



Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών



Ανάλυση επιφανειακών φορέων

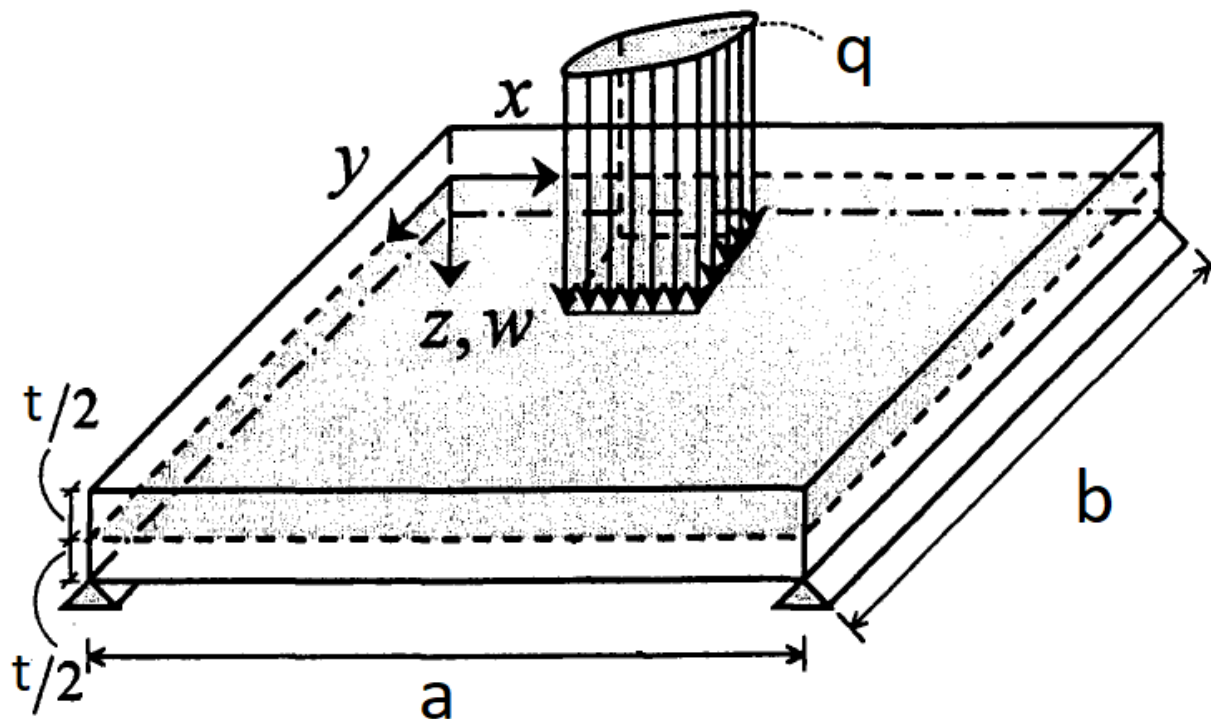
Ενότητα 2: Συνοριακές συνθήκες στήριξης πλάκας

Σεραφείμ Μπακαλάκος
Phd Πολιτικός Μηχανικός
2023-2024

Φορέας πλάκα

- Ορθογωνική πλάκα επί του επιπέδου xy
- Φορτίζεται κατά z
- Διαφορική εξίσωση της πλάκας:

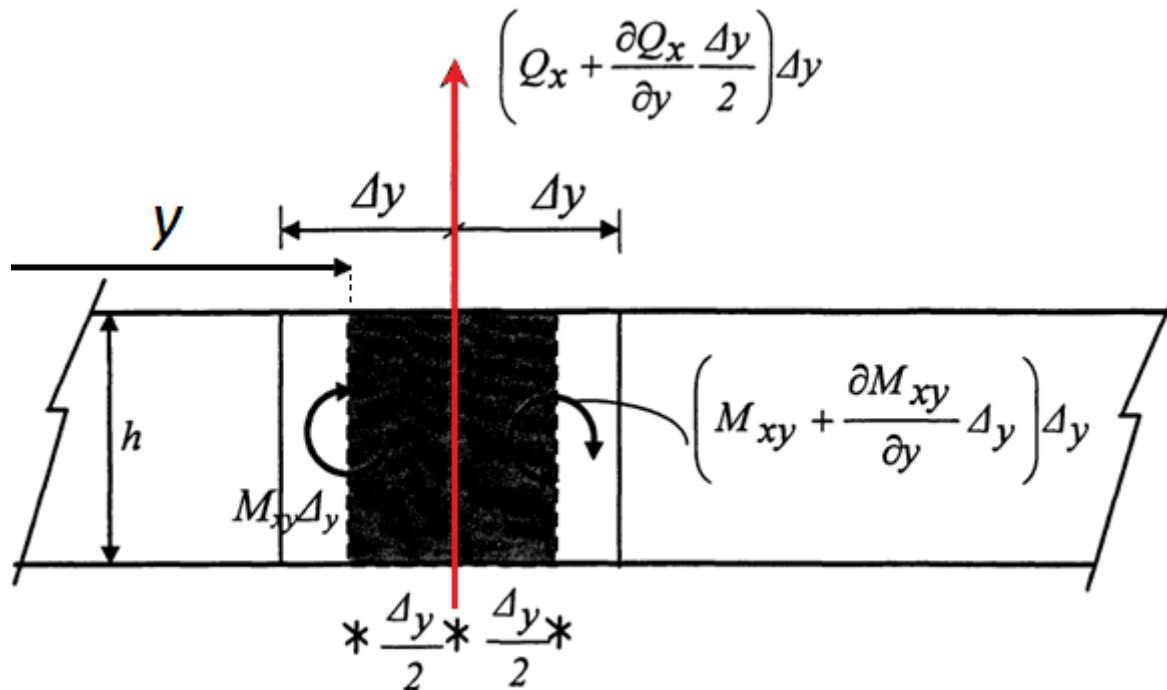
$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D_k}$$





Σχέση τέμνουσας - ροπής συστροφής

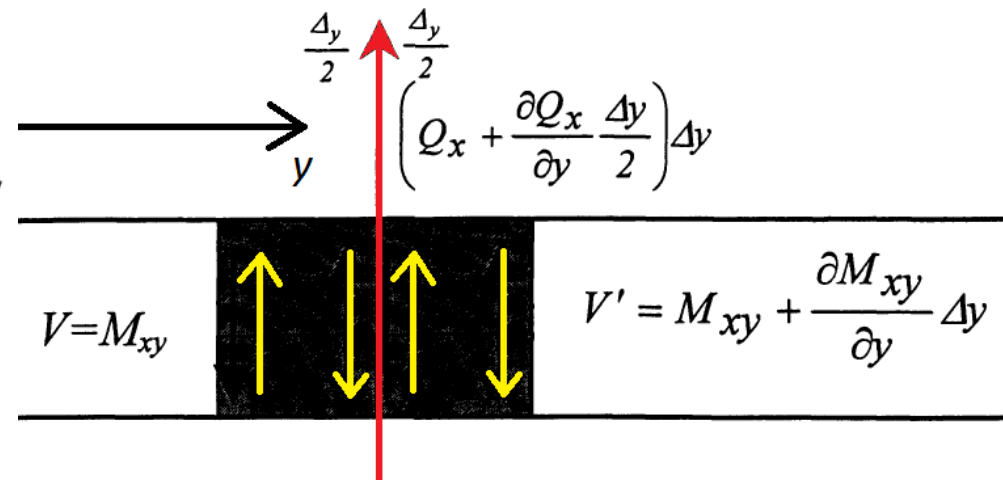
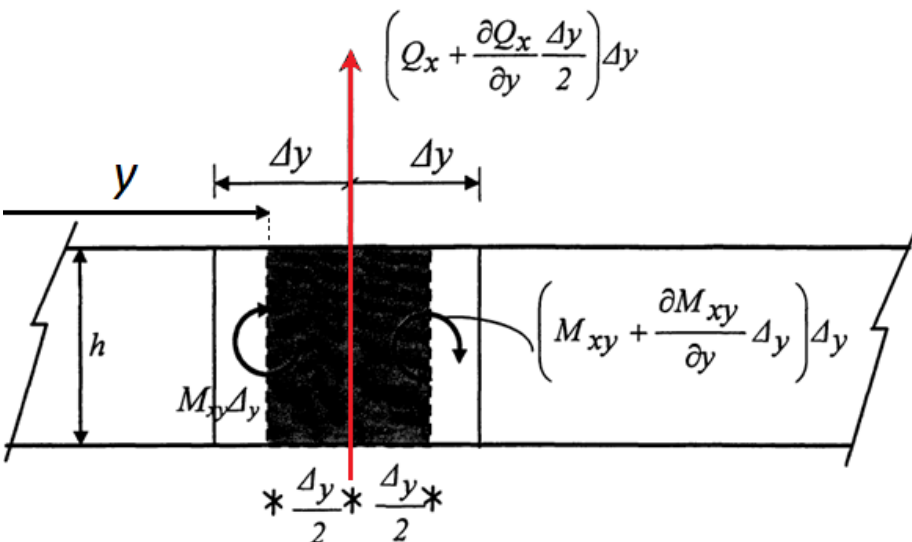
- Πλευρά $x = 0$
- Στη θέση y ενεργούν κατανεμημένη τέμνουσα Q_x και ροπή M_{xy}
- Στη θέση $y + \frac{\Delta y}{2}$ ενεργεί κατανεμημένη τέμνουσα $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}$
- Στη θέση $y + \Delta y$ ενεργεί κατανεμημένη ροπή $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Delta y$





Σχέση τέμνουσας - ροπής συστροφής

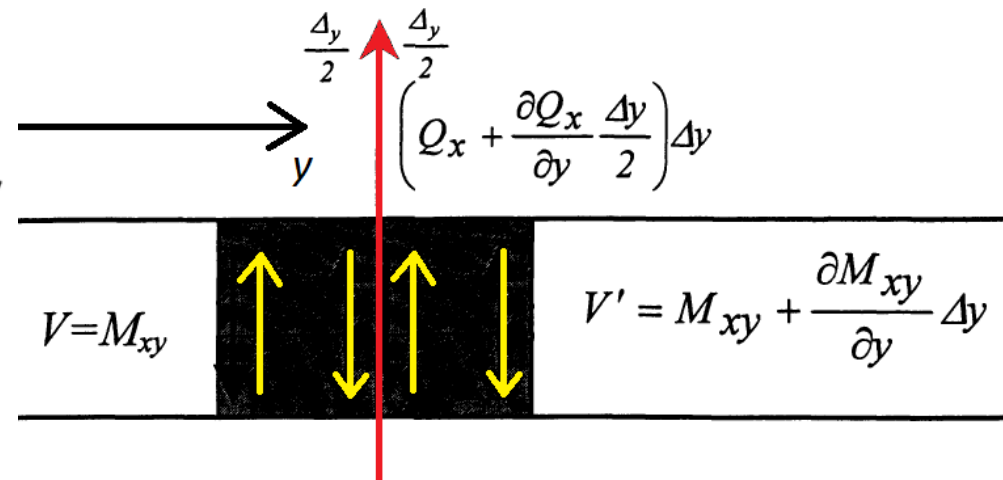
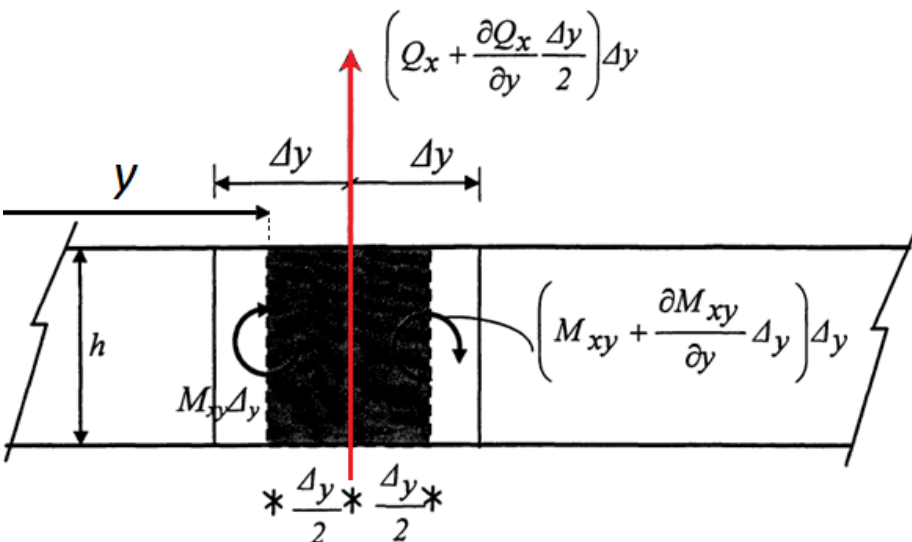
- Στο τμήμα $\left(y - \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{\Delta y}{2}\right)$ ενεργεί ροπή $M_{xy}\Delta y$
- Την αντικαθιστώ με το ισοδύναμο ζεύγος (μη κατανεμημένων) τεμνουσών V , που απέχουν Δy
- Άρα: $V\Delta y = M_{xy}\Delta y \Rightarrow V = M_{xy}$





Σχέση τέμνουσας - ροπής συστροφής

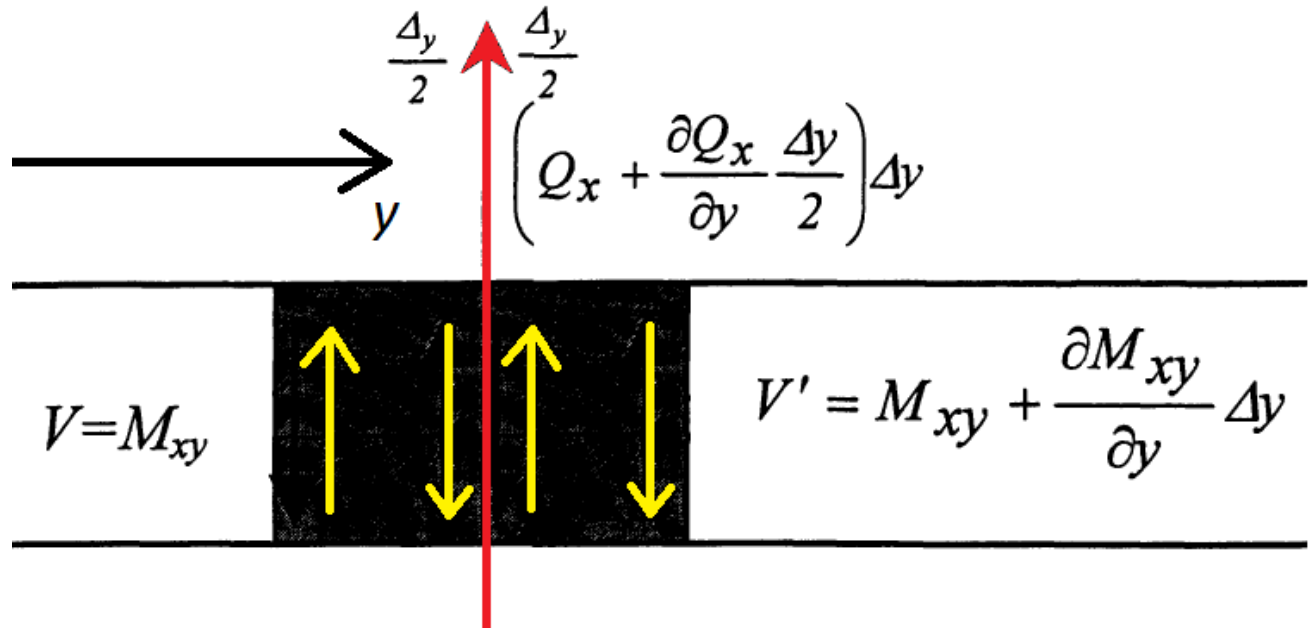
- Στο τμήμα $\left(y + \frac{\Delta y}{2}, y + \frac{3}{2}\Delta y\right)$ ενεργεί ροπή $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Delta y\right) \Delta y$
- Την αντικαθιστώ με το ισοδύναμο ζεύγος (μη κατανεμημένων) τεμνουσών V' , που απέχουν Δy
- Άρα: $V' \Delta y = \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Delta y\right) \Delta y \Rightarrow V' = M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Delta y$





Σχέση τέμνουσας - ροπής συστροφής

- Στη θέση $y + \frac{\Delta y}{2}$ ενεργεί (μη κατανεμημένη) τέμνουσα:
 - Λόγω της Q_x : $\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta y$
 - Λόγω της M_{xy} : $V' - V$
- Συνολικά: $\left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2}\right) \Delta y + V' - V$



Ενεργός τέμνουσα

- Το σύνολο των τεμνουσών R_x ονομάζεται ενεργός (ή υποκατάστατη) τέμνουσα και ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} R_x \Delta y &= \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta y + V' - V \\ \Rightarrow R_x \Delta y &= \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \right) \Delta y + M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \Delta y - M_{xy} \\ \Rightarrow R_x &= Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \end{aligned}$$

- Καθώς $\Delta y \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial Q_x}{\partial y} \frac{\Delta y}{2} \rightarrow 0$
- Άρα η ενεργός τέμνουσα είναι

$$R_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

Ενεργός τέμνουσα

- Ενεργός τέμνουσα R_x

$$R_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$

- Όμως

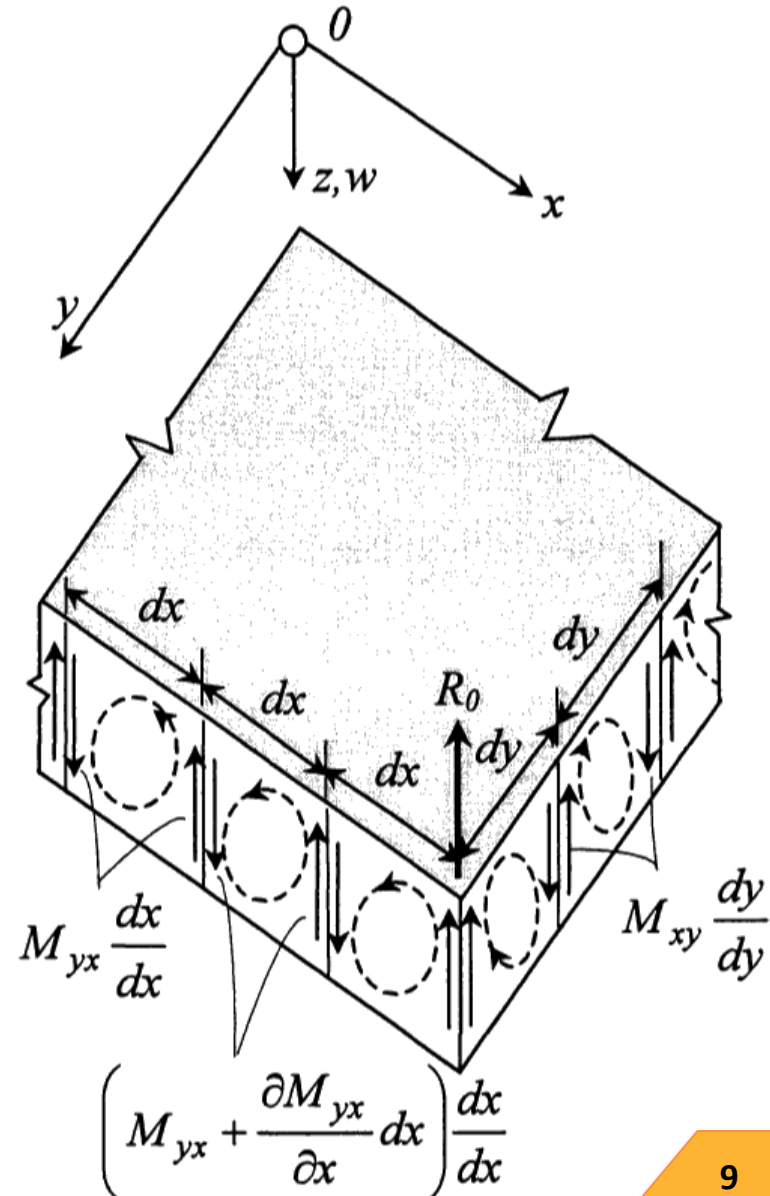
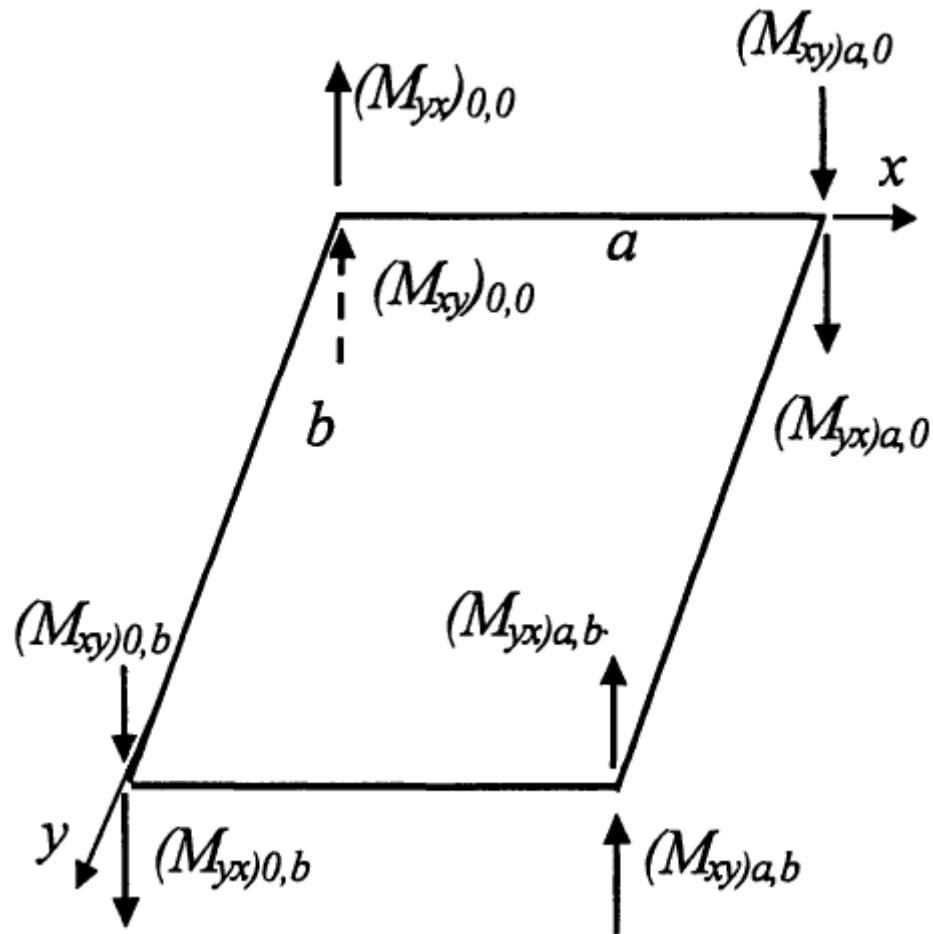
$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} \xrightarrow{M_{xy}=M_{yx}} R_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$$
$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial M_x}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$
$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \Rightarrow 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D(2 - 2\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

- Και τελικά

$$R_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

Συγκέντρωση δυνάμεων στις γωνίες

- Οι τέμνουσες $V = M_{xy}$ από δύο παρειές συμβάλλουν στην κοινή γωνία

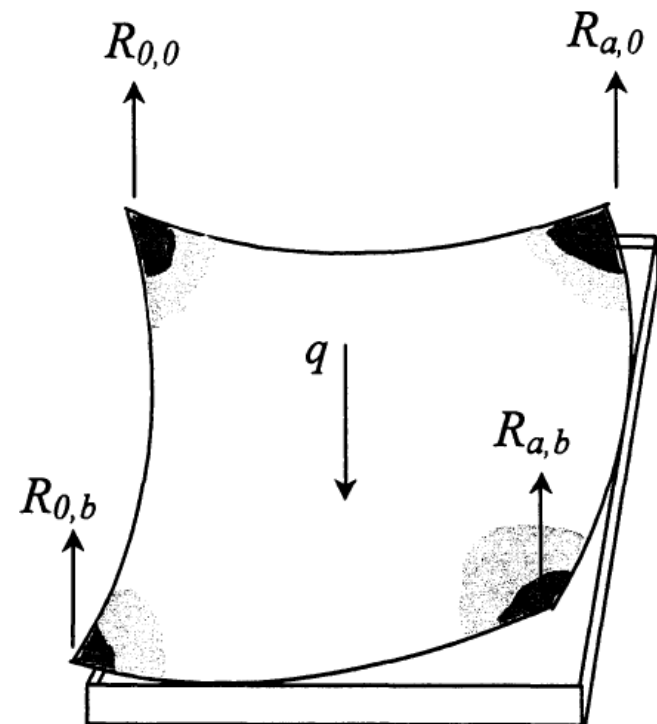
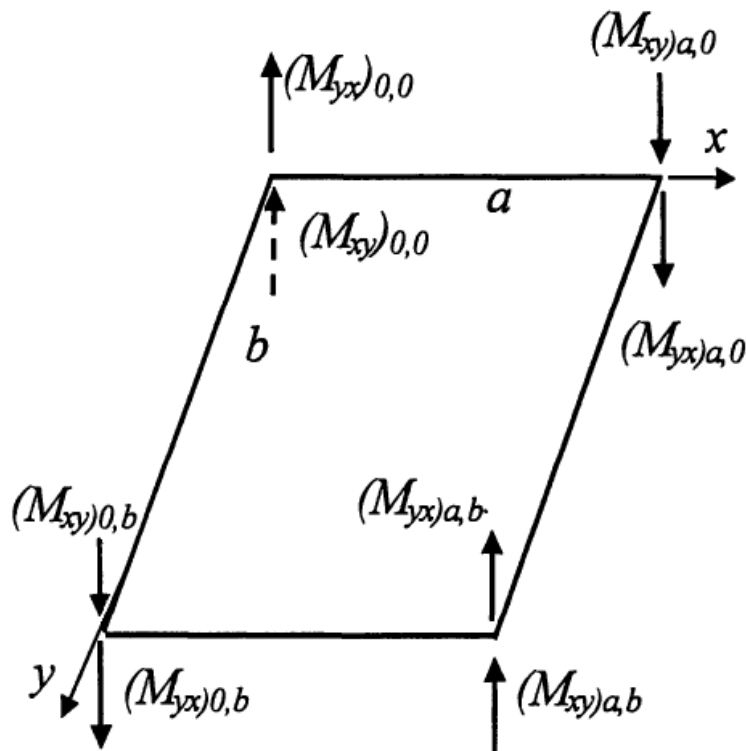


Συγκέντρωση δυνάμεων στις γωνίες

- Αναπτύσσονται συγκεντρωμένες δυνάμεις στις γωνίες της πλάκας

$$R_{0,0} = +M_{xy}(0,0) + M_{yx}(0,0) = +2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (0,0)$$

$$R_{a,0} = -M_{xy}(a,0) - M_{yx}(a,0) = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (a,0)$$

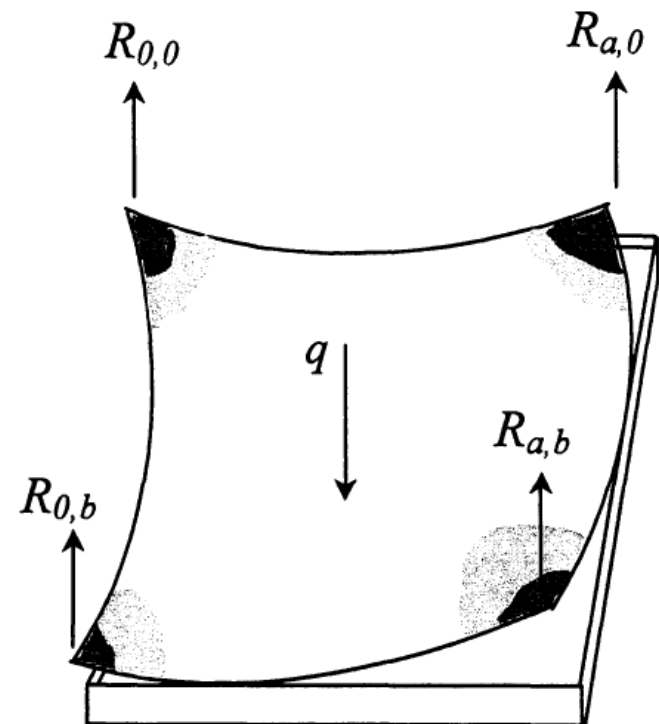
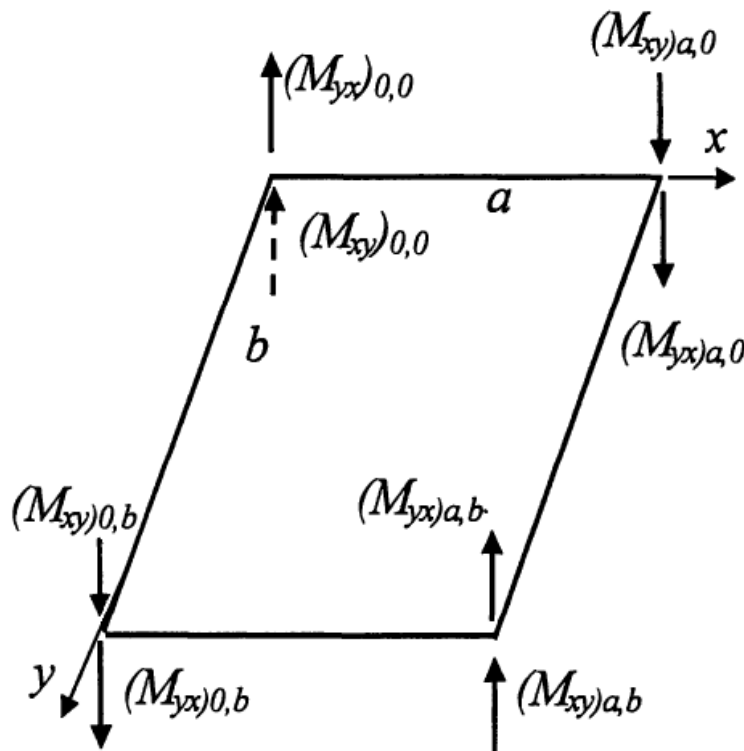


Συγκέντρωση δυνάμεων στις γωνίες

- Αναπτύσσονται συγκεντρωμένες δυνάμεις στις γωνίες της πλάκας

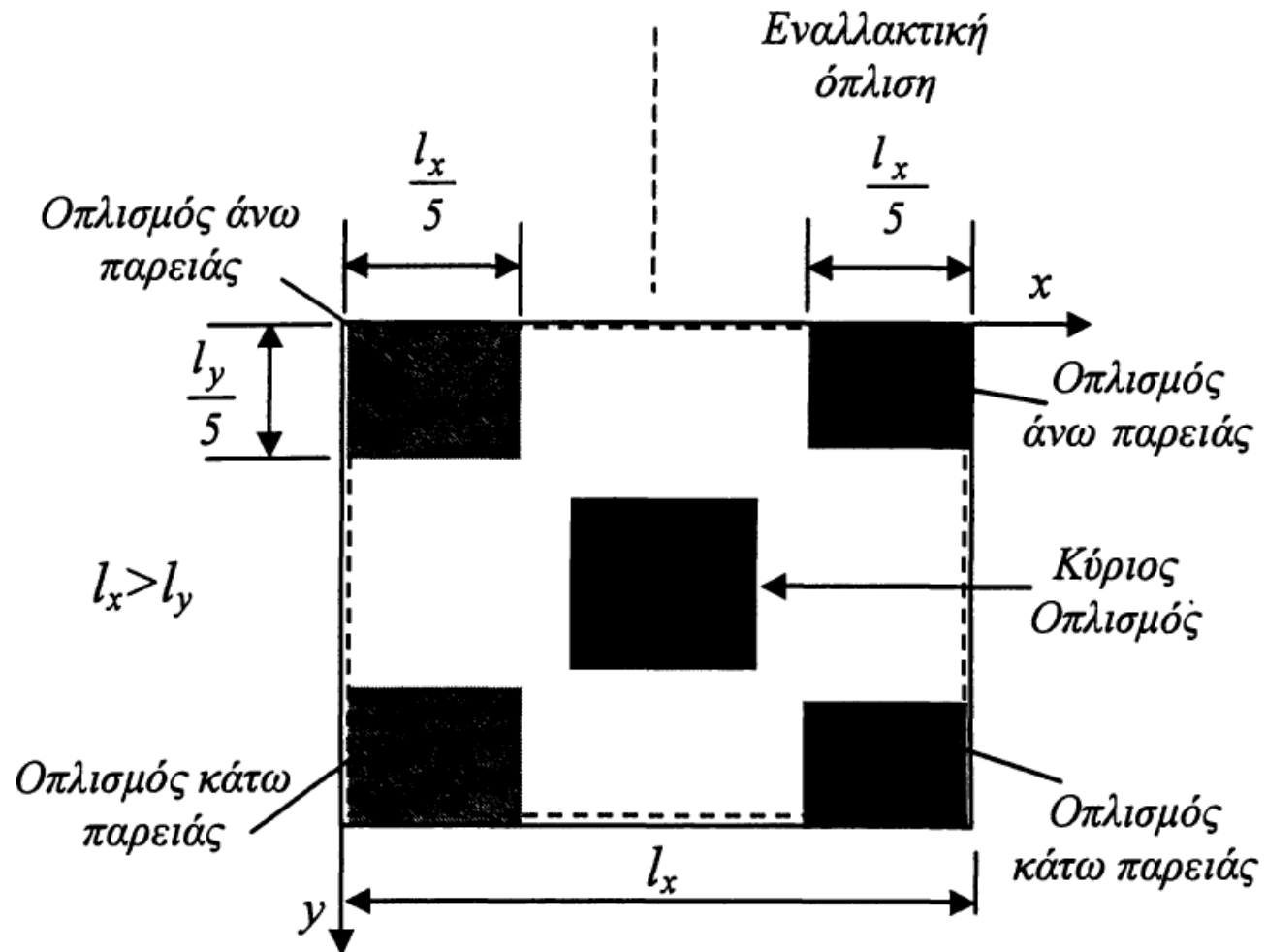
$$R_{0,b} = -M_{xy}(0,b) - M_{yx}(0,b) = -2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(0,b)$$

$$R_{a,b} = +M_{xy}(a,b) + M_{yx}(a,b) = +2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(a,b)$$



Ενεργός τέμνουσα

- Αν οι γωνίες είναι δεν δεσμεύονται από στηρίξεις, θα ανυψωθούν.
- Αν οι γωνίες της πλάκας είναι δεσμευμένες χρειάζεται ειδική μέριμνα στον οπλισμό τους.



Διαφορική εξίσωση πλάκας

- Η διαφορική εξίσωση μιας ορθογωνικής πλάκας:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{q_z(x, y)}{D_\kappa}$$

- Όπου

$$D_\kappa = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \Rightarrow D_\kappa = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$$

- Μη ομογενής μερική δ.ε. 4^{ης} τάξης
- Για να βρεθεί μοναδική λύση χρειάζονται **2** συνοριακές συνθήκες (επιπλέον εξισώσεις μεταξύ w και παραγώγων του) σε κάθε σημείο του συνόρου.
- Οι 4 πλευρές του συνόρου περιγράφονται από τις εξισώσεις:
 $x = 0, \quad x = a, \quad y = 0, \quad y = b$
- Θα δοθούν οι συνοριακές συνθήκες στην πλευρά $x = 0$. Με ίδιο τρόπο μπορούν να περιγραφούν και στις άλλες 3 πλευρές.

Απλή έδραση

- Στη θέση $x = 0$
- Δεσμέυεται η μετατόπιση

$$w = 0$$

- Κατά τον άξονα y :

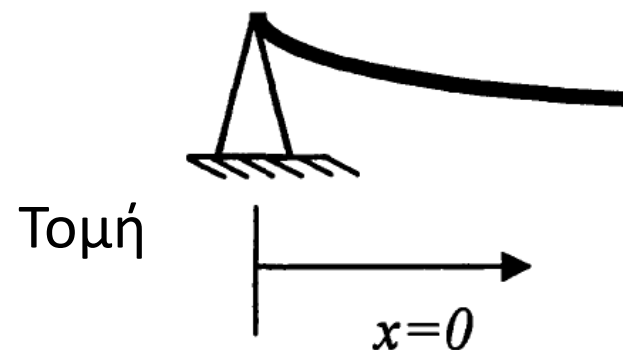
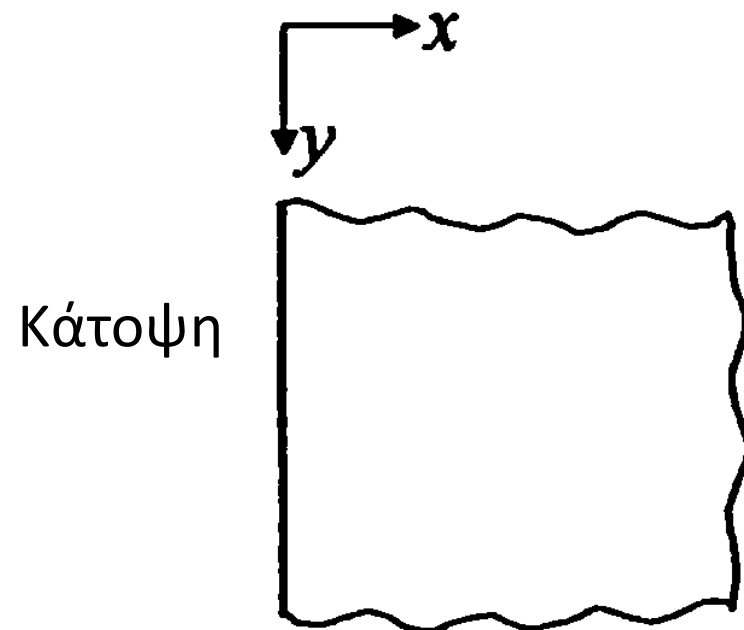
$$w(0, y) = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

- Ελεύθερη στροφή περί τον άξονα y :

$$M_x = 0 \Rightarrow -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

- Άρα

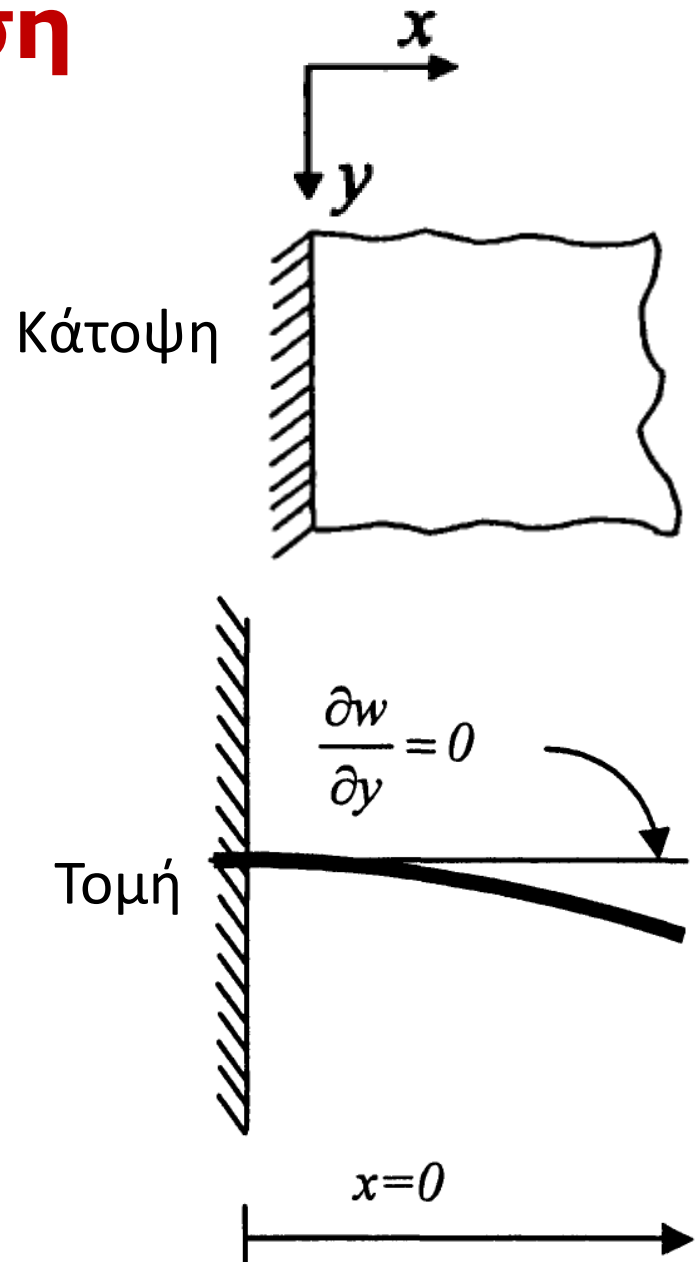
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$



Πάκτωση

- Στη θέση $x = 0$
- Δεσμέυεται η μετατόπιση
 $w = 0$
- Δεσμέυεται η στροφή περί τον άξονα y

$$\theta_y = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$



Ελεύθερη παρειά

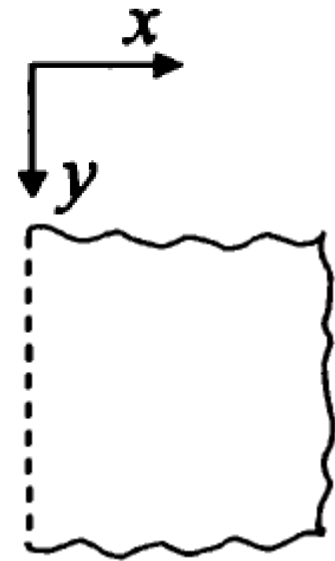
- Στη θέση $x = 0$
- Ελεύθερη στροφή περί τον αξονα y :

$$M_x = 0$$

$$\Rightarrow -D_k \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Κάτοψη



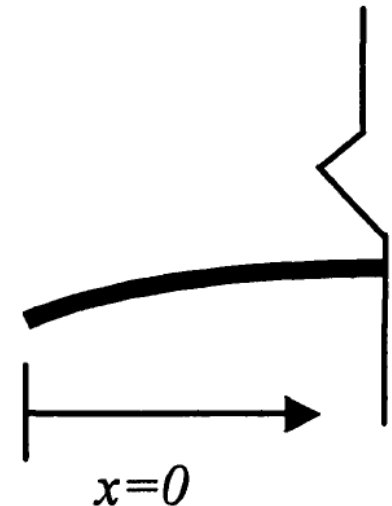
- Ελεύθερη μετατόπιση $\Rightarrow$ μηδενική ενεργός τέμνουσα

$$R_x = 0$$

$$\Rightarrow -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

Τομή



Ελαστικά βυθιζόμενη παρειά

- Στη θέση $x = 0$
- Ελαστικά βυθιζόμενο σύνορο με δυσκαμψία $k(y)$
- Ελεύθερη στροφή περί τον άξονα y :

$$M_x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

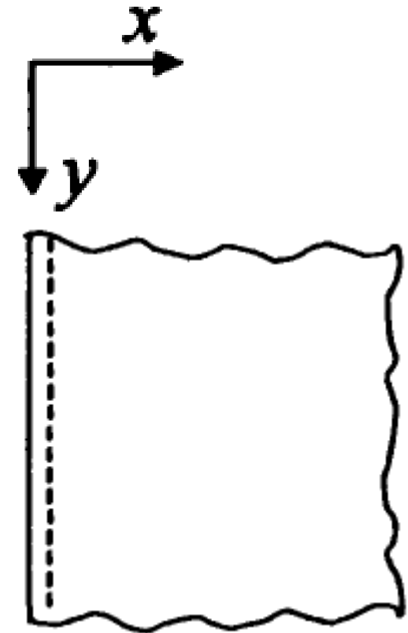
- Το ελατήριο παραμορφώνεται λόγω της ενεργούς τέμνουσας:

$$R_x = k(y) w$$

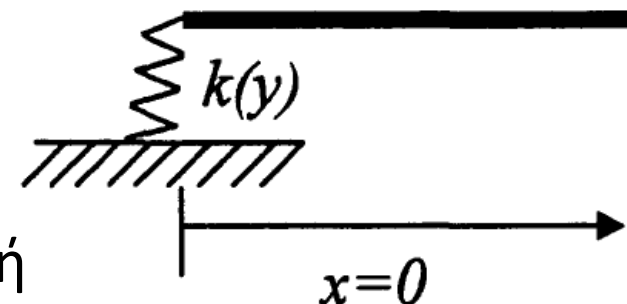
$$\Rightarrow -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = k(y) w$$

$$\Rightarrow w = -\frac{D}{k(y)} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

Κάτοψη



Τομή



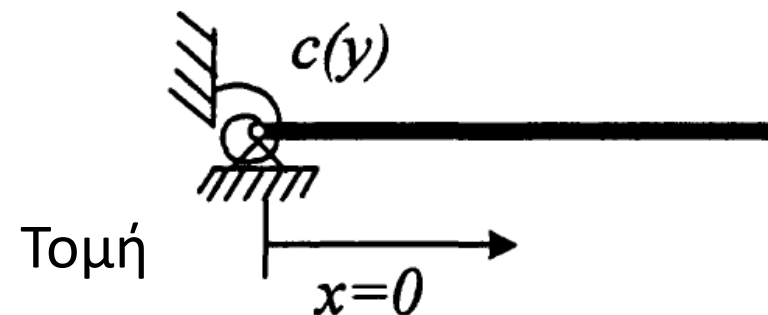
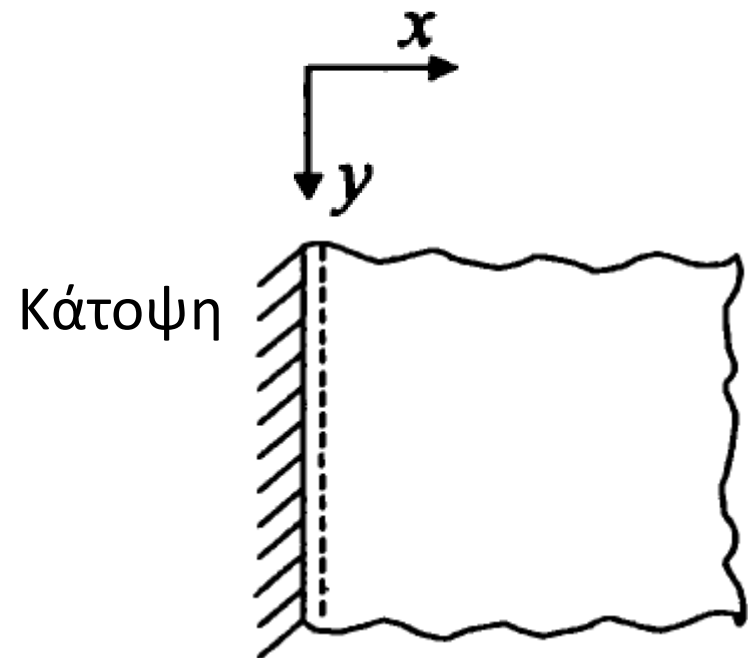
Ελαστικά στρεφόμενη παρειά

- Στη θέση $x = 0$
- Ελαστικά στρεφόμενο σύνορο με στροφική δυσκαμψία $c(y)$
- Δεσμέυεται η μετατόπιση
 $w = 0$
- Το ελατήριο παραμορφώνεται λόγω της ροπής:

$$M_x = c(y)\theta_y$$

$$\Rightarrow -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = c(y) \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{D}{c(y)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$



Ελαστικά βυθιζόμενη και στρεφόμενη παρειά

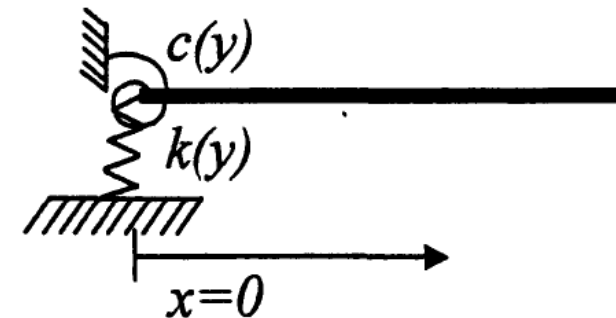
- Στη θέση $x = 0$
- Ελαστικά βυθιζόμενο σύνορο με δυσκαμψία $k(y)$
- Ελαστικά στρεφόμενο σύνορο με στροφική δυσκαμψία $c(y)$
- Όμοια με τις 2 προηγούμενες περιπτώσεις

$$R_x = k(y) w \Rightarrow w = -\frac{D}{k(y)} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

Τομή

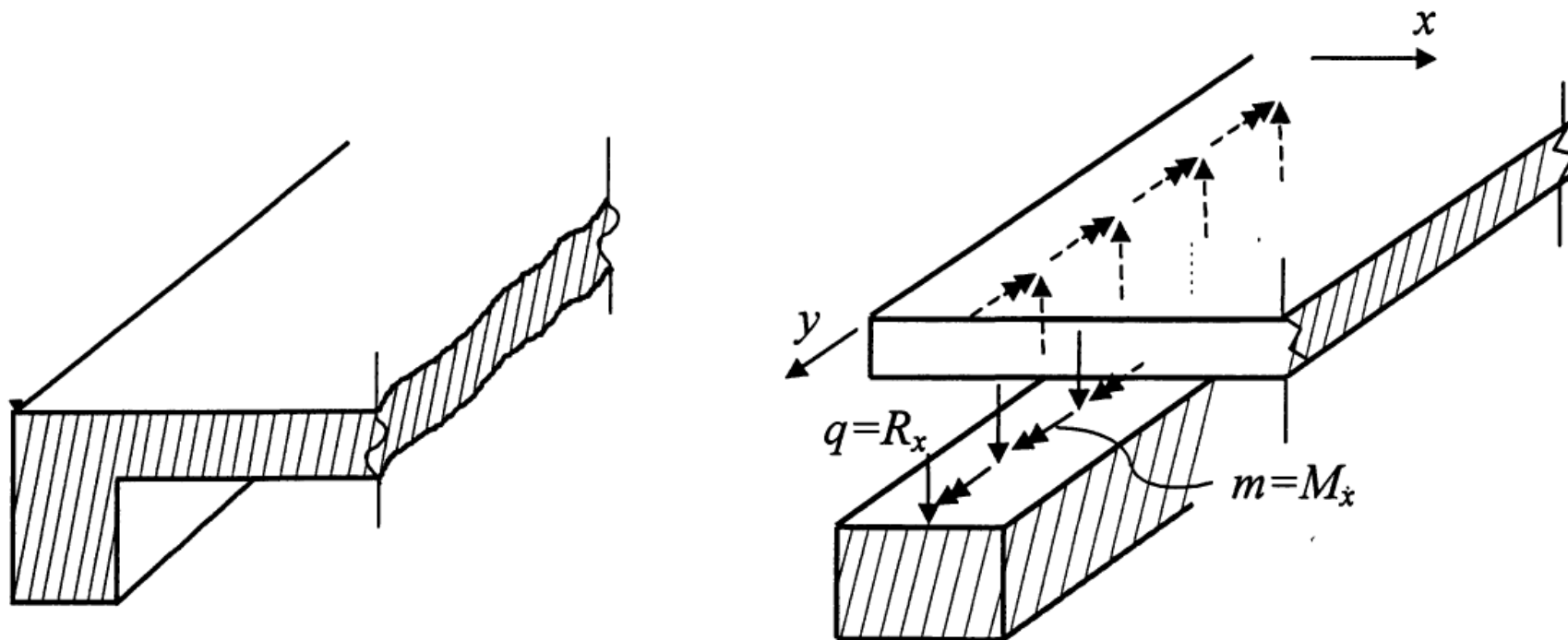
$$M_x = c(y) \theta_y \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{D}{c(y)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

- Χρήσιμο εφαρμογή: πλάκα επί ελαστικής δοκού



Έδραση σε ελαστική δοκό

- Ισορροπία δυνάμεων: Η (κατανεμημένη) ενεργός τέμνουσα R_x της πλάκας αποτελεί κατανεμημένο εγκάρσιο φορτίο q για τη δοκό.
- Συμβιβαστότητα μετατοπίσεων: Η μετατόπιση w είναι ίδια για τη πλάκα και τη δοκό.

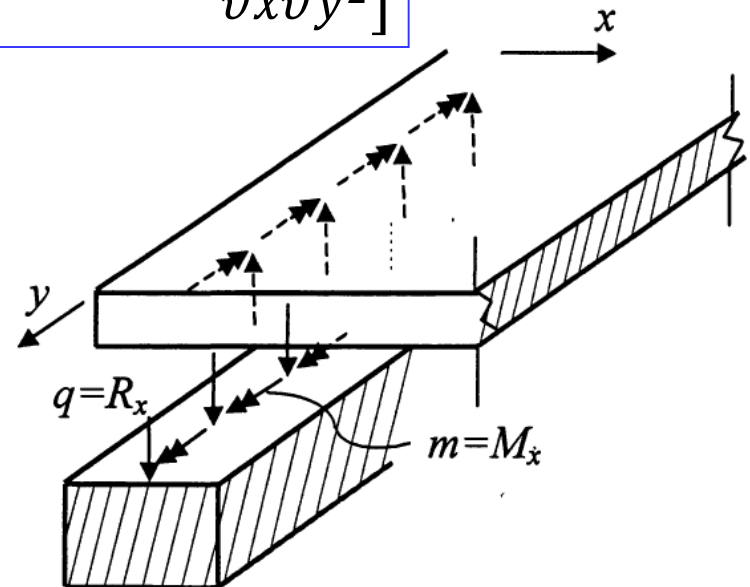
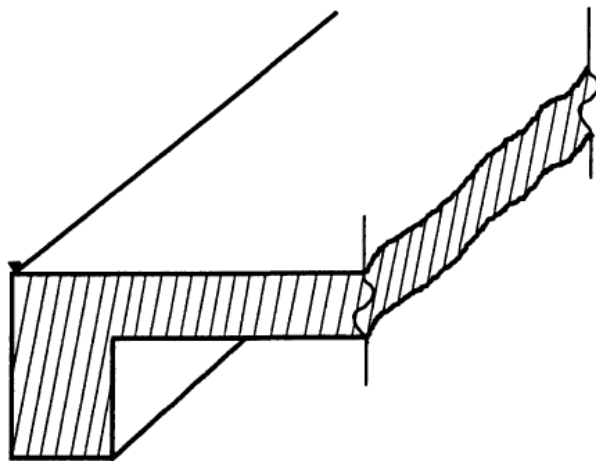


Έδραση σε ελαστική δοκό

- Η δοκός εκτείνεται κατά τον άξονα y , φορτίζεται με $q = R_x$ και έχει βύθιση w ίση με της πλάκας.
- Από γνωστή θεωρία κάμψης δοκού, η διαφορική εξίσωση της βύθισης είναι σε αυτή την περίπτωση

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = R_x$$

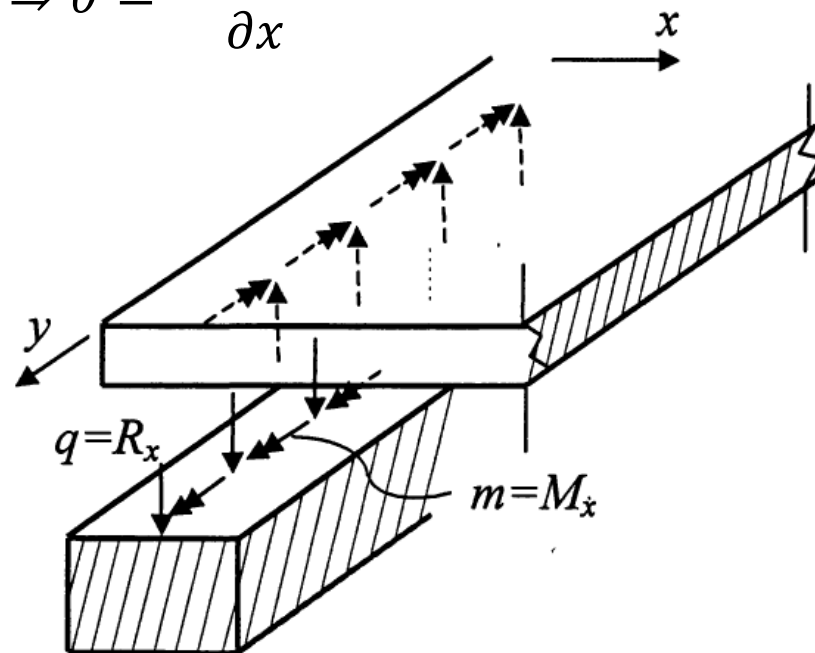
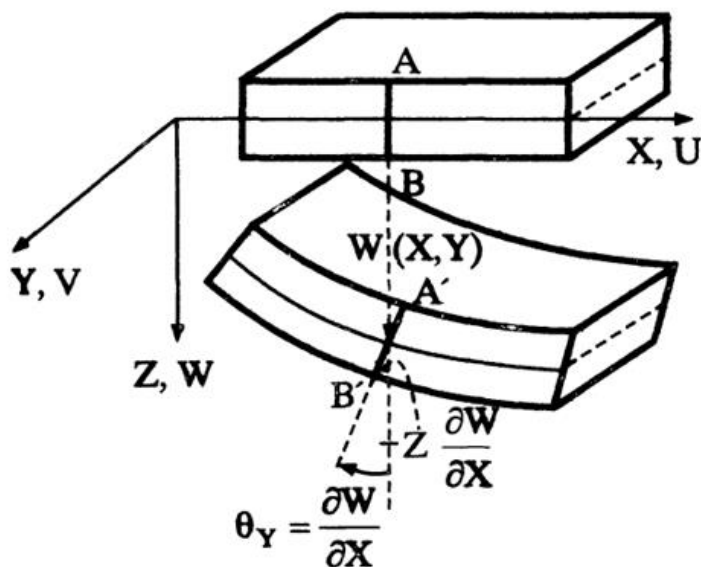
$$\Rightarrow EI \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$



Έδραση σε ελαστική δοκό

- Ισορροπία ροπών: Η (κατανεμημένη) ροπή κάμψης M_x της πλάκας αποτελεί κατανεμημένο στρεπτικό φορτίο m για τη δοκό.
- Η στροφή θ της διατομής της δοκού ορίζεται αντιωρολογιακά γύρω από τον άξονα y .
- Η στροφή κάμψης θ_y της πλάκας ορίζεται ωρολογιακά γύρω από τον άξονα y
- Συμβιβαστικότητα στροφών:

$$\theta = -\theta_y \Rightarrow \theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$$

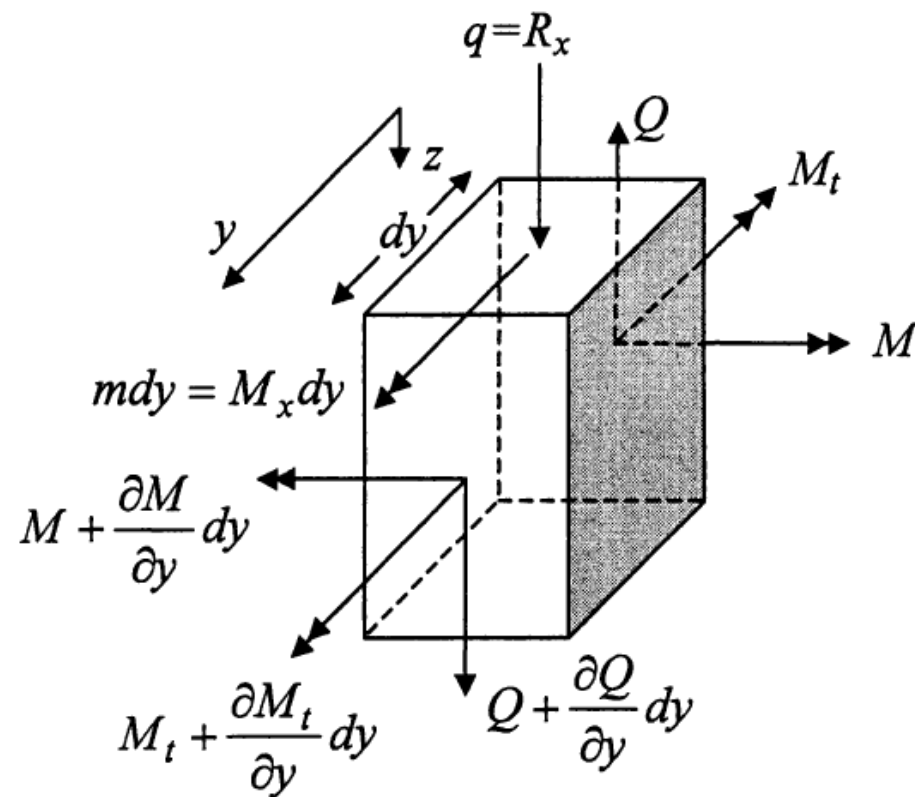


Έδραση σε ελαστική δοκό

- Σε στοιχειώδες τμήμα dy της δοκού που εκτείνεται κατά τον άξονα y
- Ισορροπία ελαστικής δοκού ως προς στρεπτικές ροπές

$$M_t + \frac{\partial M_t}{\partial y} dy - M_t + m dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M_t}{\partial y} = -m$$



Έδραση σε ελαστική δοκό

- Ισορροπία ελαστικής δοκού ως προς στρεπτικές ροπές

$$\frac{\partial M_t}{\partial y} = -m$$

- Από γνωστή θεωρία στρέψης ελαστικής δοκού, έχουμε τη δ.ε.:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{GI_t} \frac{\partial M_t}{\partial y}$$

- Όπου I_t είναι η πολική ροπή αδράνειας και G το μέτρο διάτμησης

- Ισορροπία ροπών πλάκας-δοκού: $m = M_x$

- Συμβιβαστότητα στροφών $\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}$

- Αντικαθιστώντας στην δ.ε.

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{GI_t} M_x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{D}{GI_t} \left(\frac{\vartheta^2 w}{\vartheta x^2} + \nu \frac{\vartheta^2 w}{\vartheta y^2} \right)$$

Έδραση σε ελαστική δοκό

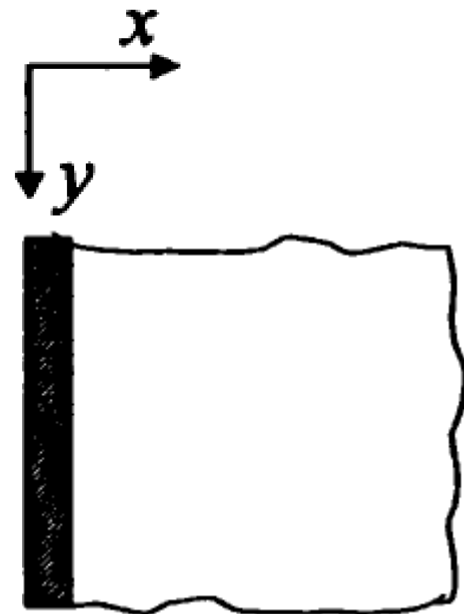
- Άρα στη θέση $x = 0$
- Βύθιση λόγω ελαστικής κάμψης δοκού:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{D}{EI} \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

- Στροφή λόγω ελαστικής στρέψης δοκού:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{D}{GI_t} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$$

Κάτοψη



Τομή

