Γραμμικός προγραμματισμός

Part 2

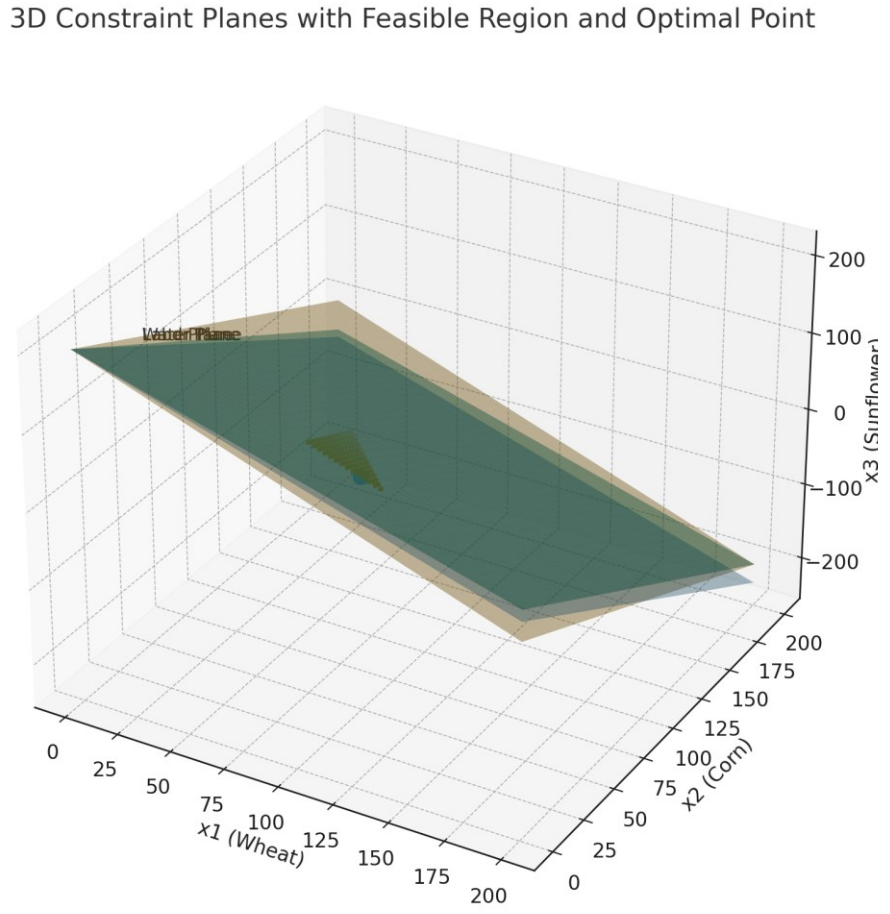
Τι ξέρουμε ήδη;

- Προβλήματα 2 μεταβλητών
- Προβλήματα ελαχιστοποίησης/μεγιστοποίησης
- Περιορισμοί ελαχιστοποίησης/μεγιστοποίησης

- Τα προβλήματα που θα χρειαστεί να αντιμετωπίσουμε μπορεί να έχουν παραπάνω από 2 μεταβλητές:
  - 3+ διαφορετικές καλλιέργειες
- Τα προβλήματα μπορούν να έχουν περιορισμούς με ελάχιστες ή μέγιστες τιμές μεταβλητών
- Τα προβλήματα μπορούν να έχουν περιορισμούς εξίσωσης

Περισσότερες από 2 μεταβλητές

- Ο χώρος αλλάζει από επίπεδο σε όγκο (για 3 μεταβλητές) ή σε πολυδιάστατο (για περισσότερες από 3)
- Η εφικτή περιοχή είναι πλέον επιφάνεια
- Η γραφική επίλυση του προβλήματος είναι δύσκολη (3 μεταβλητές) ή πολύ δύσκολη έως αδύνατη για περισσότερες από 3 μεταβλητές



Παράδειγμα

- Ένας γεωργός διαθέτει **200 εκτάρια** (ha) ομοιόμορφης καλλιεργήσιμης γης.
- Μπορεί να καλλιεργήσει **τρεις καλλιέργειες**:
  - Σιτάρι
  - Καλαμπόκι
  - Ηλίανθο
- Στόχος του είναι να **μεγιστοποιήσει το συνολικό κέρδος** από τις καλλιέργειες, λαμβάνοντας υπόψη περιορισμούς σε γη, νερό, εργασία και κάποιες αγρονομικές/συμβατικές απαιτήσεις.

Ελάχιστες/μέγιστες/ίσες τιμές μεταβλητών

- Ο γεωργός έχει υπογράψει σύμβαση με συνεταιρισμό για:
  - τουλάχιστον 300 τόνους σιτάρι
  - τουλάχιστον 350 τόνους καλαμπόκι.
- Για λόγους αμειψισποράς, το καλαμπόκι δεν πρέπει να ξεπερνά τα 90 ha.
- Για λόγους βιοποικιλότητας, τουλάχιστον 20% της γης πρέπει να είναι σε ηλίανθο.
- Ο γεωργός επιθυμεί να καλλιεργήσει όλη τη διαθέσιμη γη (να μην μείνει γη ακαλλιέργητη).

Δεδομένα

Καλλιέργεια	**Κέρδος (€/ha)**
Σιτάρι	450
Καλαμπόκι	520
Ηλίανθος	480

Καλλιέργεια	**Νερό (m^3/ha)**	**Εργασία (ώρες/ha)**
Σιτάρι	700	8
Καλαμπόκι	1000	12
Ηλίανθος	800	10

Διαθέσιμοι πόροι

- **Διαθέσιμοι πόροι για τη σεζόν**
  - Συνολικό νερό: **160.000 m^3**
  - Συνολική εργασία: **2.000 ώρες**
  - Συνολική γη: **200 ha**

Καλλιέργεια	**Απόδοση (τόνοι/ha)**
Σιτάρι	4
Καλαμπόκι	7
Ηλίανθος	3.5

Μοντελοποίηση

- **Συνάρτηση στόχος**
  - Θέλουμε να **μεγιστοποιήσουμε το συνολικό κέρδος**:
    - Σιτάρι: 450 €/ha → $450x_1$
    - Καλαμπόκι: 520 €/ha → $520x_2$
    - Ηλίανθος: 480 €/ha → $480x_3$
- Άρα: $\max Z = 450x_1 + 520x_2 + 480x_3$

Μοντελοποίηση - Περιορισμοί

- **1. Διαθέσιμη γη (όλη η γη καλλιεργείται)**
  - Συνολική γή: 200 ha
  - $\boldsymbol{x_1 + x_2 + x_3 = 200}$

- **2. Περιορισμός νερού**
  - Σιτάρι: 700 m^3/ha
  - Καλαμπόκι: 1000 m^3/ha
  - Ηλίανθος: 800 m^3/ha
  - Συνολικό διαθέσιμο νερό: 160.000 m^3
    - $\boldsymbol{700x_1 + 1000x_2 + 800x_3 \leq 160000}$

Μοντελοποίηση - Περιορισμοί

- **3. Περιορισμός εργασίας**
  - Σιτάρι: 8 ώρες/ha
  - Καλαμπόκι: 12 ώρες/ha
  - Ηλίανθος: 10 ώρες/ha
  - Συνολική διαθέσιμη εργασία: 2000 ώρες
    - $\boldsymbol{8x_1 + 12x_2 + 10x_3 \leq 2000}$
- **4. Συμβατική ελάχιστη παραγωγή σιταριού**
  - Απόδοση σιταριού: 4 τόνοι/ha, και πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον 300 τόνοι.
    - $\boldsymbol{4x_1 \geq 300}$
- **5. Συμβατική ελάχιστη παραγωγή καλαμποκιού**
  - Απόδοση καλαμποκιού: 7 τόνοι/ha, και πρέπει να παραχθούν τουλάχιστον 350 τόνοι.
    - $\boldsymbol{7x_2 \geq 350}$

Μοντελοποίηση - Περιορισμοί

- **6. Ανώτατο όριο σε καλαμπόκι (αμειψισπορά)**
  - Το καλαμπόκι δεν πρέπει να ξεπερνά τα 90 ha:
    - $\boldsymbol{x_2 \leq 90}$
- **7. Ελάχιστο ποσοστό ηλίανθου (βιοποικιλότητα)**
  - Τουλάχιστον 20% της γης σε ηλίανθο:
    - Ολική γη = 200 ha → 20% = 0,20·200 = 40 ha
      - $\boldsymbol{x_3 \geq 40}$
- **Μη αρνητικότητα**
  - $\boldsymbol{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0}$

Το μοντέλο (συνοπτικά):

- Μεταβλητές:
  - x_1 :ha σιτάρι, x_2 :ha καλαμπόκι, x_3 :ha ηλίανθος
- Στόχος:
  - $\max Z = 450x_1 + 520x_2 + 480x_3$
- Περιορισμοί:
  - Γη: $x_1 + x_2 + x_3 = 200$
  - Νερό: $700x_1 + 1000x_2 + 800x_3 \leq 160000$
  - Εργασία: $8x_1 + 12x_2 + 10x_3 \leq 2000$
  - Ελάχιστο σιτάρι: $x_1 \geq 75, x_1 \geq 0$
  - Καλαμπόκι: $50 \leq x_2 \leq 90,\ x_2 \geq 0$
  - Ηλίανθος: $x_3 \geq 40,\ x_3 \geq 0$

Λύση στο MATLAB

- [x,fval] = linprog(f,A,b)
- Το πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί με αυτή την μορφή της συνάρτησης linprog
  - $50 \leq x_2 \leq 90$???
- Χρειάζονται περισσότερες μεταβλητές για να αναπαραστήσουμε επαρκώς το πρόβλημα

Λύση στο MATLAB

- [x_opt, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub);
  - Για περιορισμούς της μορφής A*x = b
    - Π.χ., Γη: x1 + x2 + x3 = 200
    - Aeq = [1 1 1]
    - beq = 200
  - Όρια κατώτερα (lb) και ανώτερα (ub) για κάθε μεταβλητή
    - Π.χ.:
      - x1 >= 75 (ελάχιστο σιτάρι)
      - 50 <= x2 <= 90 (ελάχιστο και μέγιστο καλαμπόκι)
      - x3 >= 40 (ελάχιστος ηλίανθος)
    - lb = [75; 50; 40];
    - ub = [Inf; 90; Inf]
      - (το Inf σημαίνει άπειρο, το βάζουμε όταν στην αντίστοιχη μεταβλητή δεν υπάρχει ανώτατο (Inf) ή ελάχιστο (-Inf) όριο