$

Παράδειγμα 2

- Οι συγκεντρωμένες δυνάμεις R_c που ασκούνται στις γωνίες είναι ίσες λόγω συμμετρίας της γεωμετρίας και φόρτισης
- Το σύνολο των R_c υπολογίζεται από την ολοκλήρωση των ροπών συστροφής M_{xy} πάνω στα σύνορα της πλάκας

$$4R_c = 2 \int_0^b M_{xy} dy + 2 \int_0^a M_{xy} dx = \frac{8q_0(1-\nu)}{\pi^2 ab \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2}$$