20 Λυμένες Ασκήσεις στα Ρευστά

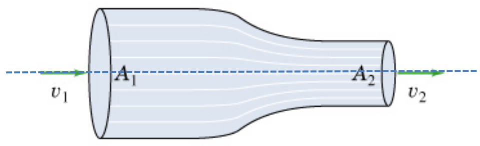
Μιχάλης Πετρόπουλος

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Μέσα σε οριζόντιο κυλινδρικό σωλήνα ρέει νερό με ταχύτητα u_1 = 0,6 m/s. Το εμβαδόν της διατομής τού σωλήνα είναι A_1 = 25 cm^2 και ή πίεση στο εσωτερικό του P_1 =4·10^4 N/m^2. Ο σωλήνας έχει μία στένωση, όπου το εμβαδόν της διατομής του είναι A_2=5 cm^2. Να υπολογιστούν, ή ταχύτητα του νερού και ή πίεση στη στένωση.

Απάντηση

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:



$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1u_1 = A_2u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2}u_1 \Rightarrow \boxed{u_2 = 3\ \frac{m}{s}} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2, λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού σωλήνα. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1=h_2}$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) \Rightarrow \boxed{P_2 = 3{,}568 \cdot 10^4\ \frac{N}{m^2}}$$

2. Ένας οριζόντιος σωλήνας αποτελείται από δύο τμήματα, των όποιων τα εμβαδά των διατομών έχουν λόγο A_1/A_2 = 3. Στο σωλήνα ρέει υγρό πυκνότητας ρ, που η ταχύτητά του στο τμήμα με τη μεγαλύτερη διατομή είναι u_1. Να υπολογιστεί ή διαφορά πιέσεως μεταξύ των δύο τμημάτων.

Απάντηση

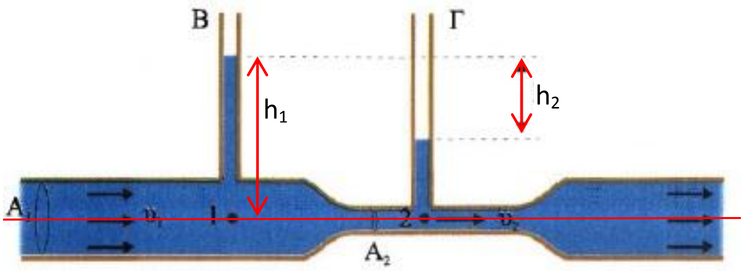
Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1u_1 = A_2u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2}u_1 \Rightarrow \boxed{u_2 = 3\,u_1} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2, λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού σωλήνα. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1=h_2} P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) \xRightarrow{(1)} \boxed{\Delta P = 4\rho u_1^2}$$

3. Ο οριζόντιος σωλήνας του σχήματος αποτελείται από δύο τμήματα, με διατομές A_1 = 4 cm^2 και A_2= 1 cm^2. Στο σωλήνα ρέει νερό, με την ταχύτητα ροής του στο στενότερο σημείο του να είναι u_2=0,8 m/s. Στα δύο τμήματα του σωλήνα είναι προσαρμοσμένοι δύο κατακόρυφοι σωλήνες Β και Γ. Αν h_1 =27 cm, πόση πρέπει να είναι η u_1 ώστε να είναι h_2 = 0 ; Δίνονται g = 10 m/s^2 και A_1/A_2 = 4.



Απάντηση

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1u_1 = A_2u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2}u_1 \Rightarrow \boxed{u_2 = 4\,u_1} \quad (1)$$

Για την πίεση του υγρού ισχύει ότι:

$$P = \frac{F}{A} \Rightarrow P = \frac{w}{A} \Rightarrow P = \frac{mg}{A} \Rightarrow P = \frac{\rho V g}{A} \Rightarrow P = \frac{\rho A h g}{A} \Rightarrow P = \rho g h \quad (2)$$

Όπου ρ η πυκνότητα του υγρού και h το ύψος της στάθμης του από το επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης, που λαμβάνεται το οριζόντιο επίπεδο το οποίο διέρχεται κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού σωλήνα.

Αν μηδενιστεί το ύψος του υγρού στο σωλήνα Γ, θα είναι P_2=0.

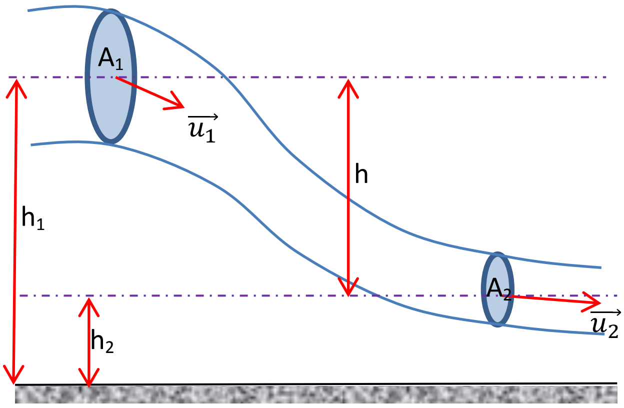
Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1=h_2=0}$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \xRightarrow{(1),(2)} \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = 16\frac{1}{2}\rho u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2}{15} g h_1} \Rightarrow \boxed{u_1 = 0{,}6\frac{m}{s}}$$

4. Μέσα σε σωλήνα ρέει νερό. Σε κάποιο σημείο ή ταχύτητα τού νερού είναι $υ_1$ = 1 m/s και ή πίεση P_1 = $4{\cdot}10^5$ N/m^2. Να υπολογιστεί η πίεση σε κάποιο άλλο σημείο, πού βρίσκεται h = 20 m πιο χαμηλά από το προηγούμενο, αν το εμβαδόν της διατομής του σωλήνα στο δεύτερο σημείο είναι το μισό από εκείνο στο πρώτο σημείο. Δίνονται g = 10 m/s^2 και ρ = 10^3 kgr/m^3.

Απάντηση



Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = 2\,u_1} \quad (1)$$

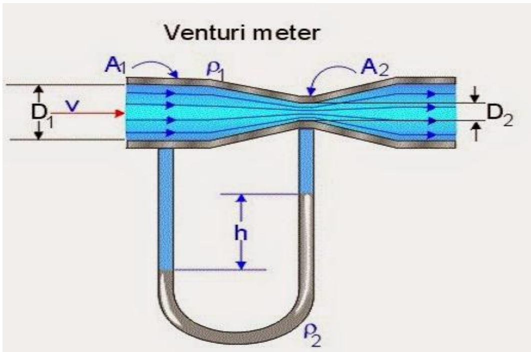
Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2, λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο δάπεδο. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{h_1 - h_2 = h} P_2 = P_1 + \frac{1}{2}\rho(u_1^2 - u_2^2) + \rho g h \xRightarrow{(1)} P_2 = P_1 - \frac{3}{2}\rho u_1^2 + \rho g h \Rightarrow \boxed{P_2 = 6\cdot 10^5\frac{N}{m^2}}$$

5. Σε ένα βεντουρίμετρο η διαφορά πιέσεως μεταξύ του κύριου σωλήνα και της στένωσης είναι 10^5 N/m^2. Τα εμβαδά των διατομών των δύο τμημάτων είναι 0,1 m^2 και 0,05 m^2. Να υπολογιστεί η παροχή στο θεωρούμενο βεντουρίμετρο. Δίνονται, η πυκνότητα τού νερού ρ = 10^3 kgr/m^3 και g = 10 m/s^2.

Απάντηση



Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = 2\,u_1} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2, λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού σωλήνα. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1 = h_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \Delta P = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) \xRightarrow{(1)} \Delta P = \frac{3}{2}\rho u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{3\rho}} \Rightarrow u_1 = 10\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{m}{s} \qquad (2)$$

Συνεπώς:

$$\Pi_1 = A_1 u_1 \xrightarrow{(2)} \boxed{\Pi_1 \approx 0{,}816 \frac{m^3}{s}}$$

6. Σε ένα βεντουρίμετρο που ρέει νερό, η διαφορά πιέσεως μεταξύ του κύριου σωλήνα και της στένωσης είναι $\Delta P = 10^4$ N/m^2. Ό λόγος των ακτίνων των δύο διατομών του βεντουρίμετρου είναι $R_1/R_2 = 2$. Να υπολογιστεί ή ταχύτητα τού νερού στο τμήμα με τη μεγαλύτερη διατομή. Δίνονται, η πυκνότητα τού νερού $\rho = 10^3$ kgr/m^3 και $g = 10$ m/s^2.

Απάντηση

Από τη γεωμετρία της σωλήνωσης:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \xrightarrow{\text{R1/R2 = 2}} \frac{A_1}{A_2} = 4 \qquad (1)$$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_1}{A_2} u_1 \xrightarrow{(1)} \boxed{u_2 = 4\, u_1} \qquad (2)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 και A_2, λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται κατά μήκος του άξονα του κυλινδρικού σωλήνα. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \xrightarrow{h_1 = h_2}$$

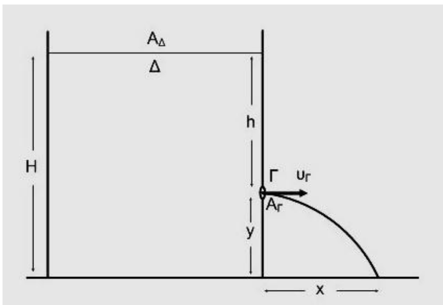
$$\Rightarrow \Delta P = \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_1^2) \xrightarrow{(2)} \Delta P = \frac{15}{2}\rho u_1^2 \Rightarrow u_1 = \sqrt{\frac{2\Delta P}{15\rho}} \Rightarrow \boxed{u_1 \approx 1{,}154\ \frac{m}{s}}$$

7. Ένα μεγάλο ανοιχτό δοχείο περιέχει νερό σε βάθος H. Στο κατακόρυφο τοίχωμα του δοχείου ανοίγουμε μία μικρή τρύπα σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια τού νερού. Τότε παρατηρούμε ότι το νερό εκτοξεύεται οριζόντια και συναντάει το οριζόντιο έδαφος σε κάποιο σημείο:

α) Να υπολογιστεί η απόσταση x αυτού τού σημείου από τη βάση τού δοχείου.

β) Για ποια τιμή του h η απόσταση x γίνεται μέγιστη; Δίνεται το g.

Απάντηση



α) Σύμφωνα με το θεώρημα του Toricelli από το σημείο Γ, που ανοίγουμε την τρύπα, το νερό θα εκτοξευθεί με ταχύτητα μέτρου:

$$u_\Gamma = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Από το σημείο Γ το νερό εκτοξεύεται οριζόντια και σύμφωνα με τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής, ο χρόνος για να φθάσει στο δάπεδο ισούται με:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \qquad (2)$$

Οπότε, το βεληνεκές θα ισούται με:

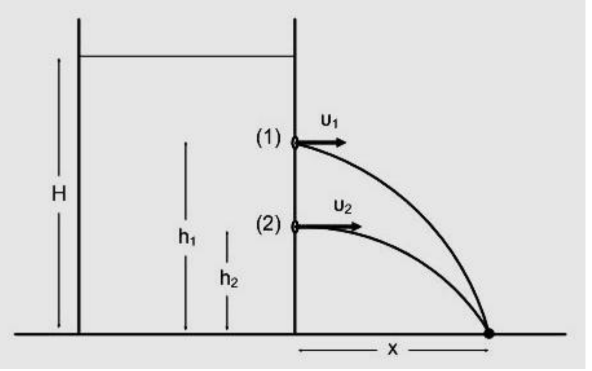
$$x = u_\Gamma t \xrightarrow{(1),(2)} \boxed{x = 2\sqrt{h(H-h)}} \qquad (3)$$

β) Το x γίνεται μέγιστο όταν η υπόριζη ποσότητα της εξίσωσης (3) μεγιστοποιείται. Επειδή το άθροισμα των h και H-h είναι σταθερό και ίσο με H, το γινόμενο h(H-h) γίνεται μέγιστο όταν οι δύο παράγοντες του γινομένου εξισώνονται. Συνεπώς:

$$h = H - h \Rightarrow \boxed{h = \frac{H}{2}}$$

8. Ένα δοχείο περιέχει νερό ύψους H = 80 cm και βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο δάπεδο. Ανοίγονται δύο οπές στο ίδιο πλευρικό τοίχωμα του δοχείου, σε ύψη h_1 = 50cm και h_2 από το δάπεδο και διαπιστώνουμε ότι το νερό που εκρέει από τις δύο οπές προσπίπτουν στο ίδιο σημείο του δαπέδου. Σε ποιο ύψος ανοίχθηκε η δεύτερη οπή;

Απάντηση



Σύμφωνα με το θεώρημα του Toricelli από τα σημεία (1) και (2), που ανοίγουμε τις οπές, το νερό θα εκτοξευθεί με ταχύτητες μέτρου:

$$u_1 = \sqrt{2g(H-h_1)} \qquad (1)$$

$$u_2 = \sqrt{2g(H-h_2)} \qquad (2)$$

Από το σημείο (1) και (2) το νερό εκτοξεύεται οριζόντια και σύμφωνα με τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής, ο χρόνος για να φθάσει στο δάπεδο ισούται με:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \qquad (3)$$

Οπότε, το βεληνεκές θα ισούται με:

$$x_1 = u_1 t \xrightarrow{(1),(3)} x_1 = 2\sqrt{h_1(H-h_1)} \qquad (4)$$

$$x_2 = u_2 t \xrightarrow{(2),(3)} x_2 = 2\sqrt{h_2(H-h_2)} \qquad (5)$$

Για να είναι ίδιο το βεληνεκές, πρέπει:

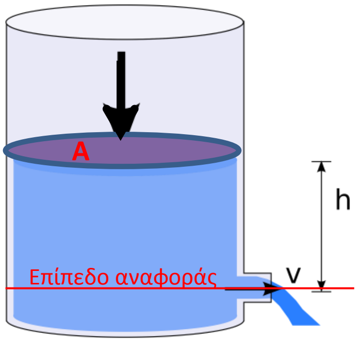
$$x_1 = x_2 \xrightarrow{(4),(5)} h_1(H-h_1) = h_2(H-h_2) \xrightarrow{h_1+h_2=H} 1500 = 80h_2 + h_2^2 \Rightarrow h_2^2 - 80h_2 + 1500 = 0$$

Από τη λύση του τριωνύμου προκύπτουν δύο ρίζες: *h_2 = 50 cm και h_2=30 cm,* που είναι και η δεκτή.

Η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν τα δύο ύψη είναι: *$h_1 + h_2 = H$.*

9. Ένα μεγάλο δοχείο περιέχει νερό πού στην ελεύθερη επιφάνεια του ασκείται πίεση $1{,}2 \cdot 10^5$ N/m^2. Στο κατακόρυφο τοίχωμα του δοχείου υπάρχει μία μικρή τρύπα σε βάθος 5m κάτω από την επιφάνεια τού νερού. Να υπολογιστεί ή ταχύτητα εκροής τού νερού. Δίνονται, η πυκνότητα τού νερού ρ = 10^3 kgr/m^3 , g = 10 m/s^2 και $P_0 = 10^5$ N/m^2 η ατμοσφαιρική πίεση.

Απάντηση



Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ της επιφάνειας του υγρού που συμπιέζεται και του στομίου εξαγωγής του:

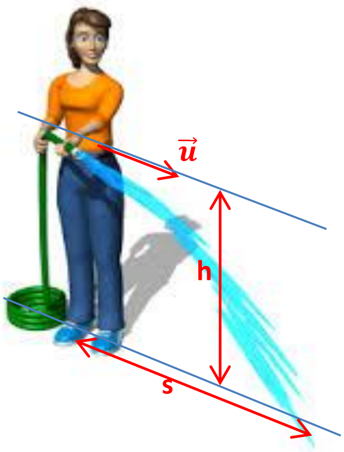
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P + P_o + \rho g h = P_o + \frac{1}{2}\rho u^2 \Rightarrow u = \sqrt{2\left(\frac{P}{\rho} + gh\right)} \qquad (1)$$

Η εξίσωση (1) προέκυψε από τη θεώρηση ότι η ταχύτητα με την οποία κατέρχεται το νερό στην επιφάνεια A είναι σχεδόν μηδενική σε σχέση με την ταχύτητα εξόδου από την οπή. Στην επιφάνεια A η πίεση προκύπτει από την ατμοσφαιρική P_o και του εξωτερικού παράγοντα, ενώ η πίεση στην οπή είναι μόνο η ατμοσφαιρική.

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει ότι $u \approx 18{,}44\ m/s$.

10. Ένας κηπουρός κρατάει σε ύψος h = 1 m πάνω από το έδαφος ένα λαστιχένιο σωλήνα, με διάμετρο δ = 2 cm, με τέτοιο τρόπο, ώστε το νερό να εκτοξεύεται οριζόντια από το στόμιο του σωλήνα. Το νερό συναντάει το έδαφος σε οριζόντια απόσταση s = 2m από το στόμιο τού σωλήνα. Να υπολογιστεί η παροχή τού σωλήνα. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Απάντηση

Το εμβαδόν διατομής του λάστιχου είναι:

$$A = \pi\frac{\delta^2}{4} = \pi \cdot 10^{-4} m^2 \qquad (1)$$

Από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής έχουμε:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

και

$$s = ut \overset{(2)}{\Longrightarrow} u = g\sqrt{\frac{g}{2h}} = 2\sqrt{5}\ \frac{m}{s} \qquad (3)$$

Συνεπώς:

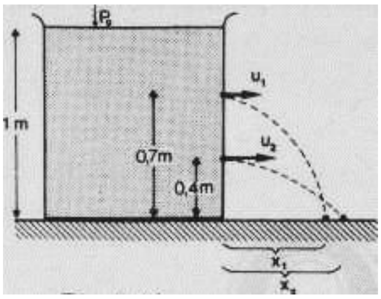
$$\Pi = Au \overset{(1)(3)}{\Longrightarrow} \boxed{\Pi = 1{,}405 \cdot 10^{-3}\frac{m^3}{s}}$$

11. Για την περίπτωση του σχήματος δίνεται ότι η πάνω οπή έχει εμβαδόν 1 cm², ενώ η κάτω έχει εμβαδόν 0,5 cm². Να υπολογιστούν:

α) Οι ταχύτητες εκροής u_1 και u_2.

β) Οι αποστάσεις x_1 και x_2

γ) Η ολική παροχή υγρού από τις δύο οπές. Δίνεται $g = 10\ m/s^2$.



Απάντηση

α) Από το θεώρημα Toricelli:

$$u_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (1 - 0{,}7)} = \sqrt{6}\frac{m}{s}$$

$$u_2 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot (1 - 0{,}4)} = 2\sqrt{3}\frac{m}{s}$$

β) Από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής:

$$s = ut \Rightarrow x_1 = u_1\sqrt{\frac{2y_1}{g}} = \sqrt{6}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}7}{10}} \approx 0{,}917\ m$$

$$s = ut \Rightarrow x_2 = u_2\sqrt{\frac{2y_2}{g}} = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}4}{10}} \approx 0{,}979\ m$$

γ) Από την εξίσωση της παροχής:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 = A_1u_1 + A_2u_2 \Rightarrow \Pi \approx 4{,}182 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}$$

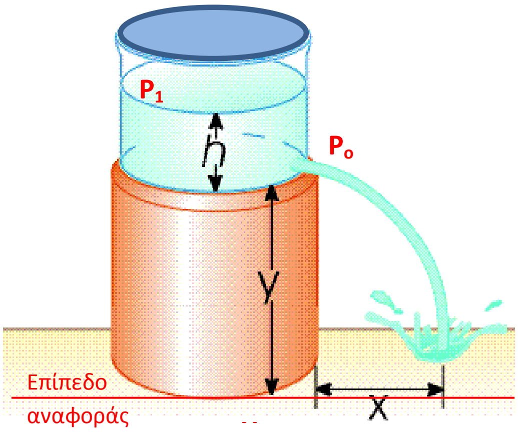
12. Ένα μεγάλο κλειστό δοχείο περιέχει νερό σε βάθος 5m. Ο αέρας πού υπάρχει πάνω από την επιφάνεια τού νερού είναι υπό πίεση $5 \cdot 10^5\ N/m^2$. Το δοχείο είναι τοποθετημένο πάνω σε μία οριζόντια επιφάνεια πού βρίσκεται σε ύψος 5m πάνω από το έδαφος. Ανοίγουμε μία τρύπα στο κατακόρυφο τοίχωμα τού δοχείου, ακριβώς πάνω από τη βάση του. Αν το εμβαδόν της τρύπας είναι 1 cm², να υπολογιστούν:

α) Η οριζόντια απόσταση του σημείου όπου το νερό συναντάει το οριζόντιο έδαφος, από την οπή.

β) Η οριζόντια δύναμη πού ασκείται στο δοχείο, εξαιτίας της εκτόξευσης τού νερού.
Δίνονται: πυκνότητα τού νερού $\rho = 10^3$ kgr/m^3, $g = 10$ m/s^2 και $P_0 = 10^5$ N/m^2 η ατμοσφαιρική πίεση.

Απάντηση

α) Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ της επιφάνειας του υγρού που συμπιέζεται και του στομίου εξαγωγής του:



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 + \rho g(y+h) = P_o + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \rho g y \xrightarrow{u_1 \to 0}$$

$$\Rightarrow P_1 - P_o + \rho g h = \frac{1}{2}\rho u^2 \Rightarrow u = \sqrt{2\left(\frac{P_1 - P_o}{\rho} + gh\right)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = 30\frac{m}{s} \qquad (1)$$

Από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής:

$$x = ut \Rightarrow x = u_1\sqrt{\frac{2y}{g}} = 30\sqrt{\frac{2\cdot 5}{10}} = 30\,m$$

β) Σε χρόνο Δt από το στόμιο εκτοξεύεται μάζα νερού Δm. Από τον ορισμό της πυκνότητας:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \Rightarrow \rho = \frac{\Delta m}{\Delta x\cdot A} \Rightarrow \rho = \frac{\Delta m}{u\cdot \Delta t\cdot A} \Rightarrow \Delta m = \rho\cdot u\cdot \Delta t\cdot A \qquad (1)$$

Η μεταβολή της ορμής της μάζας Δm, θεωρώντας εύλογα ότι αρχικά ήταν ακίνητη, είναι:

$$\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_{\tau\varepsilon\lambda}} - \overrightarrow{p_{\alpha\rho\chi}} = \Delta m\cdot u \overset{(1)}{\Longrightarrow} \Delta p = \rho\cdot u^2\cdot \Delta t\cdot A \qquad (2)$$

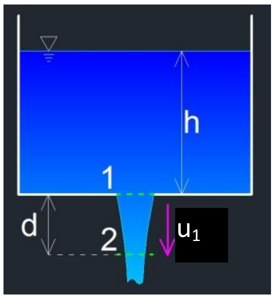
Η δύναμη που ασκήθηκε στη μάζα είναι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \overset{(2)}{\Longrightarrow} F = \rho\cdot u^2\cdot A = 90N$$

Από δράση - αντίδραση, τόση θα είναι και η δύναμη που θα ασκείται στο δοχείο.

13. Στον πυθμένα δοχείου, που είναι διαρκώς γεμάτο με ιδανικό ρευστό, ανοίγουμε οπή διαμέτρου $\delta_1 = 2$ cm, με συνέπεια το υγρό να αρχίζει να ρέει από την οπή με ταχύτητα μέτρου $u_1 = 5$ cm/s. Πόση θα είναι η διάμετρος της φλέβας 40 cm κάτω από τον πυθμένα του δοχείου; Δίνεται $g = 10$ m/s^2.

Απάντηση



Αφού το ρευστό είναι ιδανικό, ισχύει η εξίσωση της συνέχειας:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1u_1 = A_2u_2 \Rightarrow \pi\frac{\delta_1^2}{4}u_1 = \pi\frac{\delta_2^2}{4}u_2 \Rightarrow \delta_1^2u_1 = \delta_2^2u_2 \qquad (1)$$

Το ρευστό κατεβαίνει υπό την επίδραση του βάρους του και συνεπώς εκτελεί κίνηση ομαλά επιταχυνόμενη με αρχική ταχύτητα. Από τις εξισώσεις κίνησης ισχύει ότι:

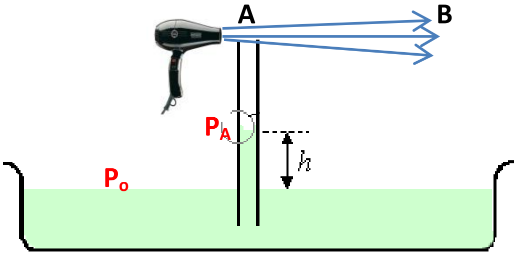
$$u_2 = \sqrt{u_1^2 + 2gd} \qquad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} \delta_1^2u_1 = \delta_2^2\sqrt{u_1^2+2gd} \Rightarrow \delta_2 = \frac{\sqrt{u_1}}{\sqrt[4]{u_1^2+2gd}}\delta_1 \Rightarrow \boxed{\delta_2 = 0{,}264\,cm}$$

14. Σε δοχείο, που είναι γεμάτο με υγρό πυκνότητας 0,78 g/cm^3, βυθίζουμε κατακόρυφο σωλήνα που είναι ανοικτός και από τα δύο άκρα. Στο άνω άκρο του σωλήνα πλησιάζουμε ηλεκτρικό πιστολάκι, που «σπρώχνει» τον αέρα, δημιουργώντας ρεύμα πυκνότητας 1,2 kg/m^3. Με ποια ταχύτητα πρέπει να κινείται το αέριο ρεύμα, ώστε εντός του σωλήνα να υψώνεται στήλη 10 cm;

Δίνονται: πυκνότητα τού νερού ρ = 10^3 kgr/m^3, g = 10 m/s^2 και P_0 = 10^5 N/m^2 η ατμοσφαιρική πίεση.

Απάντηση



Η φλέβα του αέρα διευρύνεται καθώς απομακρύνεται από το Α προς το Β και κατά συνέπεια η ταχύτητα του αέρα θα ελαττώνεται. Θεωρούμε δύο νοητές διατομές της φλέβας, τη μία στο Α, πάνω από το στόμιο του σωλήνα και την άλλη στο Β, σε μεγάλη απόσταση από το Α και πρακτικά σημείο όπου η ταχύτητα του αέρα έχει μηδενιστεί και η πίεση είναι η ατμοσφαιρική.

Εφαρμόζοντας το νόμο του Bernoulli για τις δύο διατομές, έχουμε:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 + \rho g h_A = P_B + \frac{1}{2}\rho u_B^2 + \rho g h_B \xRightarrow{h_A=h_B} P_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 = P_B \Rightarrow$$

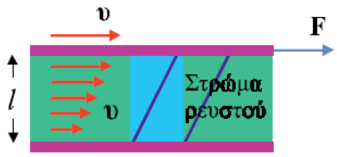
$$\xRightarrow{P_B=P_o} u_a = \sqrt{\frac{2(P_o - P_A)}{\rho}} \qquad (1)$$

Η πίεση στην επιφάνεια του υγρού στο δοχείου είναι η ατμοσφαιρική (P_o), ενώ στην επιφάνεια του υγρού στο σωλήνα είναι P_A, μιας και εκεί το υγρό ισορροπεί. Συνεπώς:

$$P_o = P_A + \rho_\upsilon g h \qquad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} u_a = \sqrt{\frac{2\rho_\upsilon g h}{\rho}} \Rightarrow u_a = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}78 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}1}{1{,}2}} \Rightarrow \boxed{u_a = 36\ \frac{m}{s}}$$

15. Δύο λεπτά στρώματα γλυκερίνης, που ή μεταξύ τους απόσταση είναι ℓ = 4 mm, κινούνται με ταχύτητες u_1= 4 cm/s και u_2 = 3 cm/s. Αν κάθε στρώμα έχει επιφάνεια εμβαδού A = 10 cm^2, να υπολογιστεί ή δύναμη εσωτερικής τριβής πού αναπτύσσεται μεταξύ των δύο στρωμάτων. Δίνεται, η = 0,83 N ·s · m^{-2} ό συντελεστής εσωτερικής τριβής της γλυκερίνης.

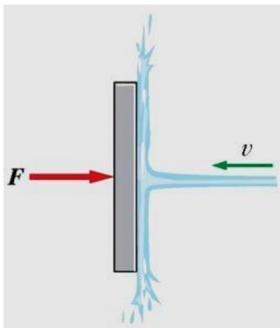


Απάντηση

Για τη δύναμη εσωτερικής τριβής ισχύει ότι:

$$T = \eta A \frac{\Delta u}{\ell} \Rightarrow T = \eta A \frac{u_2 - u_1}{\ell} \Rightarrow \boxed{T = 2{,}075 \cdot 10^{-3} N}$$

16. Φλέβα νερού, με διάμετρο διατομής δ = 2 cm, προσπίπτει κάθετα σε ακλόνητο κατακόρυφο τοίχο, με ταχύτητα μέτρου u = 15 m/s. Το νερό μετά την πρόσπτωση κινείται παράλληλα προς της επιφάνεια. Ποια η δύναμη που ασκείται από τη φλέβα νερού στον τοίχο; Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ = 10^3 kgr/m^3.



Απάντηση

Το εμβαδόν διατομής της φλέβας νερού είναι:

$$A = \pi \frac{\delta^2}{4} \qquad (1)$$

Η ποσότητα του νερού που προσπίπτει στην επιφάνεια σε χρόνο Δt είναι:

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \xRightarrow{\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot u \cdot \Delta t} \Delta m = \rho \cdot A \cdot u \cdot \Delta t \qquad (2)$$

Η ορμή με την οποία προσπίπτει η δέσμη νερού στον τοίχο είναι:

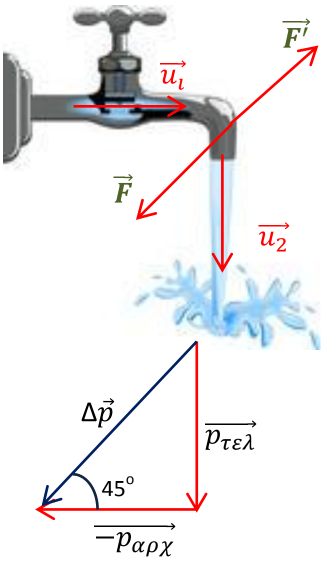
$$\vec{p} = \Delta m \cdot u \xRightarrow{(2)} p = \Delta m \cdot \rho \cdot A \cdot u^2 \cdot \Delta t \xRightarrow{(1)} p = \frac{1}{4}\pi \cdot \delta^2 \cdot \rho \cdot u^2 \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Μετά την πρόσκρουση το νερό κινείται σε κατακόρυφη διεύθυνση και συνεπώς δεν υπάρχει ορμή στην αρχική οριζόντια διεύθυνση της ροής της φλέβας. Αν θεωρήσουμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά έχουμε:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{0-\vec{p}}{\Delta t} \overset{(3)}{\Longrightarrow} F = \frac{1}{4}\pi\cdot\delta^2\cdot\rho\cdot u^2 \Rightarrow \boxed{F = 70{,}69\ N}$$

17. Η παροχή μιας κάνουλας (βρύσης) είναι Π. Αν η διατομή της κάνουλας είναι Α, να προσδιορισθεί η δύναμη που ασκείται από το νερό στην κάνουλα. Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ.

Απάντηση



Το νερό στο οριζόντιο τμήμα της βρύσης έχει ταχύτητα $\vec{u_1}$ και στο στόμιο εξαγωγής ταχύτητα $\vec{u_2}$. Τα μέτρα των δύο ταχυτήτων είναι ίσα, καθώς η παροχή είναι σταθερή. Οι αντίστοιχες ορμές θα έχουν ίσα μέτρα και θα σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 90°. Η μεταβολή της ορμής που υφίσταται η φλέβα του νερού, καθώς αλλάζει διεύθυνση θα είναι:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p_{\tau\varepsilon\lambda}} - \vec{p_{\alpha\rho\chi}} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{p_{\alpha\rho\chi}^2 + p_{\tau\varepsilon\lambda}^2} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{2p_{\alpha\rho\chi}^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta p = \sqrt{2}p_{\alpha\rho\chi} \Rightarrow \Delta p = \sqrt{2}\,\Delta m\cdot u_1 \qquad (1)$$

Τα τοιχώματα της βρύσης ασκούν δύναμη στο νερό:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \overset{(1)}{\Longrightarrow} F = \frac{\sqrt{2}\,\Delta m\cdot u_1}{\Delta t} \xRightarrow{\Delta m = \rho\cdot\Delta V} F = \sqrt{2}\cdot\rho\cdot\frac{\Delta V}{\Delta t}\cdot u_1 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\Pi = A\cdot u_1} F = \sqrt{2}\cdot\rho\cdot\Pi\cdot\frac{\Pi}{A} \Rightarrow \boxed{F = \sqrt{2}\cdot\frac{\rho\Pi^2}{A}}$$

Από δράση – αντίδραση, το νερό ασκεί δύναμη $\vec{F'}$, που είναι ίση και αντίθετη της δύναμης $\vec{F}$.

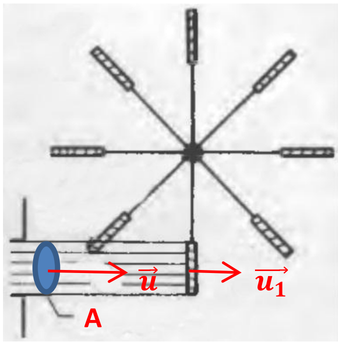
18. Οριζόντια φλέβα νερού, διατομής Α = 0,1 m^2 και ταχύτητας u = 6 m/s, προσπίπτει στα πτερύγια υδραυλικού τροχού, με εμβαδόν πτερυγίου S > α. Κάθε πτερύγιο περιστρέφεται με σταθερή γραμμική ταχύτητα μέτρου u_1 = 3 m/s. Να υπολογιστούν:

α. Η δύναμη που ασκείται σε κάθε πτερύγιο του τροχού, θεωρώντας ότι το νερό προσπίπτει κάθετα στα πτερύγια.

β. Την ισχύ, και

γ. το συντελεστή απόδοσης της διάταξης.

Απάντηση



Σε κάθε πτερύγιο προσπίπτει ανά δευτερόλεπτο μάζα νερου ίση με:

$$\Delta m = \rho\cdot\Delta V\cdot\Delta t \xRightarrow{\Delta V = A\cdot\Delta x = A\cdot u\cdot\Delta t} \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho\cdot A\cdot u \qquad (1)$$

Το νερό τελικά κινείται με ταχύτητα ίση με την ταχύτητα κίνησης των πτερυγίων, μέτρου u_1. Η μεταβολή της ταχύτητας που υφίσταται η φλέβα του νερού είναι κατά μέτρο u – u_1. Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής έχουμε ότι:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta m\cdot\Delta u}{\Delta t} \overset{(1)}{\Longrightarrow} F = \rho\cdot A\cdot u(u-u_1) \Rightarrow \boxed{F = 1800\ N} \qquad (2)$$

Η ισχύς του τροχού είναι: $P = F\cdot u \Rightarrow P = 1800\cdot 3 \Rightarrow \boxed{P = 5400\ W}$ (3)

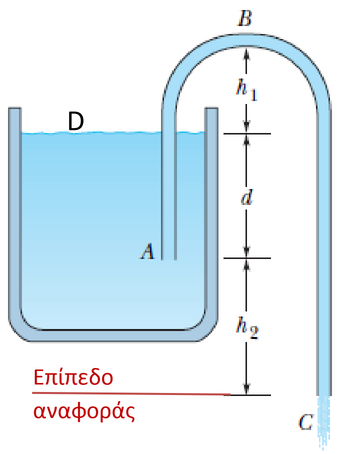
Το νερό προσπίπτει με κινητική ενέργεια $\Delta K = \frac{1}{2}\Delta m\cdot u^2$ και με ισχύ:

$$P_v = \frac{\Delta K}{\Delta t} \Rightarrow P_v = \frac{1}{2}\frac{\Delta m\cdot u^2}{\Delta t} \overset{(1)}{\Longrightarrow} P_v = \frac{1}{2}\rho\cdot A\cdot u^3 \Rightarrow P_v = \frac{1}{2}\ 10^3\cdot 0{,}1\cdot 6^3 \Rightarrow P_v = 10800\ W \qquad (3)$$

Η απόδοση της διάταξης είναι:

$$e = \frac{P}{P_v} = \frac{5400}{10800} = 0{,}5 \ \text{ή} \ \boxed{50\%}$$

19. Το γειτονικό σχήμα απεικονίζει ένα σιφώνιο, συσκευή που χρησιμοποιείται για την εξαγωγή υγρών από δοχεία. Ο σωλήνας ABC αρχικά γεμίζει με το υγρό και ακολούθως αυτό ρέει μέσω του σωλήνα μέχρις ότου η επιφάνεια του υγρού στο δοχείο να φθάσει στο σημείο A, όπου και το στόμιο εισαγωγής του σωλήνα. Το υγρό έχει πυκνότητα 1000 kg/m^3 και αγνοήσιμο ιξώδες. Οι αποστάσεις του σχήματος είναι h_1 = 25 cm, d = 12 cm και h_2 = 40 cm.



α. Ποια η ταχύτητα εκροής του υγρού από το στόμιο C;

β. Εάν η ατμοσφαιρική πίεση είναι $P_o = 10^5$ N/m^2, πόση είναι η πίεση του υγρού στο σημείο B, όπου ο σωλήνας καμπυλώνει στο μέγιστο ύψος του;

γ. Ποιο είναι θεωρητικά το μέγιστο ύψος h_1 που δύναται το σιφώνιο να ανυψώσει το υγρό;

Απάντηση

α. Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ ενός σημείου D της επιφάνειας του υγρου στο δοχείο και του στομίου εξαγωγής C:

$$P_D + \frac{1}{2}\rho u_D^2 + \rho g h_D = P_C + \frac{1}{2}\rho u_C^2 + \rho g h_C \Rightarrow u_C = \sqrt{\frac{2(P_D - P_C)}{\rho} + 2g(h_D - h_C) + u_D^2} \quad (1)$$

Οι δύο πιέσεις στα σημεία C και D είναι ίσες με την ατμοσφαιρική, ενώ η ταχύτητα u_D της καθόδου της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στο δοχείο μπορεί να θεωρηθεί αγνοήσιμη σε σχέση με την ταχύτητα εκροής u_C, καθώς η διατομή του σωλήνα είναι πολύ μικρότερη της διατομής του δοχείου. Με ικανοποιητική προσέγγιση καταλήγουμε ότι:

$$(1) \rightarrow u_C = \sqrt{2g(h_D - h_C)} \Rightarrow u_C \approx \sqrt{2g(d + h_2)} \Rightarrow \boxed{u_C = 3{,}2\ \frac{m}{s}}$$

β. Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ του σημείου B στην κορυφή της καμπύλωσης του σωλήνα και του στομίου εξαγωγής C:

$$P_B + \frac{1}{2}\rho u_B^2 + \rho g h_B = P_C + \frac{1}{2}\rho u_C^2 + \rho g h_C \Rightarrow P_B = P_C + \rho g(h_C - h_B) \Rightarrow$$

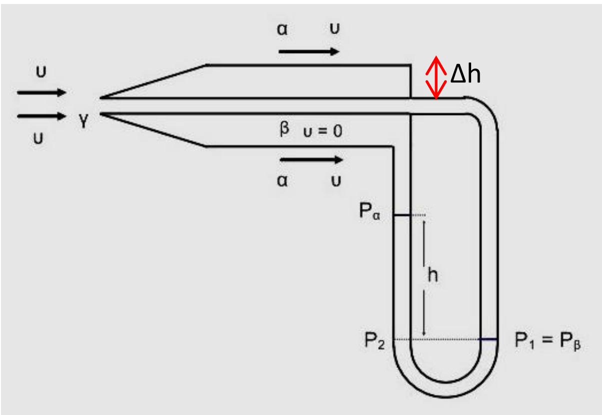
$$\Rightarrow P_B = P_C - \rho g(h_1 + h_2 + d) \Rightarrow P_B = 9{,}2 \cdot 10^4\ Pa$$

γ. Πρέπει $P_B \geq 0$, οπότε:

$$P_C - \rho g(h_1 + h_2 + d) \geq 0 \Rightarrow \frac{P_C}{\rho g} \geq h_1 + h_2 + d \Rightarrow h_1 \leq \frac{P_C}{\rho g} - d - h_2 \Rightarrow \boxed{h_1 \leq 10{,}3\ m}$$

Συνεπώς το μέγιστο θεωρητικό ύψος είναι στα 10,3 m.

20. **Σωλήνας Pitot.** Για τη μέτρηση της ταχύτητας στα αεροπλάνα, σε σχέση με τον αέρα, χρησιμοποιείται ο σωλήνας Pitot. Θεωρώντας ότι η ταχύτητα του αέρα είναι μηδενική στο σημείο B (εξαιρετική προσέγγιση), να αποδειχθεί ότι η ταχύτητα στο σημείο A δίνεται από τη σχέση:



$$u_A = \sqrt{\frac{2\rho_u g h}{\rho}}$$

Όπου: ρ_u η πυκνότητα του υδραργύρου, ρ η πυκνότητα του αέρα και h η διαφορά στάθμης του υδραργύρου στο σωλήνα U.

Απάντηση

Ο σωλήνας Pitot είναι συσκευή μέτρησης της ταχύτητας του αέρα. Τοποθετείται με τρόπο ώστε το άνοιγμα (γ) να είναι παράλληλο προς το ρεύμα του αέρα, ενώ τα σημεία (α) και (β) βρίσκονται μακριά από το σημείο εισόδου του ρεύματος αέρα (γ). Έτσι, η κανονική ροή του αέρα, που έχει διαταραχθεί στο σημείο (γ), λόγω κάποιου πυκνώματος, αποκαθίσταται στο σημείο (α) και η ταχύτητα του αέρα είναι η κανονική, χωρίς αλλοίωση. Στο σημείο (β) η ταχύτητα του αέρα έχει σχεδόν μηδενιστεί, σε σχέση με την ταχύτητα εισαγωγής στο σημείο (γ).

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ της επιφάνειας του υγρού που συμπιέζεται και του στομίου εξαγωγής του:

$$P_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 + \rho g h_1 = P_B + \frac{1}{2}\rho u_B^2 + \rho g h_2 \Rightarrow P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 + \rho g(h_1 - h_2) \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{h_2 - h_1 = \Delta h \to 0} P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho u_A^2 \Rightarrow u_A = \sqrt{\frac{2(P_B - P_A)}{\rho}} \qquad (1)$$

Όπως μπορούμε να δούμε από το σχήμα:

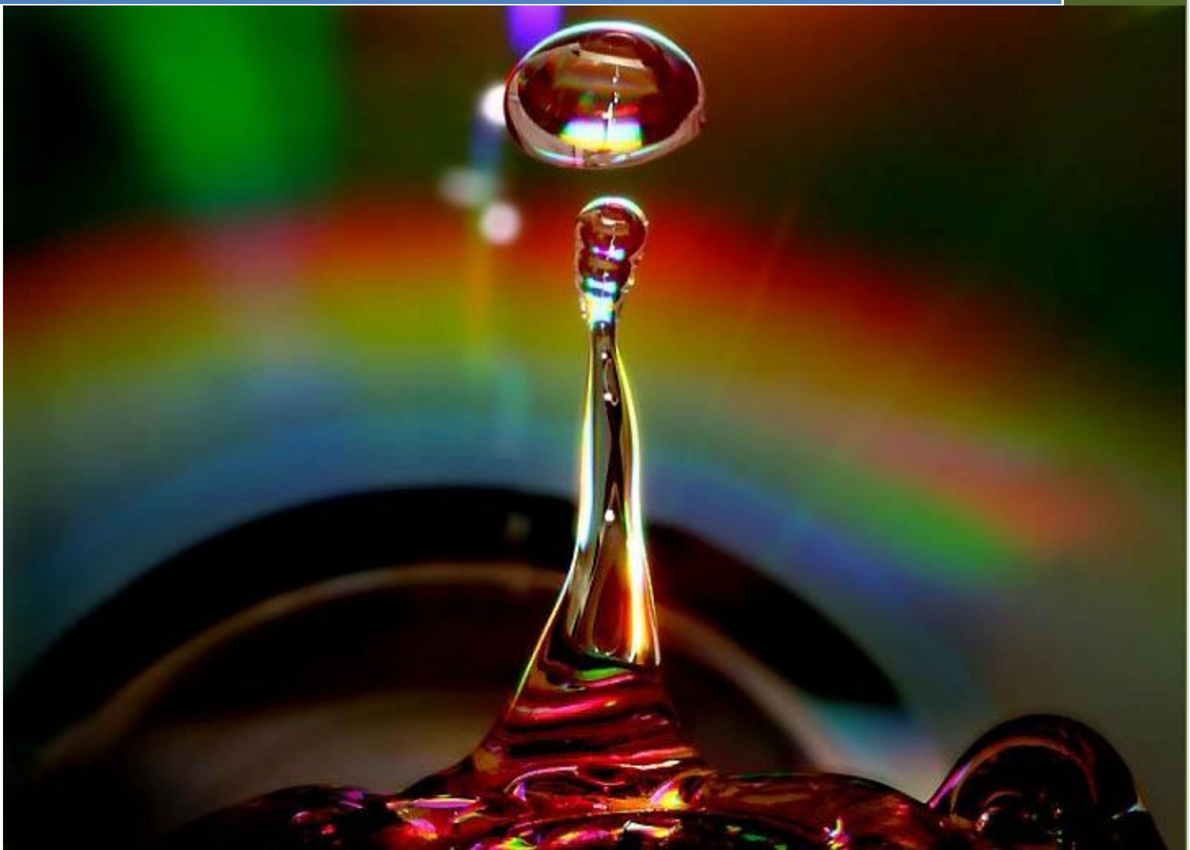
$$P_B = P_A + \varepsilon_\upsilon \cdot h \Rightarrow P_B - P_A = \rho_\upsilon \cdot g \cdot h \qquad (2)$$

$$(1) \xrightarrow{(2)} u_B = \sqrt{\frac{2\rho_\upsilon g h}{\rho}}$$

Βιβλιογραφία

1. Αθανασάκης Ι, *Μεθοδολογία των Ασκήσεων Φυσικής,* τόμος α', ιδία έκδοση, Αθήνα, χ.χ.
2. Βλάχος Ι., Κουγιουμτζόπουλος Η., *Φυσική Ασκήσεις,* τόμος 2, εκδ. Gutenberg, Αθήνα, 1976
3. Δρης Εμ., Ανδρακάκος Κ., Βελέντζας Α., Διαμαντής Ν., Κρίκος Κ., Πιερράκος Ν., *Φυσική Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου,* Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, Αθήνα, 2008
4. Μακρής Α, Σπηλιόπουλος Γ., *Ασκήσεις Φυσικής,* τεύχος Α', ιδία έκδοση, Αθήνα, 1971
5. Φωτεινόπουλος Β., *Φυσική, Μηχανική 1,* εκδ. Βλάσση, Αθήνα, χ.χ.
6. Χατζηαναγνώστου Σ., *Ασκήσεις στην ύλη Επιλογής,* τόμος 2, ιδία έκδοση, Αθήνα,1981
7. Halliday D., Resnick R. , Walker J., *Fundamentals of Physics,* 9th ed., Wiley, N.Y., 2011
8. Young D. H., *Πανεπιστημιακή Φυσική*, τόμος Α', εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 1994

Κι άλλες…20 λυμένες ασκήσεις στα Ρευστά



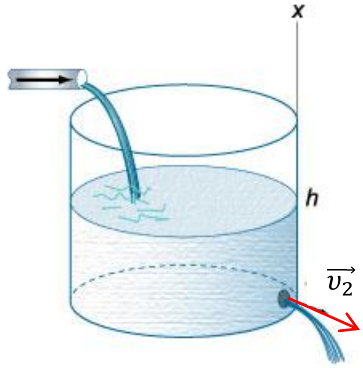
Μιχάλης Πετρόπουλος

2015-2016

ΚΙ ΑΛΛΕΣ … 20 ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ***Πόσο γεμίζει;…*** Μια δεξαμενή γεμίζει νερό από βρύση σταθερής παροχής Π = 0,6 m^3/mn. Στον πυθμένα της δεξαμενής υπάρχει οπή διατομής Α = 0,1 dm^2. Μέχρι ποιο ύψος θα φτάσει το νερό στη δεξαμενή. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση



Το νερό στη δεξαμενή θα φθάσει μέχρι το ύψος εκείνο όπου η ποσότητα του νερού που παρέχεται από τη βρύση θα ισούται με την ποσότητα του νερού που εξέρχεται από την οπή.

Από την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ της επιφάνειας της δεξαμενής και της οπής έχουμε ότι:

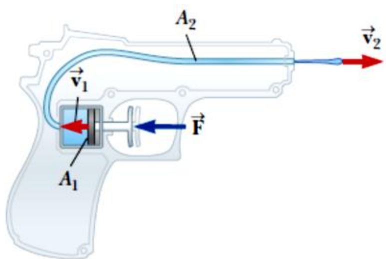
$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow \Pi_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_2 = \frac{\Pi}{A} \Rightarrow \boxed{u_2 = 10\frac{m}{s}} \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε το νόμο του Bernoulli μεταξύ των δύο διατομών A_1 (επιφάνεια δεξαμενής) και A_2 (επιφάνεια οπής), λαμβάνοντας ως επίπεδο αναφοράς της υψομετρικής πίεσης το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από την οπή. Έτσι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \xrightarrow{h_1=h\,,h_2=0} h = \frac{\upsilon_2^2}{2g} \Rightarrow \boxed{h = 5\,m}$$

Οι πιέσεις στα δύο σημεία είναι ίσες με την ατμοσφαιρική ($P_1 = P_2 = P_o$), ενώ η ταχύτητα υ_1=0, καθώς η στάθμη του νερού διατηρείται σταθερή. Ουσιαστικά καταλήξαμε στο θεώρημα του Torricelli.

2. ***Παιδικά (;) παιχνίδια…*** Στα νεροπίστολα ένα έμβολο κινεί το νερό από ένα μεγάλο σωλήνα διατομής A_1 σε ένα μικρότερο σωλήνα διατομής A_2, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η ακτίνα του μεγάλου σωλήνα είναι 1cm, ενώ εκείνη του μικρού σωλήνα 1 mm. Ο μικρότερος σωλήνας βρίσκεται 3 cm πάνω από το μεγαλύτερο σωλήνα.



α) Εάν το πιστόλι κρατείται οριζόντια και σε ύψος 1,5 m, πόσος χρόνος απαιτείται για το νερό για να φθάσει από το ακροφύσιο στο έδαφος; Να αγνοηθεί αντίσταση του αέρα.

β) Αν το επιθυμητό βεληνεκές είναι 8,00 m, με ποια ταχύτητα υ_2 πρέπει το νερό να εκτοξευθεί από το ακροφύσιο;

γ) Με ποια ταχύτητα υ_1 πρέπει το έμβολο A_1 να κινηθεί, προκειμένου να επιτευχθεί το επιθυμητό βεληνεκές;

(δ) Ποια είναι η πίεση στην ακροφύσιο;

ε) Ποια η πίεση που αναπτύσσεται στο μεγαλύτερο σωλήνα.

στ) Πόση δύναμη πρέπει να ασκηθεί στη σκανδάλη για να επιτευχθεί το επιθυμητό βεληνεκές;

Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση P_o=1,013·10^5 N/m^2, g = 9,8 m/s^2 και ρ=10^3kg/m^3.

Απάντηση

α) Από τις εξισώσεις της οριζόντιας βολής έχουμε ότι ο χρόνος για να φθάσει το νερό στο έδαφος είναι:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \boxed{t = 0{,}553\,s} \quad (1)$$

β) Από την εξίσωση του βεληνεκούς στην οριζόντια βολή λαμβάνουμε:

$$s = \upsilon_2 \cdot t \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{s}{t} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 14{,}47\,\frac{m}{s}} \quad (2)$$

γ) Από την εξίσωση συνεχείας έχουμε:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_2}{A_1} u_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_1^2}\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 \upsilon_2 \Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 0{,}145\frac{m}{s}} \quad (3)$$

δ) Το ακροφύσιο είναι άμεση επαφή με την ατμόσφαιρα. Συνεπώς: P_2=P_o= $1{,}013\cdot10^5$ N/m^2 (4)

ε) Από την εξίσωση του Bernoulli και με επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το μέσο του μεγάλου δοχείου:

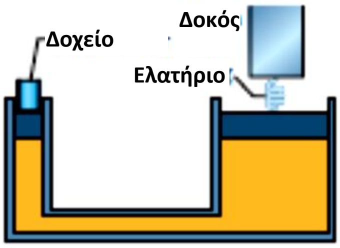
$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \rho g(h_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_1 = 2{,}063\cdot 10^5\ \ Pa} \quad (5)$$

στ) Από τον ορισμό της πίεσης:

$$P = \frac{F_1}{A_1} \Rightarrow F_1 = PA_1 \Rightarrow F_1 = (P_1 - P_o)A_1 \Rightarrow \boxed{F_1 = 32{,}99\ N} \quad (6)$$

3. ***Και ο Hooke στην παρέα***... Στο διπλανό σχήμα το ελατήριο έχει σταθερά $3\cdot10^4$ N/m και βρίσκεται προσδεμένο μεταξύ μιας άκαμπτης δοκού στο ένα του άκρο και του μεγάλου εμβόλου ενός υδραυλικού πιεστηρίου στο άλλο του. Ένα κενό δοχείο αμελητέα μάζας τοποθετείται στο έμβολο εισόδου (μικρό έμβολο). Το έμβολο εισόδου έχει επιφάνεια A_i, και η έμβολο εξόδου έχει εμβαδόν $18A_1$. Αρχικά το ελατήριο βρίσκεται στο φυσικό του μήκος. Πόσα κιλά άμμου πρέπει να είναι ρίξουμε με αργό ρυθμό μέσα το δοχείο, ώστε να συμπιεστεί το ελατήριο κατά 5 cm; Δίνεται g = 10 m/s^2.



Απάντηση

Για να συμπιεστεί το ελατήριο κατά 5 cm, τη στιγμή που το ένα του άκρο είναι ακλόνητο, πρέπει το μεγάλο έμβολο να ανυψωθεί κατά το ίδιο ποσό. Τότε το ελατήριο θα ασκεί δύναμη στο έμβολο προς τα κάτω ίση με $F_{\varepsilon\lambda} = k\cdot\Delta\ell = 3\cdot10^4\cdot5\cdot10^{-2} = 1500\ N \quad (1)$

Το έμβολο θα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, οπότε με τη σειρά του θα ασκεί δύναμη μέτρου $F_2 = 1500\ N$ προς τα πάνω.

Από την αρχή του Pascal για το υδραυλικό μας πιεστήριο έχουμε:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow \frac{mg}{A_1} = \frac{F_2}{18A_1} \Rightarrow m = \frac{F_2}{18g} \Rightarrow \boxed{m = 8{,}33\ kg}$$

4. ***Πόσο ψηλά;...*** Ένα βαρέλι είναι γεμάτο με νερό και σε βάθος h_1=0.80 m κάτω από την επιφάνεια του νερού πυθμένα έχει μια ένα σωλήνα εξαγωγής του νερού με κάνουλα.

α) Όταν ο σωλήνας εξαγωγής είναι οριζόντιος και η κάνουλα έχει κατακόρυφο στόμιο, πόσο γρήγορα εξέρχεται το νερό;

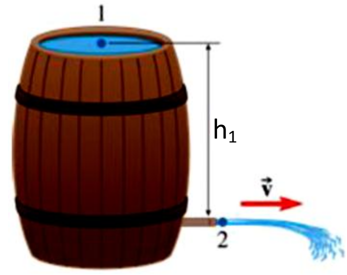
β) Εάν η κάνουλα έχει το στόμιο προς τα πάνω, πόσο ψηλά θα φθάσει το σιντριβάνι του νερού που θα δημιουργηθεί;

Το νερό να θεωρηθεί ως ιδανικό ρευστό. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση

Το νερό στην επιφάνεια του βαρελιού βρίσκεται υπό ατμοσφαιρική πίεση. Το νερό που εκρέει από την κάνουλα είναι επίσης υπό ατμοσφαιρική πίεση, δεδομένου ότι είναι σε επαφή με τον αέρα. Ως επίπεδο αναφοράς για τη λύση θα θεωρήσουμε το οριζόντιο επίπεδο που διέρχεται από το σωλήνα εξαγωγής.

α) Εφαρμόζουμε του Bernoulli εξίσωση σε δύο σημεία: 1 σημείο στην επιφάνεια του νερού και το σημείο 2 που το ρεύμα του νερού εκρέει:



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{P_1=P_2,\, h_2=0} \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad (1)$$

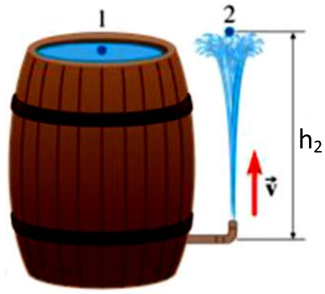
Από το νόμο της συνέχειας μεταξύ των σημείων (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{A_2}{A_1}\upsilon_2 \xRightarrow{A_1 \ll A_2} \upsilon_1 \to 0 \quad (2)$$

$$(1) \overset{(2)}{\Rightarrow} \upsilon_2 = \sqrt{2gh_1} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2 = 4\frac{m}{s}} \quad (3)$$

Πρακτικά, ξαναδείξαμε το θεώρημα του Toricelli.

β) Εφαρμόζουμε του Bernoulli εξίσωση σε δύο σημεία: 1 σημείο στην επιφάνεια του νερού και το σημείο 2, που το ρεύμα του νερού φθάνει στο μέγιστο ύψος του. Τότε:

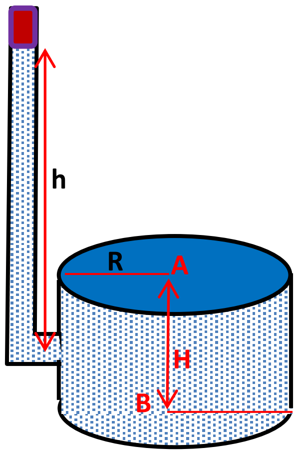


$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{P_1=P_2, \upsilon_1=\upsilon_2=0} \rho g h_1 = \rho g h_2 \Rightarrow \boxed{h_1 = h_2} \quad (4)$$

Αυτό που μας δείχνει η (4) είναι ότι το σιντριβάνι θα φθάσει μέχρι την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στο βαρέλι!!! Στην πράξη, λόγω τριβών, ιξώδους, αντίστασης του αέρα φθάνει λίγο χαμηλότερα.

5. ***Δυνάμεις…*** Στο διπλανό υδραυλικό σύστημα ο κατακόρυφος λεπτός σωλήνας έχει ακτίνα r=2 cm και ύψος μεγαλύτερο από ένα μέτρο. Το κυλινδρικό δοχείο είναι κλειστό, έχει ύψος H=60 cm και ακτίνα βάσης R=10 cm. Ο σωλήνας είναι συνδεδεμένος στο μέσον του δοχείου. Το υδραυλικό σύστημα γεμίζει με νερό μέχρι ότου το ύψος του νερού μέσα στον κατακόρυφο λεπτό σωλήνα να γίνει ίσο με h=100cm μέσα στο σωλήνα και στη συνέχεια φράσσεται με κινούμενο έμβολο το οποίο μάζας m=2 kg. Να υπολογίσετε:



(α) Τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στη βάση A του κυλινδρικού δοχείου.

(β) Τη δύναμη που ασκεί το ρευστό στη βάση B του κυλινδρικού δοχείου.

Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $P_o = 10^5$ N/m^2, g = 10 m/s^2 και ρ=10^3kg/m^3.

Απάντηση

Στο κινούμενο έμβολο ασκείται η ατμοσφαιρική πίεση P_o.

Η πίεση που ασκείται από το έμβολο λόγω του βάρους του είναι:

$$P_{\varepsilon\mu} = \frac{w}{A} \Rightarrow P_{\varepsilon\mu} = \frac{mg}{\pi r^2} \Rightarrow P_{\varepsilon\mu} \approx 15915\ Pa \quad (1)$$

Στη βάση A, εκτός της ατμοσφαιρικής πίεσης και της πίεσης από το βάρος του εμβόλου, ασκείται και η υδροστατική πίεση, που οφείλεται στο νερό που βρίσκεται υψομετρικά πάνω από το επίπεδο της βάσης A και η οποία είναι:

$$P_{\upsilon\delta(A)} = \rho \cdot g \cdot \left(h - \frac{H}{2}\right) = 10^3 \cdot 10 \cdot 0{,}7 = 7000\ Pa \quad (2)$$

Ως επίπεδο αναφοράς λαμβάνουμε το επίπεδο επί του οποίου βρίσκεται η βάση B.

Με το ίδιο σκεπτικό, στη βάση B η υδροστατική πίεση είναι:

$$P_{\upsilon\delta(A)} = \rho \cdot g \cdot \left(h + \frac{H}{2}\right) = 10^3 \cdot 10 \cdot 1{,}3 = 13000\ Pa \quad (3)$$

Η ολική πίεση στη βάση A είναι:

$$P_A = P_o + P_{\varepsilon\mu} + P_{\upsilon\delta(A)} \Rightarrow P_A = 122915\ Pa \quad (4)$$

Και η ασκούμενη δύναμη στην επιφάνεια α είναι:

$$F_A = P_A \cdot A_A \Rightarrow F_A = P_A \cdot \pi R^2 \Rightarrow \boxed{F_A = 3861{,}5\ N}$$

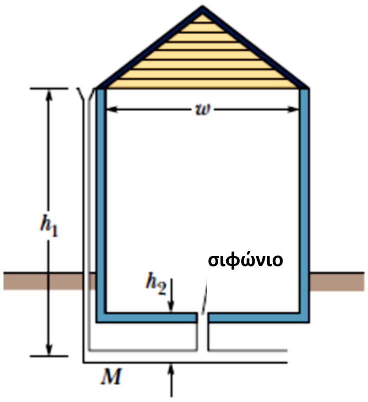
Η ολική πίεση στη βάση Α είναι:

$$P_B = P_o + P_{\varepsilon\mu} + P_{\upsilon\delta(B)} \Rightarrow P_A = 128915\ Pa \quad (4)$$

Και η ασκούμενη δύναμη στην επιφάνεια α είναι:

$$F_B = P_B \cdot A_B \Rightarrow F_B = P_B \cdot \pi R^2 \Rightarrow \boxed{F_A = 4364{,}1\ N}$$

6. ***Επειγόντως την Πυροσβεστική…*** Ένα πολύ απλοποιημένο διάγραμμα αποστράγγισης ομβρίων υδάτων μιας οικίας φαίνεται στο σχήμα. Η βροχή ρέει πάνω στην κεκλιμένη στέγη και εισάγεται σε υδρορροές γύρω από την άκρη της οροφής. Τα νερά ακολουθούν τη διαδρομή του αγωγού αποστράγγισης Μ μέσα στο υπόγειο, ο οποίος μεταφέρει το νερό σε ένα ακόμη μεγαλύτερο σωλήνα κάτω από το δρόμο. Στο σχήμα βλέπουμε και ένα σιφώνιο απορροής στο δάπεδο του υπογείου, που καταλήγει και αυτό στο σωλήνα Μ. Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν τα εξής:



1. οι υδρορροές έχουν ύψος h_1 = 11 m.
2. το σιφώνιο του υπογείου έχει ύψος h_2 = 1,2 m.
3. Ο αγωγός αποστράγγισης Μ έχει ακτίνας διατομής R = 3 cm.
4. Το σπίτι έχει πλάτος w = 30 m και μήκος ℓ = 60 m.
5. Όλο το νερό της βροχής που πέφτει στη σκεπή διοχετεύεται στις υδρορροές κι ακολούθως στον αγωγό Μ.
6. Η αρχική ταχύτητα του νερού σε όταν εισέρχεται στον αγωγό Μ είναι αμελητέα.
7. Η ταχύτητα του ανέμου είναι αμελητέα (η βροχή πέφτει κατακόρυφα).

Το ερώτημα: σε ποιο ρυθμό βροχόπτωσης, σε εκατοστόμετρα ανά ώρα, απειλείται το υπόγειο να κατακλυστεί από τα όμβρια ύδατα, καθώς θα ανέλθουν από το σιφώνιο; Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση

Θέτουμε ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο τμήμα του αγωγού Μ που βρίσκεται στο υπέδαφος. Θα εφαρμόσουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ της εισόδου της κατακόρυφης υδρορροής και της εισόδου του σιφωνίου του υπογείου στο δάπεδο αυτού. Είναι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_2 = 14\frac{m}{s} \quad (1)$$

καθώς εύλογα θεωρήσαμε ότι η πίεση στην είσοδο της υδρορροής και η πίεση στο δάπεδο του υπογείου είναι ίσες με την ατμοσφαιρική.

Από την εξίσωση συνεχείας μεταξύ της σκεπής και του αγωγού απορροής Μ έχουμε:

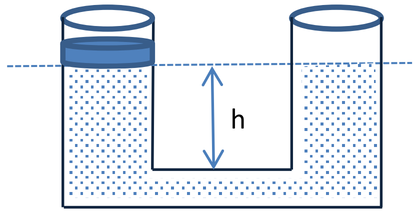
$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{A_2}{A_1}u_2 \Rightarrow u_1 = \frac{\pi R^2}{w \cdot \ell}u_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = 2{,}2 \cdot 10^{-5}\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{u_1 = 7{,}92\ \frac{cm}{h}}$$

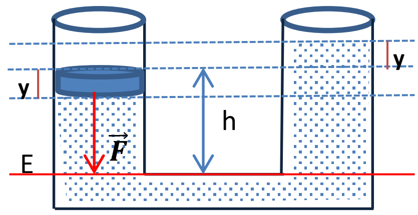
Κάπως έτσι μπορούμε να καταλάβουμε μία από τις αιτίες που στις απότομες νεροποντές καλούν την πυροσβεστική για άντληση υδάτων από τα υπόγεια, που λένε στα κανάλια…

7. ***Και η ενέργεια στο παιχνίδι…*** Σε συγκοινωνούντα δοχεία της ίδιας διατομής Α = 1 cm^2, περιέχεται νερό σε στήλη ύψους h = 10 cm. Στο ένα δοχείο τοποθετούμε αβαρές έμβολο και αρχίζουμε να συμπιέζουμε μέχρις ότου να διωχθεί όλο το νερό που υπάρχει στο δοχείο αυτό. Να υπολογισθεί το έργο που δαπανήθηκε για την ενέργεια αυτή. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση



Αρχικά και πριν από την τοποθέτηση του εμβόλου η στάθμη του υγρού στα δύο δοχεία βρισκόταν στο ίδιο ύψος. Με την τοποθέτηση του εμβόλου, για κάθε μετατόπιση αυτού προς τα κάτω κατά y πραγματοποιείται μια ίση μετατόπιση προς τα πάνω στο άλλο δοχείο, μιας και το νερό θεωρείται ασυμπίεστο.

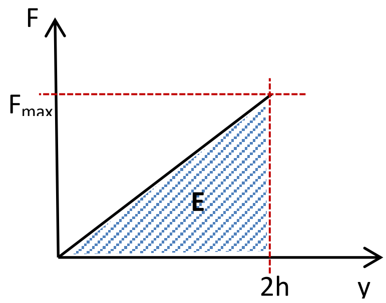


Θεωρώντας ότι σε κάθε θέση του εμβόλου το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας, η δύναμη που οφείλουμε να ασκούμε για να μειώνεται η στήλη του νερού στο δοχείο είναι:

$$F = P \cdot A \Rightarrow F = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot y \qquad (1)$$

μέχρις ότου το έμβολο κατέλθει στο επίπεδο Ε. Συνεπώς, για τη δύναμη F:

$$(1) \rightarrow F = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A \cdot y \xRightarrow{0 \leq y \leq h} \begin{cases} F_{min} = 0 \\ F_{max} = 2P \cdot h \end{cases} \qquad (2)$$



καθώς κάθε κατέβασμα του εμβόλου κατά y προκαλεί διαφορά στάθμης μεταξύ των δύο δοχείων κατά 2y. Η δύναμη είναι ανάλογη της μετατόπισης του εμβόλου και το έργο της θα εξαχθεί από το εμβαδόν της γραφικής παράστασης *F=f(y)*.

Όπως φαίνεται και από τη γειτονική γραφική παράσταση, το έργο της δύναμης που ασκήθηκε για να μετατοπιστεί το έμβολο είναι:

$$W = \frac{1}{2} F_{max} \cdot h = \rho \cdot g \cdot A \cdot h^2 \Rightarrow \boxed{W = 0{,}01\,J}$$

8. ***Πάλι δυνάμεις…*** Κυλινδρικό δοχείο, εμβαδού βάσης Α και ύψους h, που ακινητεί σε οριζόντιο έδαφος, αρχίζει να πληρούται με νερό, πυκνότητας ρ, από βρύση σταθερής παροχής Π, η οποία βρίσκεται σε ύψος Η πάνω από το έδαφος. Ποια η δύναμη, σε συνάρτηση με το χρόνο, που ασκείται στον πυθμένα; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

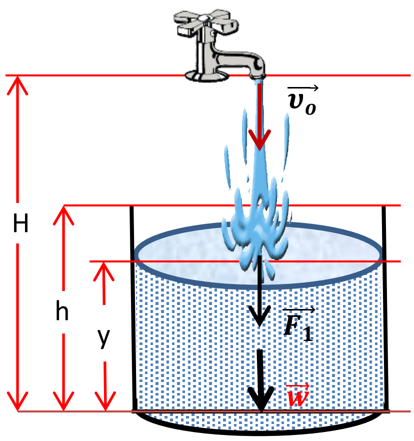
Απάντηση

Το νερό βγαίνει από τη βρύση με ταχύτητα μέτρου υ_o και προσπίπτει στην υδάτινη επιφάνεια στο δοχείο με ταχύτητα υ, η οποία σύμφωνα με το θεώρημα Toricelli ισούται με:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_o^2 + 2g(H - y)} \qquad (1)$$

Από την εξίσωση της παροχής:

$$\Pi = A \cdot \upsilon_o \Rightarrow \upsilon_o = \frac{\Pi}{A} \qquad (2)$$



Με πολύ καλή προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το νερό προσκρούει στην επιφάνεια του νερού στο δοχείο, μηδενίζοντας την ορμή του. Συνεπώς, η δύναμη που ασκείται λόγω της πρόσπτωσης στοιχειώδους μάζας Δm νερού στο δοχείο είναι:

$$F_1 = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow F_1 = \frac{\Delta m \cdot \vec{\upsilon}}{\Delta t} \xRightarrow{\Delta m = \rho \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x = \rho \cdot A \cdot \upsilon \cdot \Delta t}$$

$$\Rightarrow F_1 = \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \overset{(2)}{\Rightarrow} F_1 = \rho \cdot \Pi \cdot \upsilon \qquad (3)$$

Η στάθμη του νερού μετά από χρόνο t, από τη στιγμή που ανοίξαμε τη βρύση και θεωρείται ότι είναι η στιγμή t_o=0, βρίσκεται σε ύψος y και κατά συνέπεια στον πυθμένα ασκείται και το βάρος του υπερκείμενου υγρού w:

$$w = M \cdot g \Rightarrow w = \rho \cdot g \cdot A \cdot y \qquad (4)$$

Επειδή η παροχή είναι σταθερή, το ύψος y της στάθμης του νερού θα είναι:

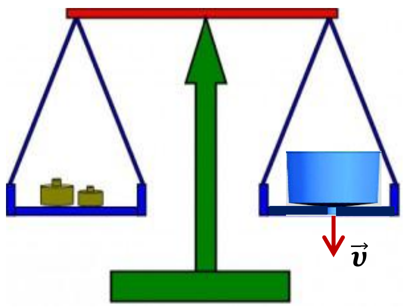
$$\Pi = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow \Pi = \frac{A \cdot y}{t} \Rightarrow y = \frac{\Pi}{A} t \qquad (5)$$

Η συνολική δύναμη που θα ασκείται στην επιφάνεια του πυθμένα του δοχείου θα είναι:

$$F = F_1 + w \xRightarrow{(1),(2),(3),(4),(5)} \boxed{F = \Pi \cdot \rho \cdot \left[g \cdot t + \sqrt{\frac{\Pi^2}{A^2} + 2g\left(H - \frac{\Pi}{A}t\right)} \right]} \qquad (6)$$

9. ***Η παλάντζα…*** Στο ένα τσιγκέλι ευαίσθητου ζυγού ακριβείας τοποθετούμε πλαστικό δοχείο νερού και στον άλλο σταθμά, ώστε ο ζυγός να ισορροπεί. Κάποια στιγμή ανοίγουμε με βελόνα στον πυθμένα οπή εμβαδού Α. Τι πρέπει να κάνουμε ώστε ο ζυγός να παραμείνει σε ισορροπία; Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας g.

Απάντηση



Με το άνοιγμα της τρύπας στον πυθμένα του δοχείου, αρχίζει να ρέει νερό με ταχύτητα, που σύμφωνα με το θεώρημα του Torricelli δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \sqrt{2gh} \qquad (1)$$

Όπου h το ύψος της στάθμης του υγρού στο δοχείο.

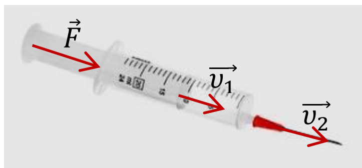
Η δύναμη που ασκείται από το την ποσότητα Δm της μάζας του νερού που εκρέει στο δοχείο είναι:

$$F = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{\Delta m \cdot \upsilon}{\Delta t} \xRightarrow{\Delta m = \rho \Delta V = \rho \cdot A \cdot \Delta x = \rho \cdot A \cdot \upsilon \cdot \Delta t} F = \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} F = 2\rho \cdot g \cdot A \cdot h \qquad (2)$$

Η δύναμη αυτή ασκείται προς τα πάνω. Για να διατηρηθεί η ισορροπία πρέπει να αφαιρέσουμε στιγμιαία σταθμά, που το βάρους τους να είναι ίσο κατά μέτρο με F. Βέβαια, λόγω της μείωσης της στάθμης του νερού, πρέπει να ελαττώνουμε ανάλογα τα σταθμά στον δίσκο, ώστε να διατηρείται διαρκώς η ισορροπία του ζυγού.

10. ***Η ένεση…*** Μία σύριγγα αποτελείται από τον οριζόντιο κύλινδρο, εντός του οποίου μπορεί να ολισθαίνει χωρίς τριβές το έμβολό της, που έχει διατομή A_1. Εντός του κυλίνδρου περιέχεται υγρό πυκνότητας ρ. Το ακροφύσιο της σύριγγας έχει διατομή A_2. Υπό την άσκηση σταθερής δύναμης $\vec{F}$, το έμβολο μετατοπίζεται με σταθερή ταχύτητα $\vec{\upsilon_1}$ και το υγρό εκρέει, θεωρώντας τη ροή στρωτή. Ποια η ταχύτητα εκροής;

Απάντηση



Το έμβολο μέσα σε χρονικό διάστημα Δt μετατοπίζεται κατά Δx, και η δύναμη $\vec{F}$ παράγει έργο ίσο με:

$$W = F \cdot \Delta x \xRightarrow{\Delta x = u \cdot \Delta t} W = F \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Έστω Δm η ποσότητα του υγρού που μετατοπίζεται στον κύλινδρο, με ταχύτητα μέτρου υ_1, και ισούται με:

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \xRightarrow{\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t} \Delta m = \rho \cdot A \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t \qquad (2)$$

Θεωρώντας το υγρό ασυμπίεστο, εφαρμόζουμε το νόμο της συνέχειας μεταξύ του κυλίνδρου και του ακροφυσίου:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 \upsilon_1 = A_2 \upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_1 = \frac{A_2}{A_1} \upsilon_2 \qquad (3)$$

Από το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας έχουμε:

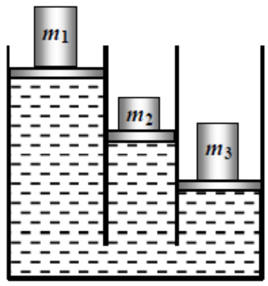
$$\Delta K = W \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m \cdot \upsilon_1^2 = F \cdot \Delta x \xRightarrow{(1),(2),(3)}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho \cdot A \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t}{2}\left(\upsilon_2^2 - \frac{A_2^2}{A_1^2}\upsilon_2^2\right) = F \cdot \upsilon_1 \cdot \Delta t \Rightarrow \upsilon_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho A} \cdot \frac{1}{1-\frac{A_2^2}{A_1^2}}} \qquad (4)$$

Στην πράξη είναι $A_2 << A_1$, οπότε από την (4) προκύπτει πως η ταχύτητα εκροής στο ακροφύσιο είναι:

$$(4) \rightarrow \boxed{\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2F}{\rho A}}} \qquad (5)$$

11. ***Βάρη..*** Δίνεται σύστημα τριών συγκοινωνούντων δοχείων, που περιέχουν νερό και τα οποία καταλήγουν σε κατακόρυφους κυλινδρικούς σωλήνες που έχουν ακτίνες R_1=9 cm, R_2=4 cm και R_3=5 cm. Τα αντίστοιχα έμβολα που φράσουν τους σωλήνες αυτούς έχουν μάζες m_1=8,5 kg, m_2=2 kg και m_3=8 kg. Το σύστημα βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας. Να υπολογιστεί η υψομετρική διαφορά μεταξύ των τριών εμβόλων. Δίνονται: πυκνότητα νερού ρ = 10^3 kg/m^3 και g = 10 m/s^2.

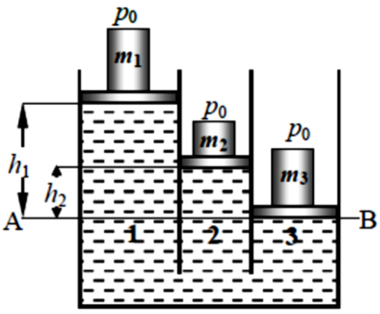


Απάντηση

Ως επίπεδο αναφοράς ως προς το οποίο θα μετρήσουμε τις πιέσεις λαμβάνουμε το νοητό επίπεδο AB, επί του οποίου βρίσκεται το έμβολο 3.

Σύμφωνα με την αρχή του Pascal, η πίεση στο επίπεδο AB θα είναι παντού η ίδια και κατά συνέπεια θα έχουμε:

$$P_1 = P_2 = P_3 \qquad (1)$$



Η απλούστερη περίπτωση είναι του σημείου (3), όπου η πίεση προκαλείται από το βάρος w_3 του εμβόλου μάζας m_3 και την ατμοσφαιρική πίεση P_o που δρα πάνω στο συγκεκριμένο έμβολο. Δηλαδή:

$$P_3 = P_o + \frac{w_3}{A_3} \xRightarrow{A_3=\pi R_3^2} P_3 = P_o + \frac{m_3 \cdot g}{\pi R_3^2} \qquad (2)$$

Η πίεση στο σημείο (2) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό και η οποία έχει ύψος h_2, συν την πίεση που προκαλεί το βάρος w_2 του εμβόλου μάζας m_2 συν την ατμοσφαιρική πίεση P_o που ασκείται στο έμβολο:

$$P_2 = P_o + \frac{w_2}{A_2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \xRightarrow{A_2=\pi R_2^2} P_2 = P_o + \frac{m_2 \cdot g}{\pi R_2^2} + \rho \cdot g \cdot h_2 \qquad (3)$$

Η πίεση στο σημείο (1) είναι ίση με την υδροστατική πίεση της στήλης νερού η οποία βρίσκεται πάνω από το σημείο αυτό, ύψους h_1, συν την πίεση που προκαλεί το βάρος w_1 του εμβόλου μάζας m_1, συν την ατμοσφαιρική πίεση P_o που ασκείται στο έμβολο:

$$P_1 = P_o + \frac{w_1}{A_1} + \rho \cdot g \cdot h_1 \xRightarrow{A_1=\pi R_1^2} P_1 = P_o + \frac{m_1 \cdot g}{\pi R_1^2} + \rho \cdot g \cdot h_1 \qquad (4)$$

Από τις εξισώσεις (1), (2) και (3) λαμβάνουμε:

$$P_2 = P_3 \Rightarrow P_o + \frac{m_2 \cdot g}{\pi R_2^2} + \rho \cdot g \cdot h_2 = P_o + \frac{m_3 \cdot g}{\pi R_3^2} \Rightarrow h_2 = \frac{1}{\pi \cdot \rho}\left(\frac{m_3}{R_3^2} - \frac{m_2}{R_3^2}\right) \Rightarrow \boxed{h_2 = 0{,}62m}$$

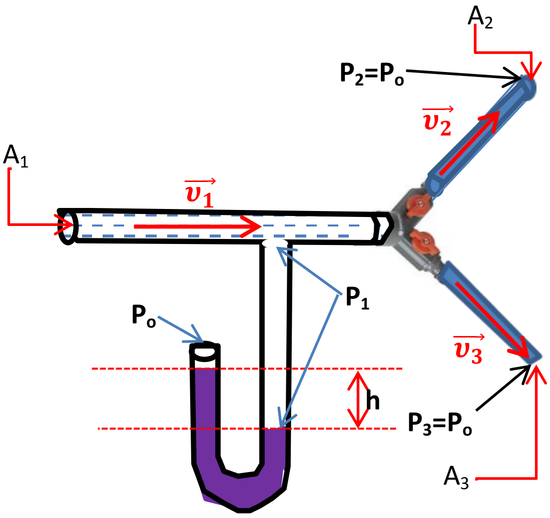
Από τις εξισώσεις (1), (2) και (4) λαμβάνουμε:

$$P_1 = P_3 \Rightarrow P_o + \frac{m_1 \cdot g}{\pi R_1^2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = P_o + \frac{m_3 \cdot g}{\pi R_3^2} \Rightarrow h_1 = \frac{1}{\pi \cdot \rho}\left(\frac{m_3}{R_3^2} - \frac{m_1}{R_1^2}\right) \Rightarrow \boxed{h_1 = 0{,}68m}$$

12. ***Διακλαδώσεις στον κήπο….*** Οριζόντιος σωλήνας κήπου. διατομής A_1=0,20 m^2 διακλαδίζεται σε δυο οριζόντιους σωλήνες, από τους οποίους ο ένας έχει διατομή A_2=0,03 m^2 και ο άλλος A_3=0,07 m^2. Το νερό ρέει από τον αρχικό σωλήνα και εκρέει ελεύθερα στον αέρα από τα άκρα των σωλήνων της διακλάδωσης. Για την μέτρηση της πίεσης P_1 στον κεντρικό σωλήνα έχει προσαρμοστεί σωλήνας σχήματος U, που περιέχει υδράργυρο. Το ένα στόμιο του σωλήνα U είναι συνδεδεμένο στον κεντρικό σωλήνα, ενώ το αριστερό είναι ανοιχτό στον ατμοσφαιρικό αέρα. Ο υδράργυρος μέσα στο σωλήνα U ισορροπεί έτσι ώστε η δεξιά ελεύθερη στάθμη να είναι πιο ψηλά από την αντίστοιχη αριστερή στάθμη κατά ένα διάστημα h = 7,50 cm. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες $υ_1$, $υ_2$ και $υ_3$ του ρευστού στον κεντρικό σωλήνα και στους σωλήνες διακλάδωσης, αντίστοιχα. Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση P_o= 10^5 N/m^2, g = 10 m/s^2, η πυκνότητα του νερού ρ=10^3 kg/m^3 και η πυκνότητα του υδραργύρου είναι $ρ_{Hg}$ = 13600 kg/m^3.

Απάντηση

Η διάταξη που περιγράφεται στην εκφώνηση φαίνεται στο γειτονικό σχήμα. Το άνοιγμα του δεξιού άκρου του σωλήνα U είναι συνδεδεμένο με το υγρό που ρέει στον κεντρικό σωλήνα, οπότε υφίσταται την πίεση P_1 του ρευστού. Το άλλο άνοιγμα είναι ανοικτό στον ατμοσφαιρικό αέρα, οπότε η ελεύθερη επιφάνεια του υδραργύρου υφίσταται την ατμοσφαιρική πίεση P_o. Επειδή η πίεση P_1 μέσα στον κεντρικό σωλήνα είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική πίεση P_o, ο υδράργυρος μέσα στο σωλήνα U ισορροπεί έτσι ώστε η ελεύθερη στάθμη να είναι πιο ψηλά από την αντίστοιχη δεξιά στάθμη κατά h = 7,50 cm.



Η πίεση P_1 συνεπώς είναι:

$$P_1 = P_o + \rho_{Hg} \cdot g \cdot h \Rightarrow P_1 = 100000 + 13600 \cdot 10 \cdot 0{,}075 \Rightarrow \boxed{P_1 = 110200\ Pa} \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των διατομών A_1 και A_2:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1=h_2} \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2(P_1 - P_o)}{\rho}} \qquad (2)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση του Bernoulli μεταξύ των διατομών A_1 και A_3:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_3 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_3^2 + \rho g h_3 \xRightarrow{h_1=h_3} \upsilon_2 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2(P_1 - P_o)}{\rho}} \qquad (3)$$

Παρατηρούμε από τις εξισώσεις (2) και (3) ότι: $\upsilon_2 = \upsilon_3$ (4)

Από το νόμο της συνεχείας μεταξύ του κεντρικού σωλήνα και των σωλήνων μετά τη διακλάδωση έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 + \Pi_3 \Rightarrow A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2 + A_3\upsilon_3 \xRightarrow{(4)} A_1\upsilon_1 = (A_2 + A_3)\upsilon_2 \Rightarrow \upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2 + A_3}\upsilon_1 \qquad (5)$$

$$(2) \xrightarrow{(4)} \frac{A_1}{A_2 + A_3}\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_1^2 + \frac{2(P_1 - P_o)}{\rho}} \Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2(P_1 - P_o)}{\rho}\,\frac{(A_2^2 + A_3^2)^2}{A_1^2 - (A_2^2 + A_3^2)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\upsilon_1 = 2{,}58\ \frac{m}{s}} \qquad (6)$$

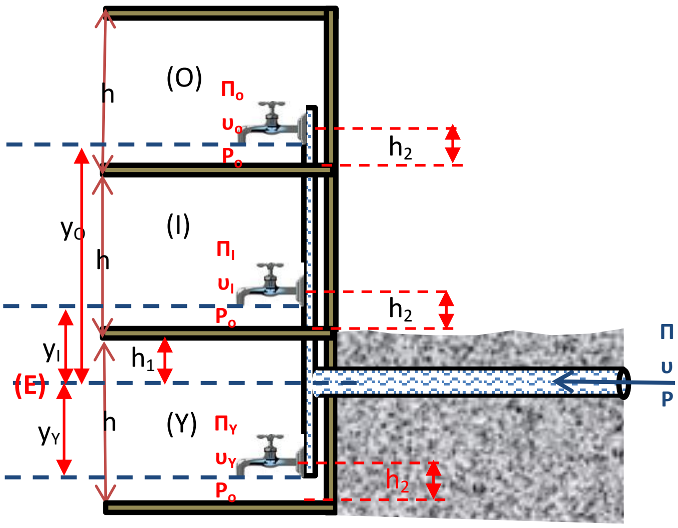
$$(5) \xrightarrow{(4),(6)} \boxed{\upsilon_2 = \upsilon_3 = 5{,}16\ \frac{m}{s}}$$

13. ***Διακλαδώσεις στο σπίτι…*** Μια οικία αποτελείται από ένα ισόγειο (Ι), ένα όροφο (Ο) και ένα υπόγειο (Υ). Κάθε όροφος της οικίας έχει ύψος h=4 m. Το δίκτυο ύδρευσης που τροφοδοτεί τη συγκεκριμένη οικία βρίσκεται σε βάθος h_1=1 m στο έδαφος και διακλαδίζεται σε κάθε όροφο μα κατακόρυφο σωλήνα παροχής.. Η βρύση σε κάθε όροφο έχει άνοιγμα εκροής με διάμετρο δ = 1,2 cm και απέχει απόσταση h_2=1,2 m από το αντίστοιχο πάτωμα.

Να υπολογίσετε την παροχή Π με την οποία εταιρεία ύδρευσης πρέπει να τροφοδοτήσει την οικία, στην περίπτωση που, όταν και οι τρεις βρύσες είναι ανοιχτές, η παροχή της βρύσης του ορόφου (Ο) είναι ίση με $Π_O = 8{\cdot}10^{-4}\ m^3/s$.

Δίνονται: Η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\ m/s^2$ και η πυκνότητα του νερού $ρ=10^3\ kg/m^3$. Το νερό που ρέει στους σωλήνες ύδρευσης να θεωρηθεί ως ιδανικό ρευστό.

Απάντηση



Στο διπλανό σχήμα γίνεται απεικόνιση της οικίας, όπως περιγράφηκε. Για τις ανάγκες της άσκησης θα θεωρήσουμε ως επίπεδο αναφοράς (Ε) το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται ο κεντρικός σωλήνας παροχής. Σε αυτόν η παροχή από το δίκτυο είναι Π, η ταχύτητα ροής του νερού υ και η στατική πίεση P. Όταν όλες οι βρύσες είναι ανοικτές, κάθε μία έχει τη δική της παροχή και ταχύτητα εκροής του νερού, αλλά σε όλες η πίεση στο στόμιο τους είναι ίση με την ατμοσφαιρική, P_o.

Με βάση τα δεδομένα της εκφώνησης, το εμβαδόν διατομής του στομίου κάθε βρύσης είναι:

$$A = \pi\frac{\delta^2}{4} = 1{,}13\cdot 10^{-4}\, m^2 \qquad (1)$$

Ενώ η ταχύτητα εκροής του νερού στον όροφο (Ο) είναι:

$$\Pi_O = A\cdot \upsilon_O \Rightarrow \upsilon_O = \frac{\Pi_O}{A} \Rightarrow \upsilon_O = \frac{8\cdot 10^{-4}}{1{,}13\cdot 10^{-4}} \Rightarrow \upsilon_O = 7{,}08\,\frac{m}{s} \qquad (2)$$

Η βρύση του ισογείου (Ι) βρίσκεται σε ύψος $y_I = h_1 + h_2 = 2{,}2\ m$ (3) από το επίπεδο αναφοράς και από την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ του επιπέδου αναφοράς και του επιπέδου του στομίου της βρύσης του ισογείου (Ι) έχουμε:

$$P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = P_I + \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 + \rho g y_I \xRightarrow{h=0} P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 + \rho g y_I \qquad (4)$$

Η βρύση του ορόφου (Ο) βρίσκεται σε ύψος $y_O = h_1 + h_2 + h = 6{,}2\ m$ (5) από το επίπεδο αναφοράς και από την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ του επιπέδου αναφοράς και του επιπέδου του στομίου της βρύσης του ορόφου (Ο) έχουμε:

$$P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = P_O + \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 + \rho g y_O \xRightarrow{h=0} P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 + \rho g y_O \qquad (6)$$

Τα πρώτα μέλη στις σχέσεις (4) και (6) είναι ίσα, άρα και τα δεύτερα. Συνεπώς:

$$P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 + \rho g y_I = P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 + \rho g y_O \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 + \rho g(y_O - y_I) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_I = \sqrt{\upsilon_O^2 + 2g(y_O - y_I)} \xrightarrow{(2),(3),(5)} \upsilon_I = 11{,}41\,\frac{m}{s} \qquad (7)$$

Συνεπώς, η παροχή της βρύσης του ισογείου (Ι) ισούται με:

$$\Pi_I = A\cdot\upsilon_I \xRightarrow{(1),(7)} \Pi_I = 12{,}89\cdot 10^{-4}\,\frac{m^3}{s} \qquad (8)$$

Η βρύση του υπογείου (Υ) βρίσκεται σε βάθος $y_Y = -h + h_1 + h_2 = -1{,}8\ m$ (9) από το επίπεδο αναφοράς και από την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ του επιπέδου αναφοράς και του επιπέδου του στομίου της βρύσης του υπογείου (Υ) έχουμε:

$$P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + \rho g h = P_Y + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Y^2 + \rho g y_Y \overset{h=0}{\Longrightarrow} P + \frac{1}{2}\rho\upsilon^2 = P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Y^2 + \rho g y_Y \qquad (10)$$

Τα πρώτα μέλη στις σχέσεις (6) και (10) είναι ίσα, άρα και τα δεύτερα. Συνεπώς:

$$P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 + \rho g y_I = P_o + + \frac{1}{2}\rho\upsilon_Y^2 + \rho g y_Y \Rightarrow \frac{1}{2}\rho\upsilon_I^2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_O^2 + \rho g(y_O - y_Y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \upsilon_Y = \sqrt{\upsilon_O^2 + 2g(y_O - y_Y)} \xrightarrow{(2),(3),(9)} \upsilon_I = 14{,}46\ \frac{m}{s} \qquad (11)$$

Συνεπώς, η παροχή της βρύσης του υπογείου (Υ) ισούται με:

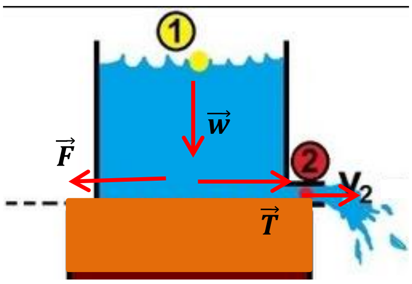
$$\Pi_Y = A \cdot \upsilon_Y \xrightarrow{(1),(11)} \Pi_I = 16{,}38 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s} \qquad (12)$$

Η ολική παροχή του δικτύου ύδρευσης θα είναι:

$$\Pi = \Pi_O + \Pi_I + \Pi_Y \xrightarrow{(8),(12)} \boxed{\Pi = 32{,}27 \cdot 10^{-4}\ \frac{m^3}{s}}$$

14. ***Να και η τριβή…*** Ένα δοχείο που έχει μεγάλο εμβαδόν βάσης περιέχει νερό πυκνότητας ρ. Το δοχείο με το νερό έχει μάζα m και βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο. Σε βάθος h κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού υπάρχει σ' ένα τοίχωμα τού δοχείου μια μικρή οπή με εμβαδόν A. Πόσος πρέπει να είναι ο μέγιστος συντελεστής τριβής ανάμεσα στο δοχείο και στο οριζόντιο επίπεδο ώστε το δοχείο να ολισθαίνει;

Απάντηση



Έστω Δm η ποσότητα του νερού που εξέρχεται από το σωλήνα, με ταχύτητα μέτρου υ, και ισούται με:

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \xrightarrow{\Delta V = A\cdot\Delta x = A\cdot u\cdot\Delta t} \Delta m = \rho \cdot A \cdot u \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Η ορμή με την οποία εκτοξεύεται η δέσμη νερού είναι:

$$\vec{p} = \Delta m \cdot \vec{u} \overset{(1)}{\Rightarrow} p = \rho \cdot A \cdot u^2 \cdot \Delta t \qquad (2)$$

Η δύναμη που ασκείται στη μάζα Δm για να εκτοξευτεί είναι:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p} - 0}{\Delta t} \overset{(2)}{\Rightarrow} F = \frac{\rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \cdot \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \qquad (3)$$

Από το θεώρημα του Torricelli έχουμε ότι:

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} \qquad (4)$$

$$(3) \overset{(4)}{\Rightarrow} F = 2\rho \cdot A \cdot g \cdot h \qquad (5)$$

Από δράση – αντίδραση τόση είναι κατά μέτρο και η δύναμη που θα ασκείται από τη μάζα του νερού επί του δοχείου, αλλά με αντίθετη φορά.

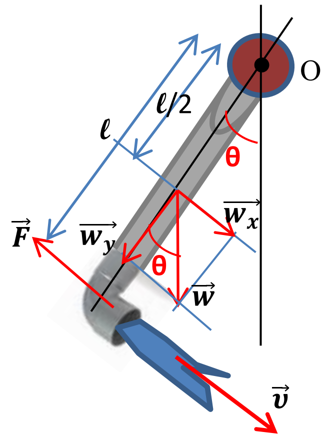
Για τη δύναμης της τριβής έχουμε: T=n·w (6).

Για να ξεκινήσει την ολίσθηση το δοχείο πρέπει:

$$T < F \xrightarrow{(5),(6)} n \cdot m \cdot g < 2\rho \cdot A \cdot g \cdot h \Rightarrow \boxed{n < \frac{2\rho \cdot A \cdot h}{m}}$$

Συνεπώς, οριακά δεχόμαστε ότι είναι ο μέγιστος συντελεστής τριβής ανάμεσα στο δοχείο και στο οριζόντιο επίπεδο ώστε το δοχείο να ολισθαίνει είναι $n \approx \frac{2\rho\cdot A\cdot h}{m}$.

15. ***Ολίγη από στροφική…*** Ένας ισοδιαμετρικός σωλήνας είναι κατακόρυφος και στο κάτω άκρο του έχει στραφεί κατά ένα μικρό τμήμα του ώστε να σχηματίζει ορθή γωνία. Το πάνω άκρο τού



σωλήνα έχει συνδεθεί με έναν ελαστικό σύνδεσμο, ώστε να μπορεί να στρέφεται. Όταν από το σωλήνα βγαίνει νερό με σταθερή παροχή, ο σωλήνας αποκλίνει από την κατακόρυφη θέση κατά γωνία 30°. Αν ό σωλήνας είναι αβαρής και έχει μήκος ℓ = 0,9 m, να υπολογιστεί η ταχύτητα τού νερού. Δίνεται g = 10 m/s^2.

Απάντηση

Έστω Δm η ποσότητα του νερού που εξέρχεται από το σωλήνα, με ταχύτητα μέτρου υ.

Η ποσότητα του νερού που προσπίπτει στην επιφάνεια σε χρόνο Δt είναι:

$$\Delta m = \rho \cdot \Delta V \xrightarrow{\Delta V = A\cdot\Delta x = A\cdot u\cdot\Delta t} \Delta m = \rho \cdot A \cdot u \cdot \Delta t \qquad (1)$$

Η ορμή με την οποία εκτοξεύεται η δέσμη νερού είναι:

$$\vec{p} = \Delta m \cdot \vec{u} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} p = \rho \cdot A \cdot u^2 \cdot \Delta t \qquad (2)$$

Η δύναμη που ασκείται στη μάζα Δm για να εκτοξευτεί είναι:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p} - 0}{\Delta t} \stackrel{(2)}{\Rightarrow} F = \frac{\rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \cdot \Delta t}{\Delta t} \Rightarrow F = \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 \qquad (3)$$

Από δράση – αντίδραση τόση είναι κατά μέτρο και η δύναμη που θα ασκείται από τη μάζα του νερού στο σημείο καμπής του σωλήνα, αλλά με αντίθετη φορά. Λόγω του βάρους του νερού που περιέχεται στον αβαρή σωλήνα, τελικά επιτυγχάνεται ισορροπία υπό γωνία θ ως προς την κατακόρυφο.

Το βάρος του νερού που περιέχεται στο σωλήνα κάθε στιγμή, μιας και η παροχή είναι σταθερά, λαμβάνεται από τη σχέση:

$$w = m \cdot g \xrightarrow{m = \rho\cdot V = \rho\cdot A\cdot\ell} w = g \cdot \rho \cdot A \cdot \ell \qquad (4)$$

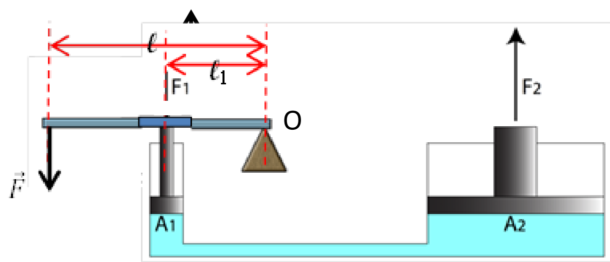
Όπου m η σταθερή ποσότητα του νερού που εμπεριέχεται κάθε στιγμή στο σωλήνα.

Για να ισορροπεί, άρα και να μην περιστρέφεται ο σωλήνας, ως προς το σύνδεσμο O θα ισχύει ότι η ολική ροπή θα ισούται με μηδέν:

$$\sum \overrightarrow{\tau_{(O)}} = 0 \Rightarrow -F \cdot \ell + w_x \frac{\ell}{2} = 0 \Rightarrow F = \frac{1}{2} w \cdot \eta\mu\theta \xrightarrow{(3),(4)}$$

$$\Rightarrow \rho \cdot A \cdot \upsilon^2 = \frac{1}{4} g \cdot \rho \cdot A \cdot \ell \Rightarrow \upsilon^2 = \frac{1}{4} g \cdot \ell \Rightarrow \upsilon = \frac{\sqrt{g \cdot \ell}}{2} \Rightarrow \boxed{\upsilon = 1{,}5\frac{m}{s}}$$

16. ***Να' σου και ο Αρχιμήδης….*** Η διάμετρος του μεγάλου εμβόλου υδραυλικού πιεστηρίου είναι 50 cm και του μικρού εμβόλου $\sqrt{10}$ cm. Εφαρμόζουμε δύναμη μέτρου F = 20 N στο άκρο μοχλού, που ενεργεί επί του μικρού εμβόλου. Αν ο μοχλοβραχίονας της δύναμης είναι ℓ = 1,2 m και ο μοχλοβραχίονας της αντίστασης είναι ℓ_1 = 0,3 m, να βρεθεί το βάρος που μπορούμε να ανυψώσουμε ε το συγκεκριμένο πιεστήριο. Η ράβδος του μοχλού να θεωρηθεί αβαρής. (Δασοπονική Θεσσαλονίκης)



Απάντηση

Από την αρχή του Pascal στο υδραυλικό πιεστήριο έχουμε ότι:

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \qquad (1)$$

Όταν έχουμε ανυψώσει το μέγιστο βάρος, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι συγκρατούμε το μοχλό ακίνητο. Για τις ροπές των ασκουμένων δυνάμεων στο μοχλό, ως προς το σημείο O, έχουμε:

$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow F \cdot \ell = F_1 \cdot \ell_1 \Rightarrow F_1 = \frac{\ell}{\ell_1} F \qquad (2)$$

Και φυσικά, το εμβαδόν του κάθε εμβόλου δίνεται από τη σχέση:

$$A = \pi \frac{\delta^2}{4} \qquad (3)$$

Οπότε:

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} F_2 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \cdot \frac{\ell}{\ell_1} \cdot F \Rightarrow \boxed{F_2 = 20000\ N}$$

17. ***Και ο Boyle έχει λόγο…*** Βυθίζουμε μέσα σε δοχείο υδραργύρου ένα σωλήνα μήκους ℓ = 20 cm, που είναι ανοικτός και από τις δύο άκρες, μέχρι να γεμίσει ο σωλήνας μέχρι τη μέση του. Ακολούθως κλείνουμε με ένα δάκτυλο το ελεύθερο στόμιο του σωλήνα όσο πιο στεγανά γίνεται και τον ανασύρουμε από το δοχείο.

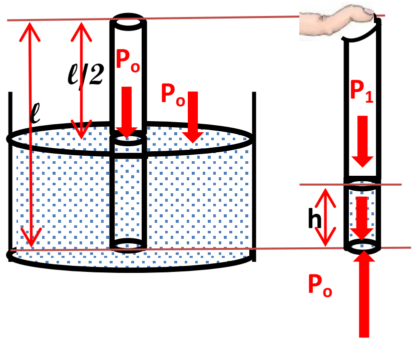
α) Να δείξουμε ότι οπωσδήποτε από το σωλήνα θα «στάξει» υδράργυρος.

β) Όταν ο σωλήνας πάψει να στάζει, ποιο το ύψος που καταλαμβάνει ο υδράργυρος;

γ) Ποιο είναι τότε η πίεση του αέρα που έχει αποκλεισθεί μέσα στο σωλήνα;

Δίνεται η ατμοσφαιρική πίεση P_o = 75 mm Hg. (Bacc. Poitiers)

Απάντηση



α) Όταν ανασύρουμε το σωλήνα από το δοχείο, αφού έχουμε σφραγίσει με το δάκτυλό μας το ελεύθερο στόμιο, οι υφιστάμενες πιέσεις είναι του εγκλωβισμένου αέρα, που είναι ίση με την ατμοσφαιρική P_o, του υδραργύρου P_{Hg}, και οι δύο προς τα κάτω, ενώ στο κάτω στόμιο, που δεν είναι ελεύθερο, υφίσταται η πίεση της ατμοσφαίρας προς τα πάνω. Οι προς τα κάτω πιέσεις υπερισχύον των προς τα πάνω, οπότε ο σωλήνας θα αρχίζει να «στάζει», μέχρις ότου οι πιέσεις προς τα κάτω και προς τα πάνω εξισορροπηθούν:

$$P_o = P_1 + P_{Hg} \qquad (1)$$

β) Όταν επιτευχθεί η εξισορρόπηση και ο σωλήνας δε στάζει πλέον, η στήλη του υδραργύρου έχει μειωθεί σε ύψος h, ενώ ο χώρος που καταλαμβάνει ο παγιδευμένος αέρας έχει αυξηθεί.

Για τον παγιδευμένο αέρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υφίσταται ισόθερμη εκτόνωση, καθώς σε όλη τη διαδικασία που πραγματοποιείται οι θερμοκρασιακές συνθήκες δε μεταβάλλονται ουσιαστικά, οπότε ισχύει ο νόμο του Boyle:

$$P_{\alpha\rho\chi} V_{\alpha\rho\chi} = P_{\tau\varepsilon\lambda} V_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow P_o \frac{\ell}{2} A = P_1 (\ell - h) A \overset{(1)}{\Rightarrow} P_o \frac{\ell}{2} = (P_o - P_{Hg})(\ell - h) \Rightarrow$$

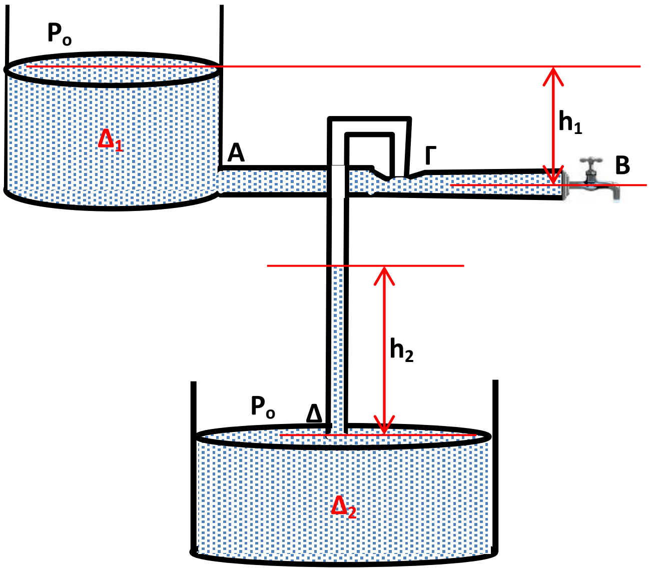
$$\Rightarrow \frac{\ell}{2(\ell - h)} = 1 - \frac{P_{Hg}}{P_o} \qquad (2) \Rightarrow \frac{20}{2(20 - h)} = 1 - \frac{h}{75} \Rightarrow h^2 - 95h + 750 = 0$$

Από τη λύση του τριωνύμου λαμβάνουμε ως δεκτή λύση την τιμή: $\boxed{h = 8{,}69\ cm}$ (2)

Αφήνεται στον αναγνώστη να εξηγήσει γιατί $\frac{P_{Hg}}{P_o} = \frac{h}{75}$ (3). *Δεν είναι δύσκολο.*

γ) Από τη σχέση (3) συμπεραίνεται ότι η πίεση του υδραργύρου όταν έχει αποκατασταθεί η ισορροπία ισούται με 8,69 cm Hg. Οπότε εύκολα προκύπτει από την (1) ότι η τελική πίεση του εγκλωβισμένου αέρα θα είναι 66, 31 cm Hg.

18. ***Παράλληλη συγκοινωνία…*** Τα δοχεία $Δ_1$ και $Δ_2$ του διπλανού σχήματος, που βρίσκονται σε παράλληλα κατακόρυφα επίπεδα και σε ικανή κατακόρυφη απόσταση, περιέχουν το ίδιο υγρό. Από τον πυθμένα του δοχείου $Δ_1$ ξεκινά οριζόντιος σωλήνας ΑΒ, που παρουσιάζει στένωση στο σημείο Γ και καταλήγει σε βρύση στο Β. Η στένωση έχει τη μισή διατομή σε σχέση με τη διατομή του σωλήνα ΑΒ. Κατακόρυφος σωλήνας ξεκινά από τη στένωση και καταλήγει στο δοχείο $Δ_2$. Αν h_1 = 20 cm το ύψος του υγρού στο δοχείο $Δ_1$, ποιο το ύψος h_2 του υγρού στο σωλήνα ΓΔ,



α) αν η βρύση είναι κλειστή,

β) αν η βρύση είναι ανοικτή και η ροή είναι στρωτή, πριν την εισαγωγή του σωλήνα ΓΔ στο δοχείο $Δ_2$;

Απάντηση

α) Όταν η βρύση είναι κλειστή, πριν την εισαγωγή του σωλήνα ΓΔ στο δοχείο $Δ_2$ εγκλωβίζεται αέρας υπό πίεση ίση με την ατμοσφαιρική P_o. Στην επιφάνεια του δοχείου $Δ_2$ η πίεση επίσης είναι ίση με την ατμοσφαιρική P_o. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, όταν το στόμιο Δ του σωλήνα ΓΔ βυθιστεί στο υγρό του δοχείου $Δ_2$, η ανύψωση του υγρού θα είναι μηδενική (h_2 = 0).

β) Όταν η βρύση είναι ανοικτή, πριν τη βύθιση του στομίου Δ στο δοχείο $Δ_2$, το υγρό ρέει στο σωλήνα ΑΒ και η ταχύτητά του στο σημείο Α σύμφωνα με το θεώρημα του Toricelli ισούται με:

$$υ_A = \sqrt{2gh_1} \qquad (1)$$

Από το νόμο της συνέχειας μεταξύ των σημείων Α και Β έχουμε ότι:

$$Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_A u_A = A_B u_B \xRightarrow{A_A = A_B} u_A = u_B \quad (2)$$

Από το νόμο της συνέχειας μεταξύ των σημείων Β και Γ έχουμε ότι:

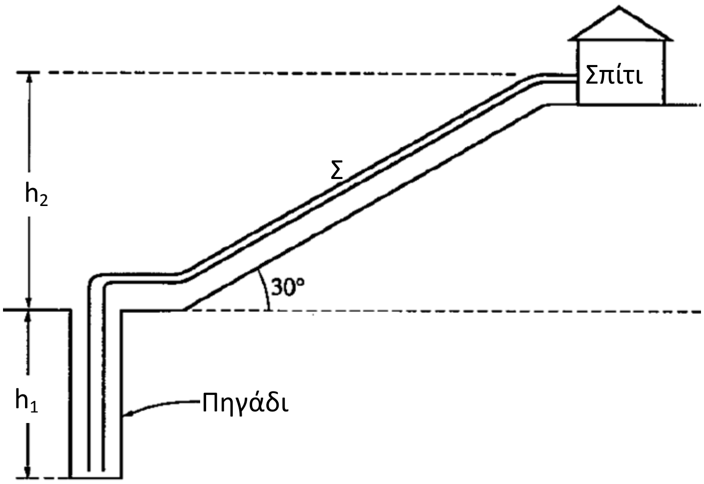
$$Π_1 = Π_2 \Rightarrow A_Γ u_Γ = A_B u_B \xRightarrow{A_B = 2A_Γ,\ (2)} u_Γ = 2u_A \quad (3)$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Γ και Β έχουμε ότι:

$$P_Γ + \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 + ρgh_Γ = P_B + \frac{1}{2}ρυ_B^2 + ρgh_B \xRightarrow{h_Γ=0, h_B=0, P_B=P_{o,}(2)}$$

$$\Rightarrow P_o - ρgh_2 + \frac{1}{2}ρυ_Γ^2 = P_o + \frac{1}{2}ρυ_A^2 \Rightarrow υ_Γ^2 = υ_A^2 + 2gh_2 \xRightarrow{(1),(3)} h_2 = 3h_1 \Rightarrow \boxed{h_2 = 60\ cm}$$

19. Μία αντλία έχει βυθιστεί στον πάτο πηγαδιού βάθους h_1=35 m και λειτουργεί ώστε να μεταφερθεί νερό σε σπίτι που βρίσκεται σε υψόμετρο h_2 από το χείλος του πηγαδιού. Οι σωληνώσεις μεταξύ του χείλους του πηγαδιού και του σπιτιού παρουσιάζουν κλίση 30^o κι έχουν μήκος s= 100 m. Η πυκνότητα του νερού είναι ρ = 10^3 Km/m^3 και θεωρείται ιδανικό ρευστό, αγνοώντας τριβές, ιξώδες και πιθανές τυρβώδεις ροές.



α) Οι οικιακές ανάγκες των ενοίκων

ανέρχονται σε 0,35 m^3 ημέρα. Η αντλία λειτουργεί συνολικά 2 ώρες ημερησίως.

i) Ποιο το ελάχιστο απαιτούμενο έργο για την άντληση του νερού ανά ημέρα;

ii) Ποια η ελάχιστη ισχύς της αντλίας;

β) Εντός του σωλήνα στο πηγάδι το νερό ρέει με ταχύτητα μέτρου 0,5 m/s, ενώ η σωλήνωση έχει διάμετρο 3 cm. Ο σωλήνας σύνδεσης του πηγαδιού με το σπίτι έχει διάμετρο 1,5 cm.

i) Ποια η ταχύτητα ροής του νερού στο στόμιο μιας βρύσης, που βρίσκεται στην αυλή του σπιτιού κοντά στο δάπεδο;

ii) Πόση είναι η πίεση στην αντλία, ώστε το νερό να εκρέει από τη βρύση υπό ατμοσφαιρική πίεση; Δίνονται η ατμοσφαιρική πίεση $P_o = 10^5\ N/m^2$, $g = 10\ m/s^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho = 10^3\ kg/m^3$ **Απάντηση**

α) i) Η μάζα του νερού που καταναλώνεται ημερησίως είναι:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \Rightarrow m = 350\ kg \quad (1)$$

Η υψομετρική διαφορά μεταξύ του σημείου άντλησης του νερού και του σπιτιού είναι 85 m. Συνεπώς το απαιτούμενο έργο για την ανύψωση του νερού είναι:

$$W = m \cdot g \cdot h \Rightarrow W = m \cdot g \cdot (h_1 + s \cdot \eta\mu 30) = 350 \cdot 10 \cdot 85 \Rightarrow \boxed{W = 297500\ J} \quad (2)$$

ii) Η ισχύς της αντλίας ισούται κατ' ελάχιστον με:

$$P_{\alpha\nu} = \frac{W}{t} = \frac{297500}{2 \cdot 3600} \Rightarrow \boxed{P_{\alpha\nu} = 41{,}32\ W} \quad (3)$$

β) Από το νόμο της συνέχειας μεταξύ του πηγαδιού και της οικίας Γ έχουμε ότι:

$$\Pi_1 = \Pi_2 \Rightarrow A_1 u_1 = A_2 u_2 \Rightarrow \pi r_1^2 \upsilon_1 = \pi r_2^2 \upsilon_2 \xRightarrow{r_1 = 2r_2} u_2 = 4u_1 \Rightarrow u_2 = 2\frac{m}{s} \quad (4)$$

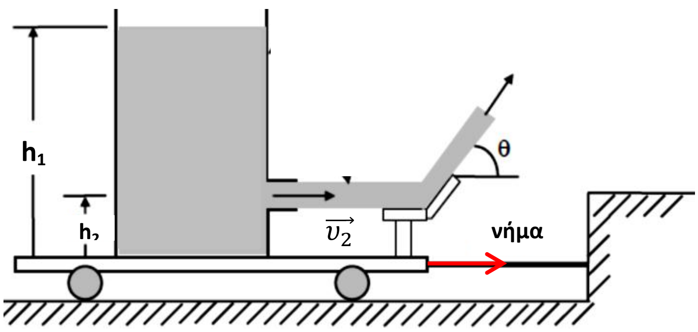
Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του πηγαδιού και του σπιτιού έχουμε ότι:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h_2 \xRightarrow{h_1 = 0}$$

$$\Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g(h_1 + h_2) \Rightarrow P_1 = P_o + \frac{1}{2}\rho(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2) + \rho g(h_1 + s \cdot \eta\mu 30) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{P_\Sigma = 9{,}52 \cdot 10^5\ \frac{N}{m^2}}$$

20. Μια δεξαμενή νερού είναι γεμάτη με νερό σε ύψος h_1, και βρίσκεται προσδεμένη πάνω σε τροχήλατη επιφάνεια, η οποία δεν παρουσιάζει τριβή με το οριζόντιο δάπεδο. Σε ύψος h_2 από τον πυθμένα του δοχείου υπάρχει μικρή οπή, πολύ μικρότερης διατομής σε σχέση με εκείνη του δοχείου. Πίδακας νερού εκρέει οριζόντια από την οπή με κατάλληλο μηχανισμό. Ο πίδακας προσπίπτει σε ακλόνητο πτερύγιο, που στηρίζεται στην τροχήλατη επιφάνεια, που σχηματίζει γωνία θ ως προς το δάπεδο. Να υπολογίσετε την τάση οριζοντίου νήματος, που συνδέει την τροχήλατη επιφάνεια με κατακόρυφο τοίχο, ώστε το σύστημα να διατηρείται ακίνητο. Υποθέστε ότι η ταχύτητα και η διατομή του πίδακα παραμένουν σταθερές μετά την έξοδο από τη δεξαμενή και ότι η ταχύτητα του κατά μέτρο διατηρείται σταθερή μετά την πρόσπτωση στο πτερύγιο.



Απάντηση

Από το θεώρημα του Torricelli το νερό εκρέει από τη μικρή οπή με ταχύτητα μέτρου:

$$\upsilon_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (1)$$

Η μάζα του νερού αρχικά κινείται οριζόντια στον πίδακα και μετά την πρόσπτωση στο πτερύγιο εκτρέπεται κατά γωνία θ ως προς το οριζόντιο δάπεδο.

Έστω Δm η μάζα του νερού του πίδακα, η οποία εκρέει σε χρόνο Δt. Τότε:

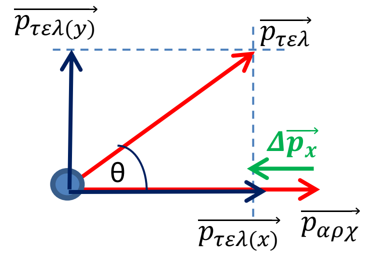
$$\Delta m = \rho \Delta V \xRightarrow{\Delta V = A \cdot \Delta x = A \cdot \upsilon_2 \cdot \Delta t} \Delta m = \rho \cdot A \cdot \upsilon_2 \cdot \Delta t \qquad (2)$$

όπου Α η διατομή του πίδακα.

Η ορμή με την οποία κινείται η μάζα Δm του πίδακα κατά μέτρο είναι:

$$\Delta p = \Delta m \cdot \upsilon_2 \xRightarrow{(1),(2)} \Delta p = \rho \cdot A \cdot \upsilon_2^2 \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Η ορμή της μάζας Δm διατηρείται σταθερή κατά μέτρο μετά την πρόσπτωση στο πτερύγιο, όμως, έχει υποστεί εκτροπή κατά γωνία θ από την αρχική διεύθυνση.



Επειδή το νήμα είναι οριζόντιο, μας ενδιαφέρουν οι όποιες μεταβολές της ορμής στον οριζόντιο άξονα xx'.

Όπως φαίνεται από το ανυσματικό διάγραμμα του γειτονικού σχήματος, η μεταβολή της ορμής της μάζας Δm κατά τον άξονα x'x είναι:

$$\Delta p_x = p_{\tau\varepsilon\lambda(x)} - p_{\alpha\rho\chi} = p_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - p_{\alpha\rho\chi}$$

$$= p_{\alpha\rho\chi} \cdot \sigma\upsilon\nu\theta - p_{\alpha\rho\chi} \overset{(3)}{\Rightarrow} \Delta p_x = \rho \cdot A \cdot \upsilon_2^2 \cdot \Delta t \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \qquad (4)$$

Κατά συνέπεια και η δύναμη που ασκεί η μάζα του νερού στο τροχήλατο σύστημα είναι:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} \xRightarrow{(4)} F_x = \rho \cdot A \cdot \upsilon_2^2 \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta - 1) \qquad (5)$$

Η δύναμη F_x είναι αρνητική (συνθ - 1 < 0), δηλαδή έχει φορά αντίθετη της αρχικής ροής του πίδακα, κάτι αναμενόμενο, καθώς το σύστημα «αντιδρά» στη μεταβολή της ορμής του.

Για να ισορροπεί το σύστημα, το νήμα πρέπει να ασκεί δύναμη:

$$\boxed{T = \rho \cdot A \cdot \upsilon_2^2 \cdot (1 - \sigma\upsilon\nu\theta)}$$

κατά την αντίθετη φορά από την F_x, δηλαδή προς τον κατακόρυφο τοίχο.

Βιβλιογραφία

1. Αθανασάκης Ι, *Μεθοδολογία των Ασκήσεων Φυσικής,* τόμος α', ιδία έκδοση, Αθήνα, χ.χ.
2. Βλάχος Ι., Κουγιουμτζόπουλος Η., *Φυσική Ασκήσεις,* τόμος 2, εκδ. Gutenberg, Αθήνα, 1976
3. Γκόλιας Χ., *Προβλήματα Φυσικής,* ιδία έκδοση, Αθήνα, 1976
4. Μακρής Α, Σπηλιόπουλος Γ., *Ασκήσεις Φυσικής,* τεύχος Α', ιδία έκδοση, Αθήνα, 1971
5. Φωτεινόπουλος Β., *Φυσική, Μηχανική 1,* εκδ. Βλάσση, Αθήνα, χ.χ.
6. Halliday D., Resnick R. , Walker J., *Fundamentals of Physics,* 9th ed., Wiley, N.Y., 2011
7. Serway R., Jewett J.W., *Physics for Scientists and Engineers*, 9th ed., Brookes, Boston, 2014
8. Young D. H., *Πανεπιστημιακή Φυσική*, τόμος Α', εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 1994
9. Young D. H., *Πανεπιστημιακή Φυσική*, τόμος Α', εκδ. Παπαζήση, Αθήνα, 1994
10. Διαδικτυακή Πηγή: http://eclass.aspete.gr/courses/GM157/ Open e-Class, ΑΣΠΑΙΤΕ

Daniel Bernoulli

Evan. Torricelli