Γραμμικός προγραμματισμός

Τι είναι ο Γραμμικός Προγραμματισμός

- Μαθηματική τεχνική βελτιστοποίησης
- Σκοπός: Μέγιστο/Ελάχιστο ενός στόχου
- Στη γεωργία: βέλτιστη χρήση γης, νερού, εργατικού δυναμικού, μηχανημάτων

Γιατί είναι σημαντικός στη γεωργία

- Περιορισμένοι πόροι (έκταση, νερό, ζωοτροφές)
- Μεταβλητές τιμές αγοράς
- Βελτιστοποίηση κέρδους καλλιεργητή
- Μοντελοποίηση σύνθετων αποφάσεων

Στοιχεία ενός μοντέλου ΓΠ

- Μεταβλητές απόφασης (π.χ. στρέμματα καλλιέργειας)
- Αντικειμενική συνάρτηση (μέγιστο κέρδος)
- Περιορισμοί (γη, νερό, ώρα εργασίας)
- Μη αρνητικότητα

Παράδειγμα: Αγρότης με 100 στρέμματα

- Θέλει να καλλιεργήσει:
  - Σιτάρι (x_1)
  - Καλαμπόκι (x_2)
- Κάθε καλλιέργεια έχει:
  - Κέρδος/στρέμμα
  - Απαιτήσεις σε νερό
  - Απαιτήσεις σε εργατοώρες

Ορισμός μεταβλητών & στόχου

- x_1 = στρέμματα σιταριού
- x_2 = στρέμματα καλαμποκιού
- Αντικειμενική συνάρτηση/Στόχος: Max $Z = \text{κέρδος}_1 \cdot x_1 + \text{κέρδος}_2 \cdot x_2$
- Παράδειγμα: Max $Z = 40x_1 + 55x_2$

Περιορισμοί

- *Κανόνες* ή *όρια* που πρέπει να τηρούνται από τις μεταβλητές απόφασης του προβλήματος.
- Περιγράφουν τους διαθέσιμους πόρους, τις απαιτήσεις και τις φυσικές ή λογικές συνθήκες μέσα στις οποίες πρέπει να παρθεί η βέλτιστη απόφαση.

Περιορισμοί στη γεωργία

- Οι περιορισμοί εκφράζουν:
  - ✔ **Διαθέσιμους πόρους**
    - Γη
    - Νερό
    - Μηχανήματα
    - Ζωοτροφές
    - Χρήμα
  - ✔ **Τεχνικούς ή φυσικούς περιορισμούς**
    - Μέγιστη έκταση για καλλιέργεια
    - Περιορισμένη άρδευση
    - Μέγιστη παραγωγική ικανότητα
  - ✔ **Υποχρεωτικές απαιτήσεις**
    - Ελάχιστη παραγωγή συγκεκριμένου προϊόντος
    - Υποχρεωτική κάλυψη ζήτησης

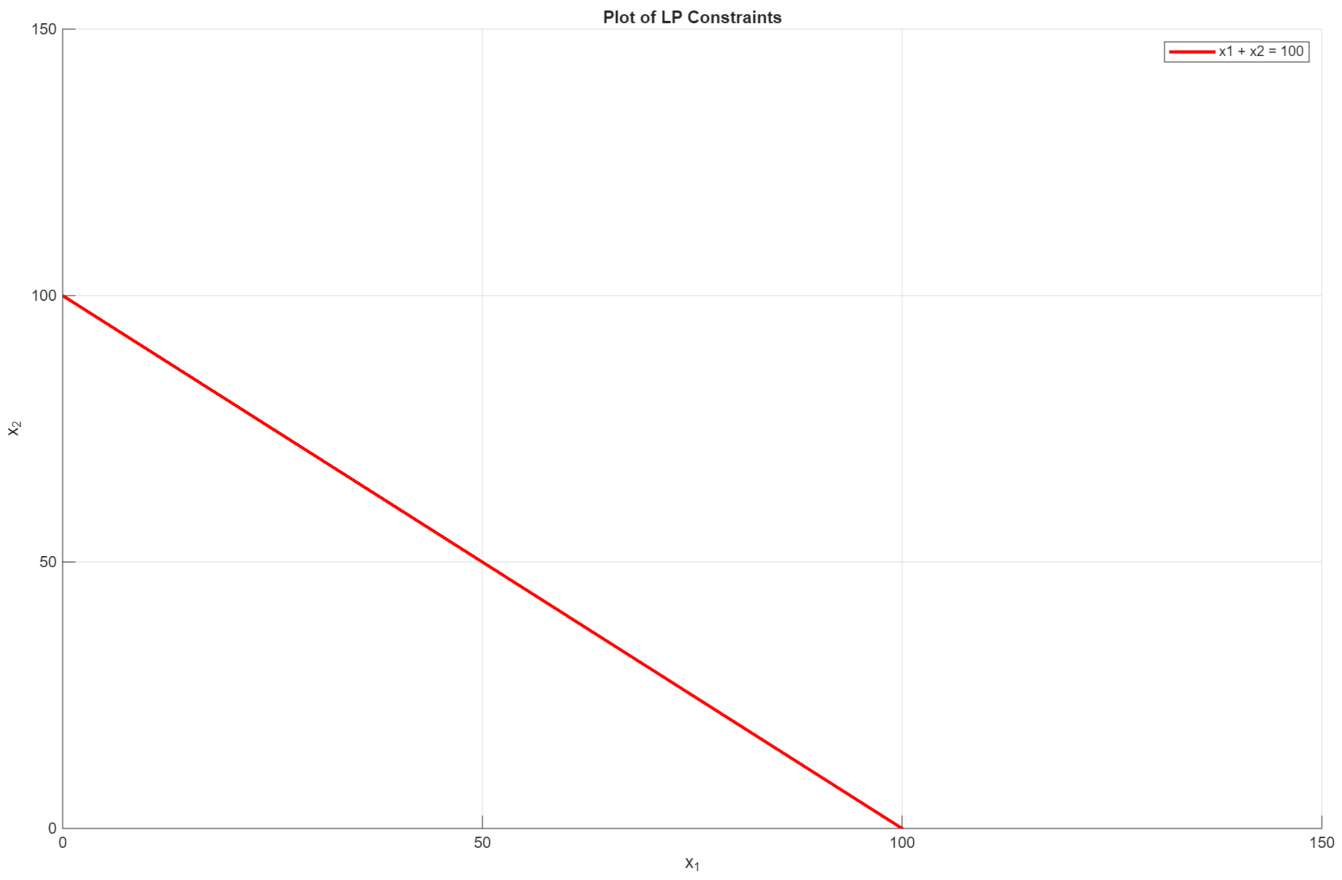
Γιατί χρειάζονται οι περιορισμοί;

- Οι περιορισμοί:
  - Ορίζουν την **εφικτή περιοχή** του προβλήματος
  - Βεβαιώνουν ότι η λύση είναι **ρεαλιστική**
  - Ζωγραφίζουν τα **όρια** μέσα στα οποία το μοντέλο αναζητά τη βέλτιστη λύση
  - Εκφράζουν τη **σπανιότητα** των πόρων

- Χωρίς περιορισμούς, η λύση θα ήταν απλά «παράγουμε όσο θέλουμε» — πράγμα αδύνατο στην πραγματικότητα.

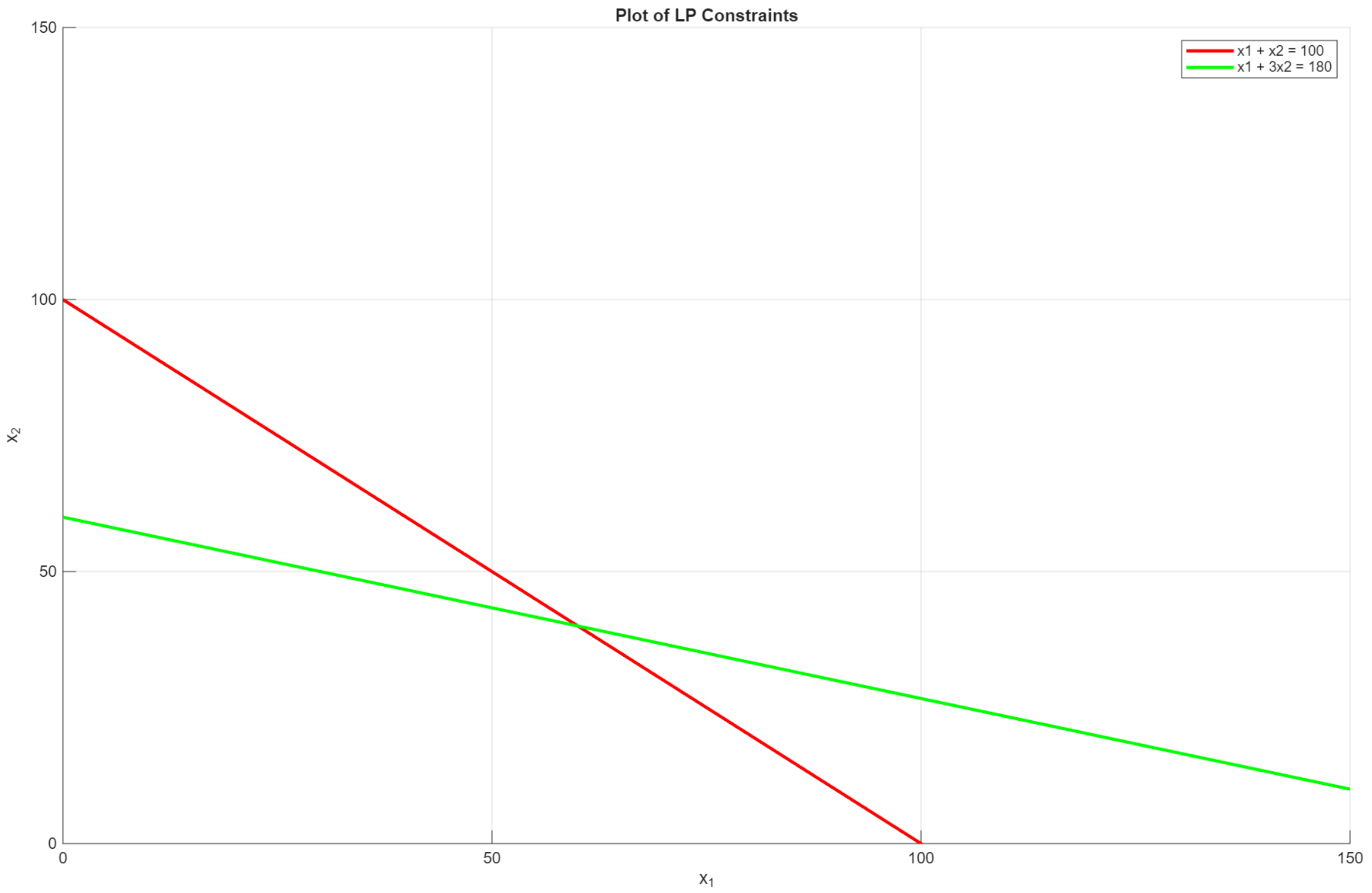
Περιορισμοί

- Συνολική γη που διαθέτει
  - $x_1 + x_2 \leq 100$ στρέμματα
- Ερμηνεία: Δεν μπορούμε να καλλιεργήσουμε περισσότερα στρέμματα από όσα διαθέτουμε.



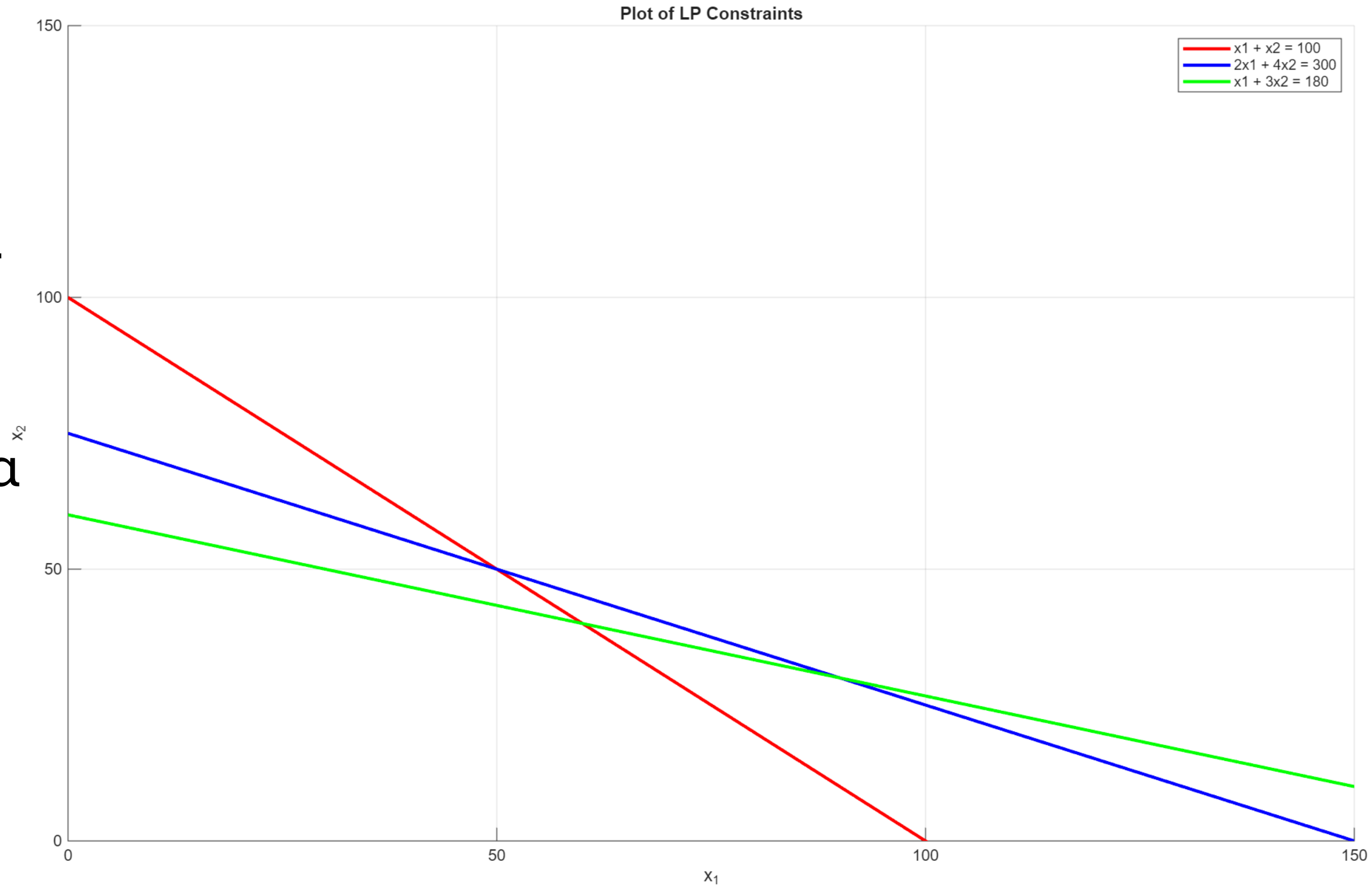
Περιορισμοί

- Αν απαιτούνται εργατοώρες:
  - $x_1 + 3x_2 \leq 180$ ώρες



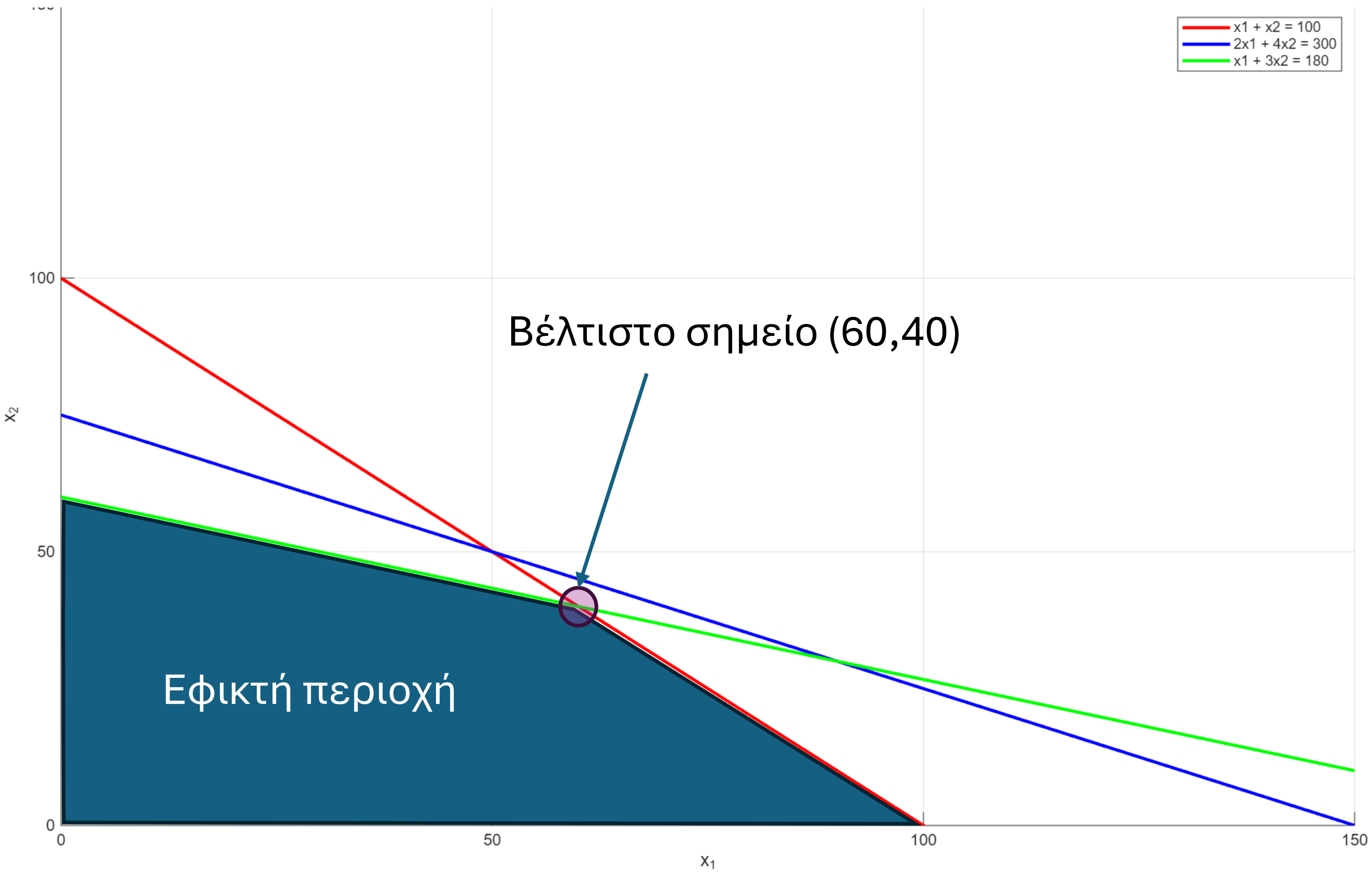
Περιορισμοί

- Αν το σιτάρι χρειάζεται 2 κυβ. μέτρα και το καλαμπόκι 4:
    - $2x_1 + 4x_2 \le 300$ κυβ. μέτρα



Εφικτή περιοχή

- Η περιοχή που βρίσκεται «ανάμεσα» σε όλες τις ευθείες περιορισμών

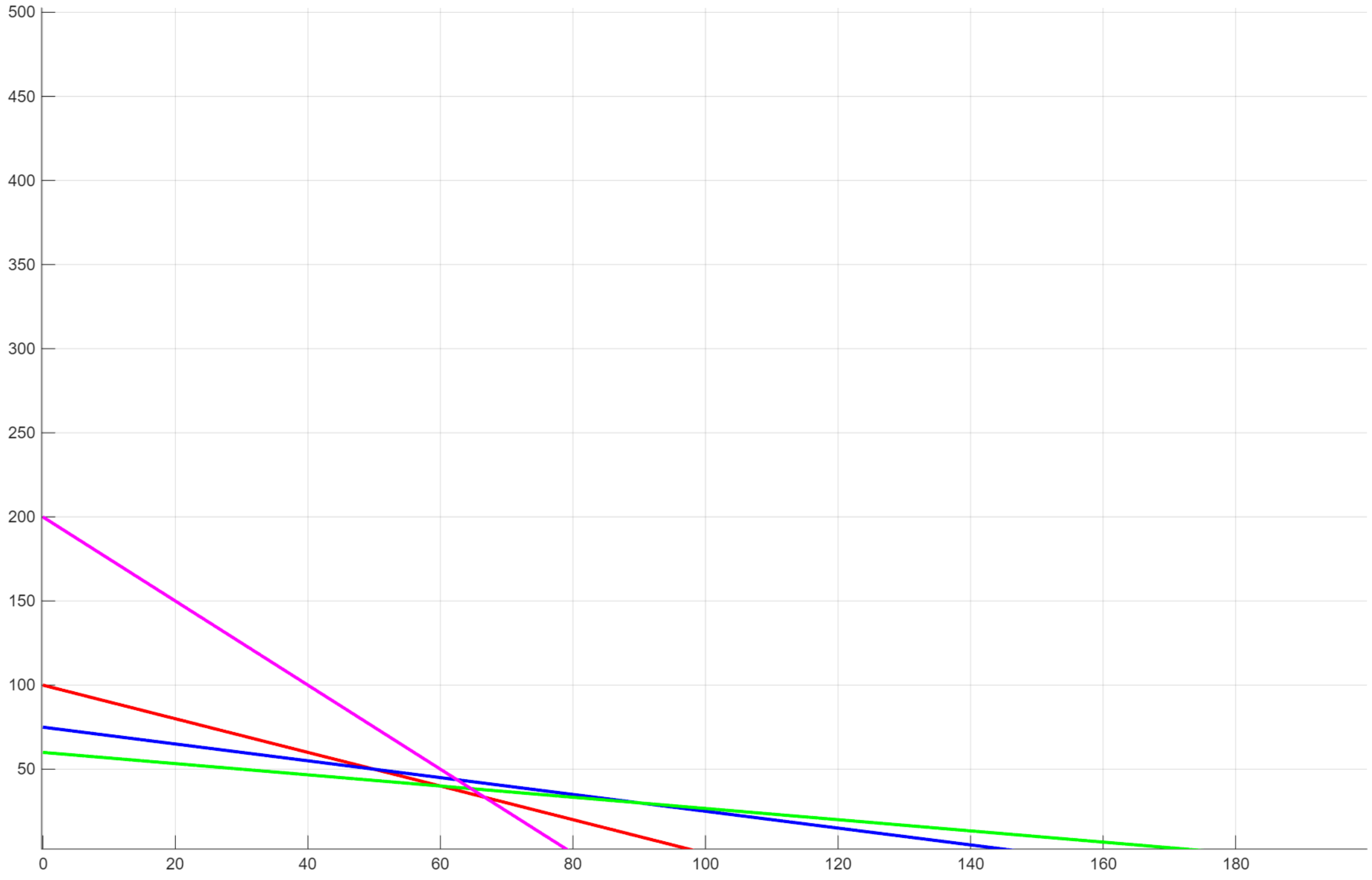


Εφικτή περιοχή & κορυφές

- Η λύση βρίσκεται σε κορυφή
- Σημεία τομής περιορισμών
- Υπολογισμός κέρδους σε κάθε κορυφή
- Παράδειγμα υπολογισμού:
- Κορυφή Α: $x_1=60$, $x_2=40$ → $Z = 40x_1 + 55x_2$
  - $Z = 2400 + 2200 = 4600$

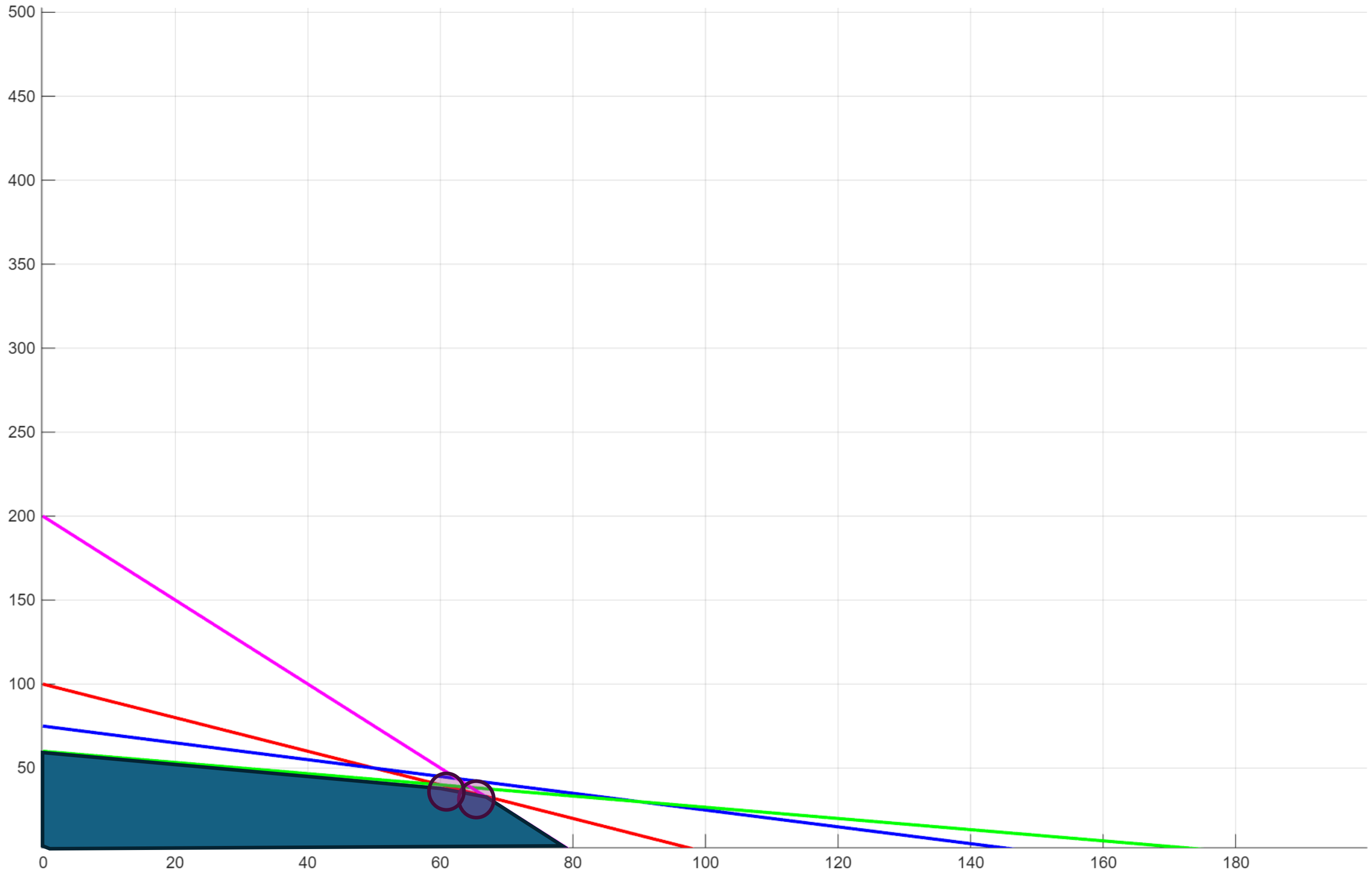
Πολλαπλές κορυφές

- Αν για να μαζευτεί το σιτάρι χρειαζόμαστε 5 λίτρα πετρέλαιο ανά στρέμμα ενώ για το καλαμπόκι 2 λίτρα/στρ. και ο αγρότης διαθέτει 400 λίτρα:
    - $5x_1 + 2x_2 \leq 400$ λίτρα



Πολλαπλές κορυφές

- Η μορφή της εφικτής περιοχής αλλάζει
- Δημιουργούνται 2 κορυφές:
  - (60,40)
  - (66.7,33.3)
- Υπολογίζουμε το κέρδος και στα 2 σημεία και επιλέγουμε το σημείο που αντιστοιχεί στο μέγιστο:
  - **(60,40) -> 4600**
  - (66.7,33.3) -> 4.499,5



ΓΠ στο Matlab

- Συνάρτηση linprog

```
[x, fval] = linprog(f, A, b);
```

- Απαραίτητος ο ορισμός των πινάκων:
  - f: διάνυσμα συντελεστών της αντικειμενικής συνάρτησης
  - A, b : περιορισμοί ανισοτήτων $Ax \leq b$
- Το Matlab λύνει **<u>ΜΟΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ</u>**
- Αν θέλουμε να λύσουμε προβλήματα μεγιστοποίησης ή αν ένας περιορισμός δίνεται με κατώτατο όριο πολλαπλασιάζουμε τις αντίστοιχες ανισότητες με -1

$$a_1x_1 + a_2x_2 \geq L \quad \Longrightarrow \quad -(a_1x_1 + a_2x_2) \leq -L$$

Μοντελοποίηση

- Ένας αγρότης έχει **100 στρέμματα** και θέλει να καλλιεργήσει:
  - x_1 = στρέμματα σιταριού
  - x_2 = στρέμματα καλαμποκιού
- Κέρδος/στρέμμα:
  - σιτάρι: 40 €
  - καλαμπόκι: 55 €

Μοντελοποίηση

- Περιοριισμοί:
- Γη: $x_1 + x_2 \leq 100$
- Νερό (κυβ. μέτρα):
  - σιτάρι: 2 /στρ.
  - καλαμπόκι: 4 /στρ.
    Σύνολο διαθέσιμο: 300
  - $2x_1 + 4x_2 \leq 300$
- Εργατοώρες:
  - σιτάρι: 1 /στρ.
  - καλαμπόκι: 3 /στρ.
    Σύνολο διαθέσιμο: 180
  - $x_1 + 3x_2 \leq 180$
- Μη αρνητικότητα:
  - $x_1, x_2 \geq 0$
- Στόχος το **μέγιστο κέρδος**: $\max Z = 40x_1 + 55x_2$

Μοντελοποίηση

- Επειδή το linprog κάνει **min**, γράφουμε:

$$\min f^T x = -Z = -40x_1 - 55x_2$$

- Οπότε από την αντικειμενική συνάρτηση παίρνουμε τον πίνακα **f**
  - f=[-40; -55]

Μοντελοποίηση: Περιορισμοί

- Παίρνουμε τους συντελεστές των μεταβλητών από τις ανισότητες περιορισμών για τον πίνακα **:**

- Γη: $1x_1 + 1x_2 \leq 100$

- Νερό: $2x_1 + 4x_2 \leq 300$

- Εργατοώρες: $1x_1 + 3x_2 \leq 180$

```
% Πίνακας ανισοτήτων A x <= b
A = [ 1    1;          % γη
      2    4;          % νερό
      1    3];         % εργασία
```

Μοντελοποίηση: Περιορισμοί

- Παίρνουμε τα ανώτατα όρια των ανισοτήτων για τον πίνακα **b:**

- Γη: $1x_1 + 1x_2 \leq 100$

- Νερό: $2x_1 + 4x_2 \leq 300$

- Εργατοώρες: $1x_1 + 3x_2 \leq 180$

```
b = [100;          % 100 στρέμματα
     300;          % 300 κυβ. μέτρα νερό
     180];         % 180 εργατοώρες
```

Κλήση linprog

- [x, fval] = linprog(f, A, b);
- Στον πίνακα x έχουμε το βέλτιστο σημείο
- Στον πίνακα fval έχουμε την τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης (Z) στο βέλτιστο σημείο

Οπτικοποίηση αποτελέσματος

```
x1 = 0:1:100;  % δείγμα τιμών

% Από τους περιορισμούς λύνουμε ως προς x2:
x2_land   = 100 - x1;
x2_water  = (300 - 2*x1)/4;
x2_labor  = (180 - 1*x1)/3;

plot(x1, x2_land,  'LineWidth',1.5); hold on
plot(x1, x2_water, 'LineWidth',1.5);
plot(x1, x2_labor, 'LineWidth',1.5);

xlabel('x_1 (Σιτάρι, στρέμματα)');
ylabel('x_2 (Καλαμπόκι, στρέμματα)');
legend('Γη','Νερό','Εργασία','Location','best');
grid on;

% Σημείωσε τη βέλτιστη λύση
plot(x_opt(1), x_opt(2), 'ko','MarkerSize',8,'MarkerFaceColor','k');
text(x_opt(1)+1, x_opt(2), 'Βέλτιστο');
hold off
```