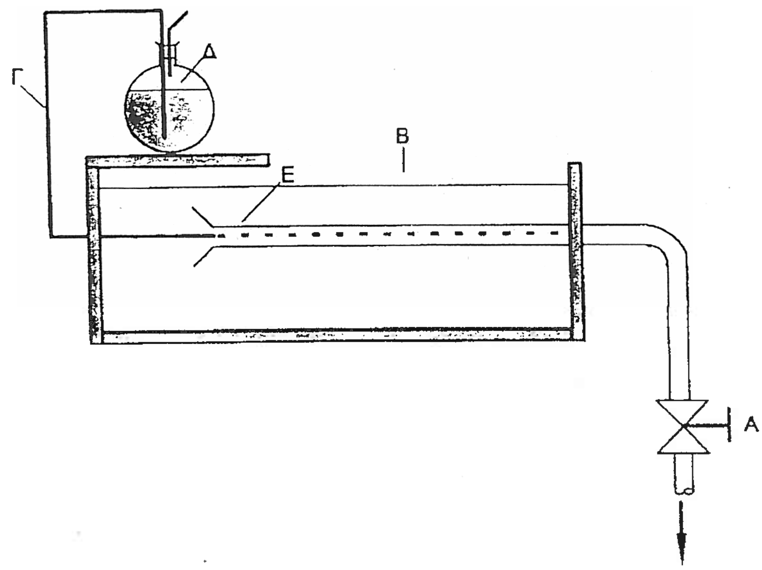
ΥΕΝ/ΚΕΣΕΝ
Δ/ΝΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ




ΜΗΝΑ ΝΕΡΣΙΣΓΙΑΝ
Δρ. ΧΗΜΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΜΠ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΚΕΣΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

ΑΘΗΝΑ 2002

# Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές καλύπτουν τη διδακτέα ύλη της Μηχανικής των Ρευστών, όπως αυτή αναφέρεται στο αναλυτικό πρόγραμμα του ΥΕΝ για το ΚΕΣΕΝ Μηχανικών.

Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να μελετηθούν οι αρχές και οι κύριες εφαρμογές της Μηχανικής των Ρευστών. Για το λόγο αυτό σε κάθε κεφάλαιο δίνεται έμφαση στις θεωρητικές γνώσεις που ερμηνεύουν τα διάφορα φαινόμενα που συμβαίνουν κατά την ροή των ρευστών.

Για την ευχερέστερη κατανόηση του αντικειμένου έχουν συμπεριληφθεί αντιπροσωπευτικές λυμένες ασκήσεις και προβλήματα. Η επιλογή και η παρουσίαση των ασκήσεων έγινε με τέτοιο τρόπο ώστε να παρέχεται η δυνατότητα συστηματικής μελέτης της θεωρίας και κατανόησης της τεχνικής επίλυσης.

Θεωρώ καθήκον μου να τονίσω ότι δέχομαι κάθε καλόπιστη υπόδειξη σχετικά με την εργασία αυτή.

Αθήνα 2002

Μηνάς Νερσισγιάν

# Περιεχόμενα

## Πρόλογος

# Εισαγωγικές Έννοιες και Ορισμοί

## 1-1 Έννοια του Ρευστού από Τεχνική Άποψη

Από τεχνική άποψη, τα υλικά σώματα ταξινομούνται σε δύο βασικές κατηγορίες: τα *ρευστά* και τα *στερεά*. Κριτήριο για την ταξινόμηση αυτή είναι ο τρόπος με τον οποίο αντιδρούν τα διάφορα υλικά όταν υφίστανται την επίδραση διατμητικής τάσης*. Έτσι ως ***ρευστά*** σώματα χαρακτηρίζονται τα υλικά τα οποία υπό τη επίδραση *διατμητικής τάσης (οσοδήποτε μικρή και αν είναι) υφίστανται συνεχή παραμόρφωση (δηλαδή ρέουν).*

Στο Σχ. 1-1 εικονίζονται δύο οριζόντιες πλάκες μεταξύ των οποίων περιέχεται ρευστό σε κατάσταση ηρεμίας. "Απομονώνουμε" προς εξέταση μια μικρή ποσότητα ρευστού που είναι σε κατάσταση ηρεμίας και η οποία έχει τη μορφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου (στοιχείο *ΑΒΓΔ*). Έστω ότι σε μια χρονική στιγμή t=0, ασκείται στην επάνω πλάκα μια σταθερή διατμητική δύναμη, **F** , η οποία μετατοπίζει την πλάκα αυτή παράλληλα προς το επίπεδό της. Η κάτω πλάκα παραμένει ακίνητη. Εξαιτίας της δράσης της δύναμης **F** , το στοιχείο *ΑΒΓΔ* του ρευστού παραμορφώνεται και, από ορθογώνιο που ήταν αρχικά, γίνεται "πλαγιογώνιο". Έτσι, τη χρονική στιγμή $t=t_1$, το θεωρούμενο στοιχείο έχει πάρει τη μορφή του πλαγιογωνίου $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$. Το ρευστό θα συνεχίζει να παραμορφώνεται όσο χρόνο διαρκεί η επίδραση της διατμητικής δύναμης. Όταν


Σχ.1-1 Απεικόνιση της παραμόρφωσης ρευστού που βρίσκεται μεταξύ δύο οριζοντίων πλακών και υφίστανται την επίδραση σταθερής διατμητικής δύναμης.

η επίδραση της διατμητικής δύναμης **F** σταματήσει, το ρευστό παύει να κινείται, αλλά δεν εμφανίζει καμία τάση να επανέλθει στην αρχική του μορφή. Αντίθετα προς τα ρευστά, τα οποία δεν προβάλουν καμία αντίσταση στην αλλαγή της μορφής τους, τα ***στερεά*** σώματα, εξ ορισμού, μπορούν να αντιδρούν στην επίδραση διατμητικής τάσης με στατική παραμόρφωση υπό

* ***Διατμητική τάση*** ονομάζεται το πηλίκο μιας διατμητικής (ή εφαπτομενικής) δύναμης που ασκείται πάνω σε μια επιφάνεια προς το εμβαδόν της επιφανείας αυτής. Η διατμητική δύναμη έχει διεύθυνση παράλληλη προς το επίπεδο της θεωρούμενης επιφάνειας.

την προϋπόθεση ότι η ασκούμενη τάση δεν υπερβαίνει το όριο ελαστικότητας του στερεού.
Γενικά τα ρευστά διακρίνονται σε υγρά και αέρια. Η βασική διαφορά υγρών και αερίων είναι ότι, εξαιτίας των δυνάμεων συνοχής που υπάρχουν στα υγρά, αυτά έχουν ορισμένο όγκο και μεταβλητό σχήμα, ενώ στα αέρια η έλλειψη δυνάμεων συνοχής οδηγεί στη μη ύπαρξη όγκου και σχήματος οπότε και καταλαμβάνουν το χώρο που τους προσφέρονται.

## 1-2 Η Υπόθεση του Συνεχούς Μέσου

Τα ρευστά αποτελούνται από μόρια τα οποία κινούνται συνεχώς σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις. Εξαιτίας της κίνησης αυτής, οι θέσεις και οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων μεταβάλλονται συνεχώς, με αποτέλεσμα να επηρεάζεται το πλήθος των μορίων που περιέχονται κάθε χρονική στιγμή σε έναν ορισμένο όγκο ρευστού. Το γεγονός αυτό καθιστά προβληματικό τον καθορισμό των ιδιοτήτων του ρευστού σε ένα σημείο του χώρου. Για παράδειγμα, αν το ρευστό θεωρηθεί ως *μοριακό μέσο*, η ταχύτητα του σε ένα ορισμένο σημείο του χώρου δεν μπορεί να προσδιοριστεί, αφού είναι μηδέν σε όλες τις χρονικές στιγμές, εκτός από εκείνες, κατά τις οποίες ένα μόριο διέρχεται ακριβώς από το θεωρούμενο σημείο. Αυτή δε είναι η ταχύτητα αυτού του συγκεκριμένου μορίου και όχι η μέση ταχύτητα των μορίων γύρω από το σημείο αυτό. Για να αποφύγουμε την απροσδιοριστία των ιδιοτήτων του ρευστού, σε πρακτικά θέματα ροής των ρευστών, το ρευστό που θα μας απασχολήσει θα το θεωρήσουμε ότι είναι ένα *συνεχές μέσο* δηλαδή ένα μέσο που δεν παρουσιάζει κενά μεταξύ των μορίων του και που οι ιδιότητες του μεταβάλλονται από σημείο σε σημείο κατά τρόπο συνεχή. Έτσι μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε τον μέσο όρο των τιμών των διαφόρων ιδιοτήτων του ρευστού σε κάποιο σημείο της ροής και αυτές τις τιμές θεωρεί το μοντέλο του συνεχούς μέσου σαν τις τιμές των ιδιοτήτων του ρευστού στο συγκεκριμένο σημείο.

## 1-3 Ιδιότητες των ρευστών

### ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ

***Πυκνότητα***, *ρ*, ενός ρευστού είναι ο λόγος της μάζας, m, του ρευστού προς τον όγκο, V, που καταλαμβάνει αυτή στο χώρο.

$$\rho = m / V \qquad (1\text{-}1)$$

Η μονάδα μέτρησης της πυκνότητας στο S.I. είναι $kg/m^3$.

Το αντίστροφο της πυκνότητας (δηλαδή ο όγκος που καταλαμβάνει η μονάδα μάζας του ρευστού) ονομάζεται ***ειδικός όγκος***, v:



$$v = 1/\rho = V/m \qquad (1\text{-}2)$$

Η μονάδα μέτρησης του ειδικού όγκου στο S.I. είναι $m^3/kg$.

Μια άλλη εύχρηστη ιδιότητα, η οποία σχετίζεται με την πυκνότητα είναι το ειδικό βάρος. Ως ***ειδικό βάρος***, *γ*, ορίζεται το γινόμενο της πυκνότητας, ρ, επί την τοπική επιτάχυνση της βαρύτητας, g:

$$\gamma = \rho\, g \qquad (1\text{-}3)$$

Η μονάδα μέτρησης του ειδικού βάρους στο S.I. είναι $N/m^3$.

Πολλές φορές χρησιμοποιείται και ο όρος σχετική πυκνότητα. Ως ***σχετική πυκνότητα***, *s*, ορίζεται σαν το πηλίκο της μάζας της ουσίας προς τη μάζα ίσου όγκου ουσίας που λαμβάνεται ως μέτρο σύγκρισης, στις ίδιες συνθήκες. Τα στερεά και τα υγρά αναφέρονται στο νερό (στους 4 °C) ως μέτρο σύγκρισης, ενώ τα αέρια αναφέρονται στον αέρα απαλλαγμένο από $CO_2$ και $H_2$ (στους 0 °C και πίεση μιας ατμόσφαιρας). Από τον ορισμό προκύπτει ότι για τα στερεά και υγρά ισχύει:

$$s_{(\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma)} = m_{(\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma)} / m_{(\acute{\iota}\sigma o\upsilon\ \acute{o}\gamma\kappa o\upsilon\ \nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon})} = \rho_{(\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau o\varsigma)} / \rho_{(\nu\varepsilon\rho o\acute{\upsilon})} \qquad (1\text{-}4)$$

Η πυκνότητα των ρευστών εξαρτάται γενικώς από την πίεση και τη θερμοκρασία. Η εξάρτηση αυτή εκφράζεται ποσοτικά με το *μέτρο συμπιεστότητας* και το *συντελεστή κυβικής διαστολής*.
Το ***μέτρο συμπιεστότητας***, *k*, ενός ρευστού εκφράζει τη σχετική μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού η οποία προέρχεται από τη μεταβολή της πίεσης υπό σταθερή θερμοκρασία και η μονάδα μέτρησης του στο S.I., είναι το $Pa^{-1}$. Το μέτρο συμπιεστότητας ενός υλικού είναι το αντίστροφο του ***μέτρου ελαστικότητας***, *Ε*, το οποίο χρησιμοποιείται κυρίως στη Μηχανική.
Ο ***συντελεστής κυβικής διαστολής***, *β*, ενός ρευστού εκφράζει τη σχετική μεταβολή της πυκνότητας του ρευστού η οποία προέρχεται από τη μεταβολή της θερμοκρασίας υπό σταθερή πίεση και η μονάδα μέτρησης του στο S.I., είναι το $K^{-1}$. Η αύξηση της θερμοκρασίας υπό σταθερή πίεση προκαλεί μείωση της πυκνότητας του ρευστού (εξαίρεση στον κανόνα αυτό αποτελεί το νερό στην περιοχή μεταξύ 0 °C και 4 °C).
Στις τεχνικές εφαρμογές, ενδιαφέρουν κυρίως οι τιμές του μέτρου συμπιεστότητας των ρευστών σε συνήθης συνθήκες (1 atm και 20 °C). Επειδή στα υγρά στις συνθήκες αυτές οι τιμές των μεγεθών *k* και *β* είναι πολύ μικρές, οι μεταβολές της πυκνότητας των υγρών μπορεί να θεωρηθούν αμελητέες. Η θεώρηση αυτή οδηγεί στην παραδοχή ότι, σε συνήθης συνθήκες, τα υγρά είναι *ασυμπίεστα*. Η παραδοχή του ασυμπίεστου υγρού δεν ισχύει σε περιπτώσεις όπου έχουμε απότομες ή μεγάλες μεταβολές πίεσης (όπως, π.χ., στις υδραυλικές πρέσες και τα υδραυλικά συστήματα πέδησης). Στις περιπτώσεις αυτές, οι

μεταβολές της πυκνότητας των υγρών είναι σημαντικές και δεν μπορούν να αγνοηθούν.
Αντίθετα προς την πυκνότητα των υγρών, η πυκνότητα των αερίων εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από την πίεση και τη θερμοκρασία. Για τα *τέλεια αέρια* η εξάρτηση αυτή δίνεται από την καταστατική εξίσωση:

$$P = \rho R^* T \tag{1-5}$$

όπου, P είναι η πίεση, ρ η πυκνότητα, T η απόλυτη θερμοκρασία και $R^*$ η ειδική σταθερά του αερίου που ισούται με το λόγο της παγκόσμιας σταθεράς, R, των αερίων προς τη μοριακή μάζα, M, του αερίου ($R^* = R / M$).

Όπως αποδεικνύεται εύκολα, στα τέλεια αέρια, το μέτρο συμπιεστότητας είναι ίσο με το αντίστροφο της πίεσης:

$$k = 1 / P \tag{1-6}$$

και ο συντελεστής κυβικής διαστολής με το αντίστροφο της θερμοκρασίας:

$$\beta = 1 / T \tag{1-7}$$

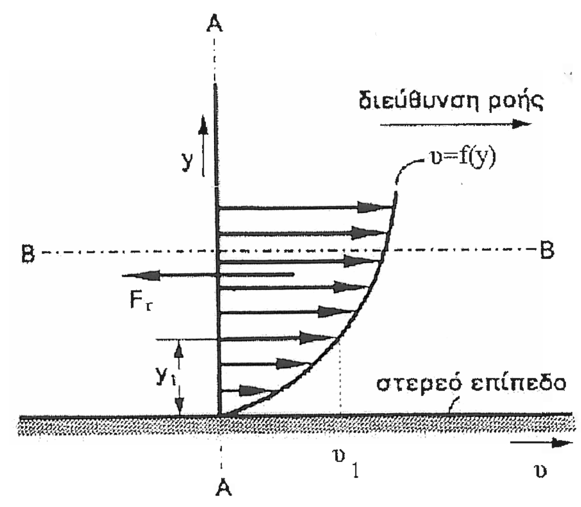
Τα *πραγματικά αέρια* ακολουθούν ικανοποιητικά την καταστατική εξίσωση των τελείων αερίων όταν βρίσκονται σε χαμηλές πιέσεις και υψηλές θερμοκρασίες. Όμως, με την αύξηση της πίεσης (ή τη μείωση της θερμοκρασίας), η απόκλιση της συμπεριφοράς των πραγματικών αερίων από εκείνη των τελείων αερίων μεγαλώνει συνεχώς και γίνεται αρκετά σημαντική κοντά στο κρίσιμο σημείο του αερίου. Στις περιπτώσεις αυτές, για την περιγραφή της ογκομετρικής συμπεριφοράς των αερίων χρησιμοποιούνται είτε πειραματικά δεδομένα είτε περισσότερα σύνθετες καταστατικές εξισώσεις.
Τα αέρια, αντίθετα προς τα υγρά, δεν μπορεί να θεωρηθούν ασυμπίεστα ρευστά. Για να συνειδητοποιήσουμε τη μεγάλη διαφορά συμπιεστότητας μεταξύ υγρών και αερίων, ας συγκρίνουμε τις συμπιεστότητες του νερού και του αέρα με τη συμπιεστότητα του μαλακού χάλυβα. Σε συνήθης συνθήκες, τα μέτρα συμπιεστότητας του χάλυβα, του νερού και του αέρα είναι κατά προσέγγιση $588 \times 10^{-14}$, $453 \times 10^{-12}$ και $966 \times 10^{-8}$ $Pa^{-1}$ αντίστοιχα. Από τη σύγκριση των τιμών αυτών προκύπτει ότι το νερό είναι περίπου 80 φορές και ο αέρας 1 600 000 φορές πιο συμπιεστός από το χάλυβα. Δηλαδή, σε συνήθεις συνθήκες, ο αέρας είναι περίπου 21 000 φορές περισσότερο συμπιεστός από το νερό.

## ΙΞΩΔΕΣ Ή ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Το *ιξώδες*, $\mu$, είναι η ιδιότητα εκείνη των ρευστών που τους δίνει τη δυνατότητα να αντιστέκονται σε κάθε προσπάθεια αλλαγής της μορφής τους. Η ιδιότητα



αυτή οφείλεται στην αλληλεπίδραση, κατά την σχετική κίνηση των μορίων, δύο συνεχών και παράλληλων στρωμάτων ρευστού.
Ας θεωρήσουμε ένα ασυμπίεστο ρευστό που ρέει επάνω από κάποιο συμπαγές οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο Σχ. 1-2 . Τα στρώματα του ρευστού που ρέουν κοντά στη στερεή επιφάνεια, δέχονται δυνάμεις τριβής οι οποίες ελαττώνουν την ταχύτητα των στρωμάτων αυτών. Παραδεχόμαστε έτσι ότι τα σημεία του ρευστού που έρχονται σε άμεση επαφή με το στερεό επίπεδο κινούνται με μηδενική ταχύτητα, ενώ η ταχύτητα αυξάνεται καθώς απομακρυνόμαστε από το επίπεδο αυτό. Αν επομένως μετρήσουμε σε κάποιο σημείο της ροής (τομή AA, Σχ. 1-2) τις ταχύτητες του ρευστού σε διάφορα ύψη y από το επίπεδο, θα πάρουμε ένα γράφημα της ταχύτητας συναρτήσει του y που θα έχει περίπου την μορφή του Σχ. 1-2, και που ονομάζεται προφίλ της ταχύτητας. Πρέπει εδώ να τονιστεί ότι η μεταβολή της ταχύτητας του ρευστού οφείλεται στην ύπαρξη των αλλεπάλληλων στρωμάτων του ρευστού που ρέουν παράλληλα με την διεύθυνση της ροής. Έτσι, αν σε κάποιο ύψος y , θεωρήσουμε μια διαχωριστική παράλληλη επιφάνεια BB μπορούμε να πούμε ότι το μέρος του ρευστού που βρίσκεται επάνω από την BB ασκεί μια δύναμη τριβής $F_\tau$ στα τοιχώματα του ρευστού που βρίσκονται κάτω από την επιφάνεια αυτή, αναγκάζοντας έτσι τα στρώματα αυτά να κινηθούν με ταχύτητες μικρότερες από αυτές των επάνω στρωμάτων. Είναι φανερό ότι οι τριβές αυτές έχουν μεγαλύτερες τιμές στα στρώματα του ρευστού που είναι γειτονικά με την στερεή επιφάνεια. Αν οι τριβές αυτές εκφραστούν ανά μονάδα επιφάνειας



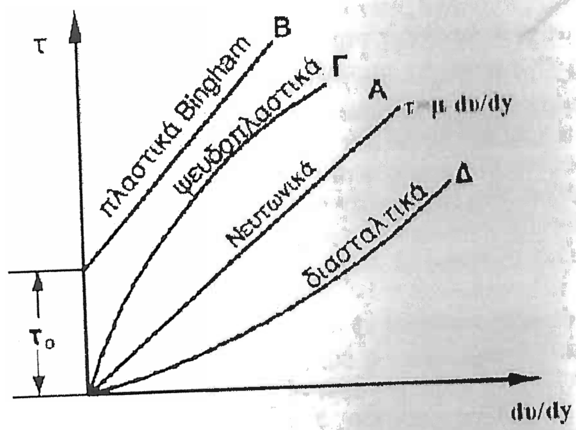

Σχ. 1-2 Προφίλ της Ταχύτητας σε Ροή Παράλληλη Στερεής Επιφάνειας

ονομάζονται *τάσεις τριβής*, τ ,και έχουν μονάδες ίδιες με αυτές της πίεσης.

$$\tau = F_t / A \qquad (1\text{-}8)$$

όπου, $F_\tau$ η δύναμη τριβής και Α το εμβαδό της επιφάνειας στην οποία ασκείται η $F_\tau$.

Οι τάσεις τριβής μπορούν να ονομαστούν και *διατμητικές τάσεις* επειδή τείνουν να προκαλέσουν διάτμηση (διαχωρισμό, διαίρεση) μεταξύ των παραλλήλων στρωμάτων του ρευστού.
Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε κατανοητό ότι οι διατμητικές τάσεις που ασκούνται μεταξύ των στρωμάτων ενός ρευστού που ρέει προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση, προκαλούν μεταβολή της ταχύτητας υ του ρευστού σε σχέση με το ύψος y από την στερεή επιφάνεια. Είναι λογικό λοιπόν να υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποια σχέση μεταξύ της διατμητικής τάσης τ και του *ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας συναρτήσει του ύψους* du/dy.
Αν τώρα για σταθερή πίεση και θερμοκρασία και σε διάφορα ύψη y προσδιοριστούν οι ρυθμοί μεταβολής της ταχύτητας du/dy για τις αντίστοιχες διατμητικές τάσεις τ, μπορεί να προκύψει ένα γράφημα σαν αυτό του Σχ. 1-3.




Σχ. 1-3 Η Συμπεριφορά των Νευτωνικών και μη Νευτωνικών Ρευστών

Στο Σχ. 1-3 υπάρχουν τέσσερις μορφές καμπυλών που παριστάνουν τη μεταβολή της διατμητικής τάσης τ συναρτήσει του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας du/dy, οι οποίες χαρακτηρίζουν τέσσερις διαφορετικές κατηγορίες ρευστών με διαφορετική ρεολογική συμπεριφορά.



Η απλούστερη και συνηθέστερη κατηγορία είναι αυτή που αντιστοιχεί στην καμπύλη (ευθεία) Α. Η ευθεία αυτή εκφράζεται από μια γραμμική σχέση της μορφής:

$$\tau = \mu \; du/dy \qquad (1\text{-}9)$$

όπου, τ η διατμητική τάση, du/dy ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας συναρτήσει του ύψους και μ *ο συντελεστής εσωτερικών τριβών*, ή *ο συντελεστής ιξώδους* ή απλά *το ιξώδες*.

Η εξίσωση (1-9) προβλέπει ότι η διατμητική τάση είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της ταχύτητας. Τα ρευστά που ανήκουν στην κατηγορία αυτή ονομάζονται **Νευτώνια**. Γενικά, νευτωνική συμπεριφορά εμφανίζουν τα αέρια, τα περισσότερα από τα συνήθη υγρά και τα διαλύματα ουσιών μικρού μοριακού βάρους. Τα πιο κοινά Νεωτονικά ρευστά είναι το νερό και ο αέρας. Η μορφή της καμπύλης Β που είναι επίσης γραμμική χαρακτηρίζει την κατηγορία των πλαστικών υγρών που ονομάζονται *πλαστικά Bingham*. Τα ρευστά αυτά απαιτούν μια αρχική διατμητική τάση $\tau_0$ για να αρχίσει η ροή τους και στην συνέχεια ακολουθούν την συμπεριφορά των Νευτωνικών ρευστών. Παράδειγμα τέτοιων ρευστών είναι τα υγρά απόβλητα αιωρήματα μεγάλης πυκνότητας. **Η** σχέση που ισχύει εδώ είναι αντίστοιχη της (1.9) και έχει την μορφή:

$$\tau = \tau_0 + \mu \; du/dy \qquad (1\text{-}10)$$

Η καμπύλη Γ χαρακτηρίζει τα λεγόμενα *ψευδοπλαστικά* ρευστά και χαρακτηρίζεται από μία μεγάλη κυρτότητα για μικρές τιμές των μεταβλητών (τ, du/dy) ενώ η μορφή της γίνεται σχεδόν ευθεία για μεγάλες διατμητικές τάσεις. Στα ρευστά αυτά το ιξώδες δεν είναι πλέον ανεξάρτητο της διατμητικής τάσης και ελαττώνεται με την αύξηση της. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν διάφορα κολλοειδή διαλύματα ή γαλακτώματα (π.χ. κολλοειδές διάλυμα καουτσούκ). Τέλος, η κατηγορία των ρευστών που η συμπεριφορά τους ακολουθεί την μορφή της καμπύλης Δ χαρακτηρίζεται από αύξηση του ιξώδους σε σχέση με την αύξηση της διατμητικής τάσης. Για τον λόγο αυτό τα ρευστά αυτά μπορούν να ονομαστούν *διασταλτικά (dilatant fluids)*. Παράδειγμα τέτοιας συμπεριφοράς αποτελούν τα διάφορα αιωρήματα άμμου. Στην γενικότητα τα ρευστά που ανήκουν στις κατηγορίες Β, Γ, Δ μπορούν να ονομαστούν με την κοινή ονομασία μη Νευτωνικά ρευστά. Είναι εύκολο να αντιληφθούμε ότι η διαφορά των Νευτωνικών από τα μη Νευτωνικά ρευστά είναι ότι το ιξώδες δεν επηρεάζεται από την αύξηση της διατμητικής τάσης για τα Νευτωνικά ρευστά, σε αντίθεση με τα μη Νευτωνικά.
Η μονάδα μέτρησης του ιξώδους *μ* προκύπτει από την εξίσωση (1-9), αν αντικαταστήσουμε σε αυτήν τις μονάδες της διατμητικής τάσης και του ρυθμού διάτμησης. Έτσι αν θέσουμε τ σε (N/m$^2$), υ σε (m/s) και y σε (m) προκύπτει

ότι η μονάδα μέτρησης του ιξώδους μ στο Διεθνές Σύστημα θα είναι το pascal επί δευτερόλεπτο [ 1 Pa s = 1 N s / m$^2$ = 1 kg / (m s)].
Μια μονάδα που χρησιμοποιείται συχνά για τη μέτρηση του ιξώδους είναι το poise (P), το οποίο ισούται με το 1/10 του Pa s:

$$1 \text{ poise} = 0{,}1 \text{ Pa s}$$

Στην πράξη χρησιμοποιείται συνήθως το centipoise (cP):

$$1 \text{ cP} = 10^{-2} \text{ poise} = 10^{-3} \text{ Pa s}$$

Το centipoise είναι πολύ πρακτική μονάδα μέτρησης ιξώδους, επειδή το ιξώδες του νερού σε θερμοκρασία 20 °C είναι περίπου 1 cP. Έτσι, η τιμή του ιξώδους σε centipoise είναι μια ένδειξη του ιξώδους του ρευστού σε σχέση με το ιξώδες του νερού (θερμοκρασίας 20 °C).
Το ιξώδες $\mu$ ονομάζεται συχνά ***δυναμικό ιξώδες*** προς διάκριση από το ***κινηματικό ιξώδες***, *ν*, το οποίο ορίζεται από την εξίσωση:

$$\nu = \mu / \rho \qquad (1\text{-}11)$$

όπου, ρ η πυκνότητα του ρευστού.

Η μονάδα μέτρησης του κινηματικού ιξώδους στο σύστημα S.I. είναι m$^2$/s. Αρκετά συχνά αντί της μονάδας αυτής, χρησιμοποιείται το stokes (St):

$$1 \text{ St} = 1 \text{ cm}^2/\text{s} = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$$

Το ιξώδες *των Νευτωνικών ρευστών* εξαρτάται από τη μοριακή φύση του ρευστού, την πίεση και την θερμοκρασία. Στην περίπτωση μιγμάτων, το ιξώδες εξαρτάται και από τη σύσταση του μίγματος.
Σε χαμηλές πιέσεις, το δυναμικό ιξώδες των καθαρών ρευστών είναι πρακτικά ανεξάρτητο από την πίεση και εξαρτάται μόνον από την θερμοκρασία. Σε υψηλές πιέσεις, για δεδομένη θερμοκρασία, το ιξώδες $\mu$ του ρευστού αυξάνεται συνήθως με την αύξηση της πίεσης. Για παράδειγμα, το ιξώδες του νερού θερμοκρασίας 20 °C σε πίεση 10000 atm είναι περίπου 2 cP. Αντίθετα προς το δυναμικό ιξώδες, το κινηματικό ιξώδες των υγρών και, κυρίως των αερίων εξαρτάται από την πίεση ακόμη και σε χαμηλές πιέσεις. Αυτό οφείλεται στην εξάρτηση της πυκνότητας των ρευστών (ιδιαίτερα των αερίων) από την πίεση.
Αντίθετα προς την πίεση, η θερμοκρασία επηρεάζει (και μάλιστα σε σημαντικό βαθμό) το ιξώδες των ρευστών. Όμως, η επίδραση αυτή δεν είναι ίδια και για τα δύο είδη ρευστών. Έτσι, ενώ το ιξώδες των αερίων (και των ατμών) αυξάνεται, το ιξώδες των υγρών μειώνεται με την αύξηση της θερμοκρασίας.
Η διαφορετική επίδραση της θερμοκρασίας στο ιξώδες των υγρών και των



αερίων μπορεί να εξηγηθεί αν ληφθεί υπόψη η μοριακή φύση του ρευστού. Η αντίσταση των ρευστών σε διάτμηση (άρα και το ιξώδες τους) εξαρτάται από τις διαμοριακές δυνάμεις (δυνάμεις συνοχής) και την ταχύτητα μεταφοράς μοριακής ορμής από μια περιοχή του ρευστού σε άλλη. Στα υγρά οι αποστάσεις μεταξύ των μορίων είναι πολύ μικρότερες από τις αντίστοιχες αποστάσεις στα αέρια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι δυνάμεις συνοχής στα υγρά να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες δυνάμεις στα αέρια. Έτσι, στα μεν υγρά, η αντίσταση σε διάτμηση οφείλεται κυρίως στις δυνάμεις συνοχής, στα δε αέρια, στην ταχύτητα μεταφοράς μοριακής ορμής (η οποία εξαρτάται από την ταχύτητα κίνησης των μορίων του). Με την αύξηση της θερμοκρασίας, οι δυνάμεις συνοχής μειώνονται, ενώ αντίθετα, η ταχύτητα κίνησης των μορίων αυξάνεται, γεγονός που δικαιολογεί και τη διαφορετική συμπεριφορά της θερμοκρασίας στο ιξώδες των υγρών και των αερίων.
Το ιξώδες των *μη Νευτωνικών ρευστών* εξαρτάται, εκτός από τη θερμοκρασία και την πίεση, και από το ρυθμό διάτμησης του ρευστού. Σε ορισμένα μάλιστα μη Νευτωνικά ρευστά εξαρτάται και από άλλους παράγοντες, όπως, π.χ., το χρόνο διάτμησης του ρευστού ή, ακόμη και τη γεωμετρία του χώρου όπου βρίσκεται το διατεμνόμενο ρευστό.
Τα ιξώδη των ρευστών μετριούνται πειραματικά με τη χρησιμοποίηση ειδικών οργάνων τα οποία ονομάζονται *ιξωδόμετρα*. Υπάρχουν πολλοί τύποι ιξωδομέτρων, οι οποίοι στηρίζονται και σε διαφορετικό τρόπο προσδιορισμού του ιξώδους π.χ. ιξωδόμετρα περιστροφής, ιξωδόμετρα ταλάντωσης.

**ΠΙΕΣΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ**

Σύμφωνα με τον ορισμό που δόθηκε στην παράγραφο 1-1, τα ρευστά είναι υλικά σώματα τα οποία ρέουν όταν βρίσκονται υπό την επίδραση μιας εφαπτομενικής δύναμης, οσοδήποτε μικρή και αν είναι. Επομένως στα σωματίδια των ρευστών που βρίσκονται σε *στατική ισορροπία*, ασκούνται μόνο κάθετες επιφανειακές δυνάμεις. Οι επιφανειακές δυνάμεις που δρουν πάνω σε ακίνητα σωματίδια του ρευστού είναι *δυνάμεις πίεσης*. Η ανά μονάδα επιφάνειας δύναμη που ασκείται πάνω στην επιφάνεια ενός ακίνητου σωματιδίου ρευστού από το περιβάλλον του ονομάζεται *στατική πίεση*, $P_{στατική}$.

$$P_{στατική} = F / A \qquad (1\text{-}12)$$

όπου, F είναι η δύναμη και A το εμβαδό της επιφάνειας επάνω στην οποία ασκείται η δύναμη.

Η μονάδα μέτρησης της πίεσης στο S.I. είναι N/m$^2$ ή το Pa.

**ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΣΤΑ ΡΕΥΣΤΑ**

Η μεταβολή της πίεσης, dP, σε ένα συμπιεστό ρευστό που οφείλεται σε υψομετρικές διαφορές δίνεται από την σχέση:

$$dP = -\gamma\, dh \qquad (1\text{-}13)$$

όπου, $\gamma(=\rho g)$ το ειδικό βάρος του ρευστού και dh η υψομετρική διαφορά.

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει το νόμο κατανομής της πίεσης σε ρευστά τα οποία βρίσκονται σε στατική ισορροπία. Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι στα ηρεμούντα ρευστά η πίεση ελαττώνεται προς τα ανώτερα στρώματα του ρευστού.

**ΥΨΟΣ ΠΙΕΣΗΣ**

Η αναλογία πίεσης και ύψους (βάθους) επιτρέπει την μέτρηση της πίεσης σε *μήκος στήλης*.
*Ύψος πίεσης, h (σε m ρευστού)*, παριστάνει το ύψος μιας στήλης ομογενούς ρευστού που δημιουργεί μια ορισμένη πίεση και δίνεται από την σχέση:

$$h = P / \gamma \qquad (1\text{-}14)$$

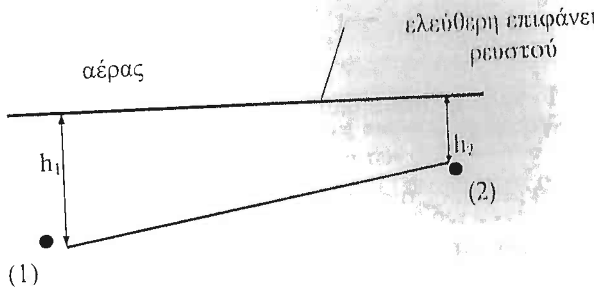
όπου, P η πίεση και γ το ειδικό βάρος του ρευστού

**ΔΙΑΦΟΡΑ ΠΙΕΣΗΣ**

Η διαφορά πίεσης μεταξύ δύο τυχόντων σημείων με διαφορικό υψόμετρο σε ένα ασυμπίεστο ρευστό (όπως είναι τα υγρά σε συνήθεις συνθήκες) δίνεται, σύμφωνα με την εξίσωση (1-13), από την σχέση:

$$P_1 - P_2 = \gamma\,(h_1 - h_2) \qquad (1\text{-}15)$$

όπου, $P_1$ και $P_2$ είναι οι πιέσεις του ρευστού στις θέσεις (1) και (2) αντίστοιχα, $(h_1 - h_2)$ η υψομετρική διαφορά των θέσεων (1) και (2) και γ το ειδικό βάρος του ρευστού.




Σχ. 1-4 Διαφορά Πίεσης



Αν παραστήσουμε με *h* την υψομετρική διαφορά $(h_1 - h_2)$ των θέσεων (1) και (2) που αντιστοιχεί και στο βάθος του ρευστού η εξίσωση (1.15) γράφεται:

$$P_1 = P_2 + \gamma\, h \qquad (1\text{-}16)$$

Η εξίσωση (1.16) δείχνει ότι, στα ηρεμούντα ασυμπίεστα ρευστά η πίεση μεταβάλλεται *γραμμικά* ως προς το βάθος *h* του ρευστού. Ο τύπος αυτός της κατανομής της πίεσης ονομάζεται *υδροστατική κατανομή*.
Κατά την ανάλυση των υγρών είναι βολικό να χρησιμοποιείται ως επίπεδο αναφοράς η ελεύθερη επιφάνεια. Η πίεση που ασκείται στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, έστω $P_0$, αποτελεί *πίεση αναφοράς* και, στις περισσότερες περιπτώσεις, είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Έτσι, αν στην εξίσωση (1-16) θέσουμε $P_2 = P_0$, προκύπτει ότι η πίεση $P(=P_1)$ σε βάθος *h* κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού δίνεται από την εξίσωση:

$$P = P_0 + \gamma\, h \qquad (1\text{-}17)$$

Η εξίσωση αυτή αποτελεί τη ***θεμελιώδη αρχή της Υδροστατικής***. Σύμφωνα με την αρχή αυτή, η πίεση P δεν είναι ίδια σε όλη την έκταση του υγρού, αλλά είναι συναρτήσει του βάθους *h*. Η διαφορά $P - P_0\,(=\gamma h)$ αναφέρεται συχνά και ως ***υδροστατική πίεση***.

**ΜΕΤΡΟ ΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**

Το *μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο διόγκωσης, E*, εκφράζει τη συμπιεστότητα ενός ρευστού και εκφράζεται με το λόγο της μεταβολής της πίεσης, dP, προς την αντίστοιχη μεταβολή του όγκου, dV, ανά μονάδα όγκου, V, δηλ.

$$E = \frac{dP}{-\frac{dV}{V}} \qquad (1\text{-}18)$$

Η μονάδα μέτρησης της μέτρου ελαστικότητας στο S.I. είναι το Pa (ή $N/m^2$).

## 1-4 Παραδείγματα

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-1**

Η πυκνότητα μιας ουσίας είναι 2800 $kg/m^3$. Να υπολογιστεί η σχετική πυκνότητα, ο ειδικός όγκος και το ειδικό βάρος της ουσίας στις ίδιες συνθήκες.

**Λύση:** Η σχετική πυκνότητα υπολογίζεται από την σχέση,

$$s = \rho_{\text{του σώματος}} / \rho_{\text{νερού}} = 2800 / 1000 = 2{,}8$$

Ο ειδικός όγκος προκύπτει από την σχέση,

$$v = 1 / \rho = 1 / 2800 = 3{,}57\ 10^{-4}\ m^3/kg$$

Το ειδικό βάρος υπολογίζεται από την σχέση,

$$\gamma = \rho\ g = 2800\ 9{,}81 = 27468\ N/m^3$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-2**

Ένα υγρό έχει δυναμικό ιξώδες 15,14 poises και σχετική πυκνότητα 0,964. Να βρεθεί το κινηματικό ιξώδες του ρευστού.

**Λύση:** Το απόλυτο ιξώδες 15,14 poises αντιστοιχεί σε $15{,}14\ 10^{-1}$ Pa s.
Η πυκνότητα του υγρού προκύπτει ότι είναι,

$$\rho_{υγρού} = s\ \rho_{νερού} = 0{,}964\ 1000 = 964\ kg/m^3$$

Οπότε το κινηματικό ιξώδες υπολογίζεται από την σχέση,

$$v = \mu / \rho = 15{,}14\ 10^{-1} / 964 = 1{,}57\ 10^{-3}\ m^2/s$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-3**

Να βρεθεί η υδροστατική πίεση σε βάθος 6 m κάτω από την επιφάνεια του νερού. Επίσης να βρεθεί η απόλυτη πίεση όταν το βαρόμετρο δείχνει 760 mm υδραργύρου σχετικής πυκνότητας 13,57.

**Λύση:** Η υδροστατική πίεση σε βάθος, 6 m κάτω από την επιφάνεια του νερού, υπολογίζεται από την σχέση,

$$P_{υδροστ.} = \rho_{νερού}\ g\ h = 1000\ 9{,}81\ 6 = 58860\ Pa$$

Η απόλυτη πίεση, σε βάθος 6 m κάτω από την επιφάνεια του νερού, θα προκύψει εάν προσθέσουμε στην ατμοσφαιρική πίεση την υδροστατική πίεση.
Η πυκνότητα του υδραργύρου προκύπτει ότι είναι,

$$\rho_{Hg} = s\ \rho_{νερού} = 13{,}57\ 1000 = 13570\ kg/m^3$$

Η ατμοσφαιρική πίεση υπολογίζεται από την σχέση,

$$P_{ατμ} = \rho_{Hg}\ g\ h = 13570\ 9{,}81\ 0{,}76 = 101172{,}5\ Pa$$

Οπότε,

$$P_{απολ} = P_{ατμ} + P_{υδροστ.} = 101172{,}5 + 58860 = 160032{,}5\ Pa$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1-4**

Να βρεθεί η μεταβολή του όγκου 1 $m^3$ νερού στους 26,7°C, όταν η πίεση αυξάνεται κατά 20 bar. Το μέτρο ελαστικότητας του νερού στους 26,7 °C είναι $2{,}24\ 10^9$ Pa.

**Λύση:** Η μεταβολή του όγκου υπολογίζεται από την σχέση,



$$dV = -\ V\ dP / E = -\ 1\ 20\ 10^5 / 2{,}24\ 10^9 = -\ 0{,}00089\ m^3$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

1-1 Να βρεθεί η πυκνότητα και η σχετική πυκνότητα ενός λαδιού του οποίου τα 5,6$m^3$ ζυγίζουν 46800 N.

(Απ. 852 $kg/m^3$, 0,852)

1-2 Μία πλάκα που κινείται με ταχύτητα 0,25 m/s, απέχει 0,5 mm από σταθερή επιφάνεια και απαιτεί διατμητική τάση 2 Pa για να διατηρεί σταθερή τη ταχύτητα της. Να υπολογιστεί το δυναμικό ιξώδες του ρευστού που υπάρχει μεταξύ της πλάκας και της επιφάνειας, εάν το ρευστό είναι Νευτωνικό.

(Απ. 4 $10^{-3}$ Pa s)

1-3 Να βρεθεί ποιό βάθος λαδιού σχετικής πυκνότητας 0,750 θα προκαλεί πίεση 2,75 bar. Επίσης να βρεθεί ποιο βάθος νερού θα προκαλεί την ίδια πίεση.

(Απ. 37,4 m, 28 m)

1-4 Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται από το νερό στον πυθμένα μιας δεξαμενής όταν βάθος του πυθμένα είναι 3 m και η συνολική του επιφάνεια 2 $m^2$.

(Απ. 58860 N)

1-5 Αν η πυκνότητα της θάλασσας είναι 1024 $kg/m^3$ να βρεθεί η υδροστατική πίεση σε βάθος 1500 m κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας.

(Απ. 15068,16 kPa)

1-6 Να βρεθεί η απόλυτη πίεση σε βάθος 16 m κάτω από την επιφάνεια μιας λίμνης νερού. Η βαρομετρική πίεση είναι 760 mm Hg και η σχετική πυκνότητα του υδραργύρου 13,57.

(Απ. 258132,5 Pa)

1-7 Να μετατραπεί το ύψος πίεσης 15 m νερού σε ύψος στήλης λαδιού πυκνότητας 750 $kg/m^3$.

(Απ. 20 m)

1-8 Ποιά είναι η ελάχιστη διάμετρο που πρέπει να έχει μια σωληνογραμμή για να μπορεί να διέρχονται 0,25 kg/s αέρα με μέγιστη ταχύτητα 6 m/s. Η θερμοκρασία του αέρα είναι 27 °C, η πίεση 2,3 bar και η σταθερά $R^*$ του αέρα $R^*$ = 287 J/kg K.

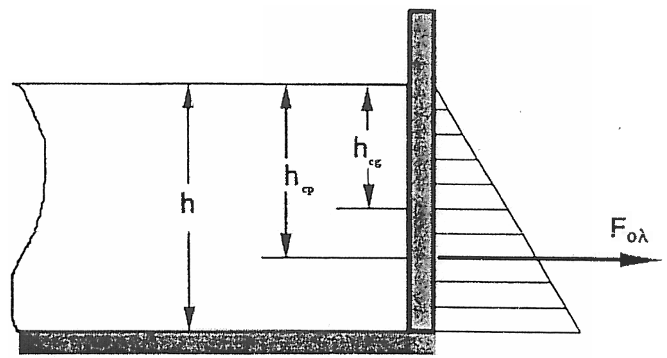
(Απ. 0,14 m)

# Υδροστατικές Δυνάμεις σε Επίπεδες Επιφάνειες

## 2-1 Εισαγωγή

Η πίεση που ασκεί ένα υγρό, προκαλεί την εφαρμογή δύναμης σε κάθε επιφάνεια, που είναι βυθισμένη μέσα στο υγρό. Τέτοιες δυνάμεις ασκούνται για παράδειγμα σε έναν υδατοφράκτη, στα τοιχώματα ενός δοχείου που είναι γεμάτο με υγρό κ.λ.π.

Η σχέση 1-14 ($P = \gamma\ h$) επιτρέπει να βρούμε την ένταση της υδροστατικής πίεσης *σε οποιοδήποτε σημείο* εντός του ρευστού. Προκειμένου όμως για *επιφάνεια* βυθισμένη μέσα σε ρευστό, τότε η πίεση P σε κάθε σημείο της επιφάνειας (που διαβρέχεται από το ρευστό) πολλαπλασιαζόμενη επί το εμβαδόν στοιχείου της επιφάνειας A μας δίνει την ένταση μιας "*τοπικής*" δύναμης που εφαρμόζεται κάθετα πάνω στο στοιχείο. Στο Σχ. 2-1 φαίνεται η κατανομή των δυνάμεων που ασκεί ένα ρευστό σε επίπεδο κατακόρυφο τοίχωμα. Οι δυνάμεις αυτές αυξάνονται ανάλογα με την απόσταση από την ελεύθερη επιφάνεια (γραμμική παρεμβολή).



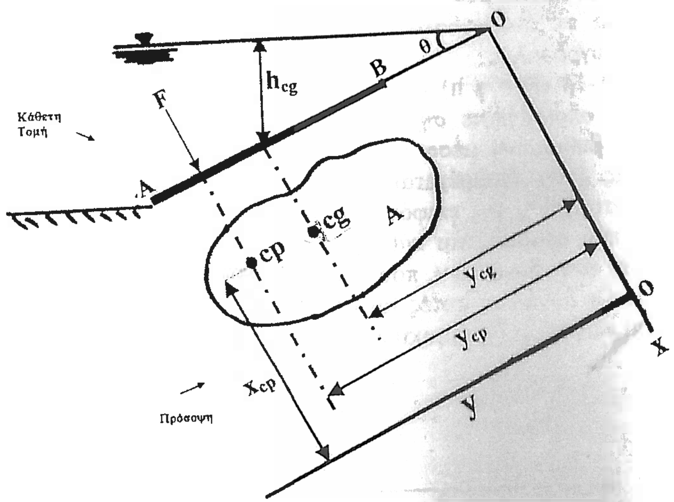

Σχ. 2-1 Κατανομή Δυνάμεων σε Κατακόρυφο Επίπεδο Τοίχωμα

*Το διανυσματικό άθροισμα όλων αυτών των δυνάμεων πάνω στη διαβρωμένη* επιφάνεια δίνει τη ***συνισταμένη δύναμη***, $F_{ολ}$.

Σε αυτό το κεφάλαιο αναπτύσσονται μέθοδοι για τον υπολογισμό τόσο του μεγέθους της $F_{ολ}$ όσο και του σημείου εφαρμογής της.

## 2-2 Δυνάμεις Ρευστών Πάνω σε Επίπεδες Επιφάνειες

Έστω ότι το *AB* παριστάνει επίπεδη επιφάνεια που σχηματίζει γωνία θ με την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού. Το σημείο *cg* είναι το *κέντρο βάρους* και το *cp* το *κέντρο πίεσης* της επιφάνειας. Επιλέγομαι το σύστημα αξόνων x και y (βλ, Σχ. 2-2) των οποίων το επίπεδο περιέχει την παραπάνω επιφάνεια και έχει τον άξονα x επάνω στην ελεύθερη επιφάνεια και το y κάτω από την γωνία θ ως




Σχ 2-2 Δύναμη σε Επίπεδη Επιφάνεια

προς τον ορίζοντα οπότε και οι αποστάσεις $y_{cg}$ και $y_{cp}$ μετριόνται κατά μήκος της επιφάνειας ως προς τον άξονα που βρίσκεται στην τομή της επιφάνειας με την ελεύθερη επιφάνεια του νερού (σημείο O).
Η υδροστατική δύναμη που ασκείται επάνω σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dA είναι ίση με το γινόμενο της πίεσης P(=ρgh) επί το εμβαδό dA. *Το μέγεθος της συνισταμένης δύναμης του ρευστού, $F_{ολ}$,* πάνω στην επίπεδη επιφάνεια η οποία βρέχεται από το ρευστό μπορεί να υπολογιστεί, εάν αθροίσουμε τα γινόμενα της πίεσης επί τις στοιχειώδεις επιφάνειες και δίνεται από την σχέση:

$$F_{ολ} = \rho\, g\, h_{cg}\, A \qquad (2\text{-}1)$$

όπου, ρ πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, A το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας AB που βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό, $h_{cg}$ η κατακόρυφη απόσταση ***του κέντρου βάρους*** της επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού.



Για να προκύψει η σχέση (2-1) λαμβάνουμε υπόψη ότι:

$$h_{cg} = y_{cg} \sin\theta \qquad (2\text{-}2)$$

όπου, $h_{cg}$ η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους της επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του ρευστού, *$y_{cg}$ η συντεταγμένη του κέντρου βάρους της επιφάνειας από το σημείο O* και θ η γωνία που σχηματίζει η επιφάνεια AB με την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού ( sin θ = 1, όταν θ = 90° όποτε και $h_{cg} = y_{cg}$).

Η σχέση (2-1) είναι γενικής μορφής και παρέχει τη δύναμη σε επίπεδη επιφάνεια οποιασδήποτε μορφής. Με άλλα λόγια η δύναμη που ασκεί ένα ρευστό σε οποιαδήποτε επίπεδη επιφάνεια βυθισμένη μέσα σε αυτό, είναι ίση με το γινόμενο του εμβαδού της επίπεδης επιφάνειας επί την υδροστατική πίεση στο γεωμετρικό κέντρο της. Στο σημείο αυτό τονίζεται ότι το γεωμετρικό κέντρο της επίπεδης επιφάνειας δεν ταυτίζεται πάντα με το σημείο που ασκείται η δύναμη.
*Το σημείο εφαρμογής* της $F_{ολ}$ βρίσκεται *στο κέντρο πίεσης (c.p.)* της επίπεδης επιφάνειας που υπολογίζεται με τη βοήθεια του θεωρήματος των ροπών (το άθροισμα των ροπών όλων των δυνάμεων γύρω από ένα άξονα αναφοράς ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης). Διαλέγουμε για άξονα αναφοράς την τομή της επίπεδης επιφάνειας με την επιφάνεια του υγρού οπότε και όλες οι αποστάσεις, x και y, μετριόνται από αυτόν τον άξονα.
Έστω ότι η δύναμη $F_{ολ}$ διέρχεται από το σημείο **($x_{cp}$, $y_{cp}$)** του κέντρου πίεσης. *Η τιμή του $y_{cp}$* μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας το θεώρημα των ροπών στον άξονα των x, αφού ληφθεί υπόψη η *ροπή αδρανείας της επίπεδης επιφάνειας*, και δύνεται από την σχέση:

$$y_{cp} = I_{cg} / y_{cg} A + y_{cg} \qquad (2\text{-}3)$$

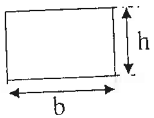
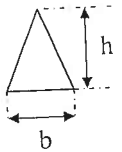
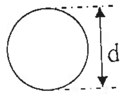
όπου, ***$I_{cg}$*** η ροπή αδρανείας ως προς τον οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους της επίπεδης επιφάνειας, $y_{cg}$ η συντεταγμένη του κέντρου βάρους της επιφάνειας από το σημείο O και A το εμβαδό της επίπεδης επιφάνειας που βρίσκεται σε επαφή με το ρευστό.

Η συντεταγμένη $x_{cp}$ μπορεί να βρεθεί με τον ίδιο τρόπο. Εδώ πρέπει να αναφερθεί ότι αν ένας τουλάχιστον από τους άξονες που περνάει από το κέντρο βάρους της επιφάνειας συμπίπτει με άξονα συμμετρίας της επίπεδης επιφάνειας τότες το κέντρο πίεσης βρίσκεται πάνω στον άξονα που περνάει από το κέντρο βάρους, οπότε και $x_{cp} = x_{μεσο}$.

Ο προσδιορισμός των γεωμετρικών κέντρων των επιφανειών και οι ροπές αδρανείας ορισμένων σχημάτων δίνονται στον Πίνακα 2-1.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2-1

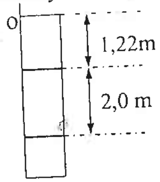
Ιδιότητες Επιφανειών

| ΟΝΟΜΑ | ΣΧΕΔΙΟ | ΕΜΒΑΔΟ | ΚΕΝΤΡΟ ΒΑΡΟΥΣ | ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ ($I_x$) |
|---|---|---|---|---|
| Ορθογώνιο |  | b h | h/2 | $I_{cg}=bh^3/12$ |
| Τρίγωνο |  | b h/2 | 2/3h | $I_{cg}=bh^3/36$ |
| Κύκλος |  | $\pi\ d^2/4$ | d/2 | $I_{cg}=\pi d^4/64$ |

## 2-3 Παραδείγματα

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-1

Να βρεθεί η δύναμη και το κέντρο πίεσης σε μια κατακόρυφη ορθογωνική επίπεδη επιφάνεια που βρίσκεται μέσα σε νερό. Η ορθογωνική επιφάνεια έχει διαστάσεις 1m επί 2 m και βρίσκεται 1,22m κάτω από την επιφάνεια του νερού.




**Λύση:** Το εμβαδό της ορθογωνικής επιφάνειας είναι A = 1 2 = 2 m² και το κέντρο βάρος βρίσκεται σε h/2=2/2=1 m. Η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους της ορθογωνικής επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού, $h_{cg}$, υπολογίζεται ότι είναι $h_{cg} = 1,22 + 1 = 2,22$ m.



Επομένως η συνισταμένη δύναμη είναι.

$F_{ολ} = \rho\ g\ h_{cg}\ A = 1000\ \ 9,81\ \ 2,22\ \ 2 = 43560$ N

Η ροπή αδρανείας της ορθογωνικής επιφάνειας υπολογίζεται από τον τύπο:

$I_{cg} = bh^3/12 = 1\ 2^3/12 = 0,666$ m$^4$. Επίσης σε κατακόρυφη επιφάνεια

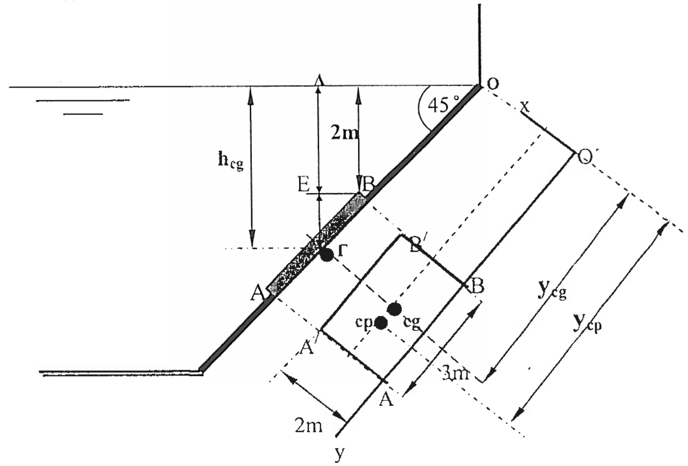
$y_{cg} = h_{cg} = 2,22$ m (θ=90° και sin 90° = 1)

Οπότε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο κέντρο πίεσης βρίσκεται σε απόσταση $y_{cp}$ από τον άξονα O με

$y_{cp} = I_{cg}/\ y_{cg} A\ + y_{cg} = 0,666/2,22\ \ 2 + 2,22 = 2,37$ m (από τον άξονα O).

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2-2

Να βρεθεί η συνισταμένη δύναμη και το κέντρο πίεσης σε ορθογωνική επίπεδη επιφάνεια AB που βρίσκεται (όπως φαίνεται στο σχήμα) μέσα σε νερό. Η ορθογωνική επιφάνεια έχει διαστάσεις 2 m επί 3 m.




**Λύση:** Στην αρχή διαλέγουμε το σύστημα x,y όπου ox είναι πάνω στην επιφάνεια και oy πάνω στην πλευρά AB.

Το εμβαδό της ορθογωνικής επιφάνειας είναι A = 2 3 = 6 m² και το κέντρο βάρος της (σημείο Γ) βρίσκεται σε h/2=3/2=1,50 m. Οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους ως προς το xy-σύστημα αξόνων θα είναι $x_{cg}$ = 2/2= 1 m και $y_{cg}$ = ΓB +BO. Το μήκος ΓB είναι ίσο με h/2 =3/2=1,5 m και το μήκος BO είναι ίσο με BO = 2 / sin 45° = 2,83 m. Οπότε,

$y_{cg}$ = ΓB + BO = 1,50 + 2,83 = 4,33 m

Η κατακόρυφη απόσταση του κέντρου βάρους της ορθογωνικής επιφάνειας από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού $h_{cg}$ υπολογίζεται από την σχέση,

$h_{cg} = y_{cg}$ sin θ = 4,33 sin 45° = 3,06 m (επίσης $h_{cg}$ = ΔΕ + ΕΓ = ΔΕ + + ΓB sin θ° = 2 + 1,5 sin 45° = 3,06 m). Επομένως η συνισταμένη δύναμη είναι,

$F_{ολ} = \rho\ g\ h_{cg}\ A = 1000\ \ 9,81\ \ 3,06\ \ 6 = 180111,6$ N

Η ροπή αδρανείας για ορθογωνική επιφάνεια υπολογίζεται από τον τύπο,

$I_{cg} = bh^3/12 = 2\ 3^3/12 = 4{,}5\ m^4$

Οπότε η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο κέντρο πίεσης βρίσκεται σε απόσταση $y_{cp}$ από τον άξονα O με

$y_{cp} = I_{cg} / y_{cg} A + y_{cg} = 4{,}5/4{,}33\ 6 + 4{,}33 = 4{,}5$ m (από τον άξονα O),

Επίσης επειδή ένας από τους κεντροβαρικούς άξονες (δηλ. ο άξονας που περνάει από το κέντρο βάρους της επιφάνειας) συμπίπτει με άξονα συμμετρίας της ορθογωνικής επιφάνειας $x_{cp} = x_{μεσο} = 2/2 = 1$ m.

### ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

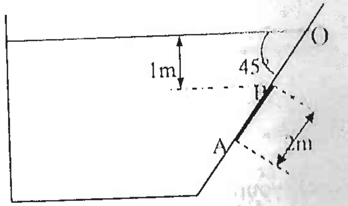
2-1 Κατακόρυφο κυκλικό επίπεδο παράθυρο βρίσκεται σε βάθος 5 m από την επιφάνεια του νερού. Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο παράθυρο και το κέντρο πίεσης. Η διάμετρος του παραθύρου είναι 2 m.

(Απ. 184,82 kN, 6,04 m)

2-2 Να βρεθεί η δύναμη και το κέντρο πίεσης σε κατακόρυφη τριγωνική επίπεδη επιφάνεια της οποίας η κορυφή βρίσκεται σε βάθος 1 m από την επιφάνεια του νερού. Οι διαστάσεις της τριγωνικής επίπεδης επιφάνειας είναι 2 m επί 3 m (b=2m, h=3m).

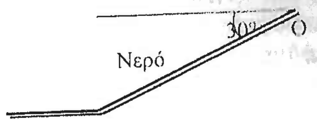
(Απ. 88290 N, 3,1 m)

2-3 Να βρεθεί η δύναμη και το κέντρο πίεσης σε τριγωνική επίπεδη επιφάνεια AB που βρίσκεται (όπως φαίνεται στο σχήμα) μέσα σε νερό. Η τριγωνική επιφάνεια έχει διαστάσεις 1,25 m επί 2 m (η κορυφή του τριγώνου είναι το B).




(Απ. 23789,25 N, 2,82 m από τον άξονα O)

2-4 Να βρεθεί η δύναμη και το κέντρο πίεσης σε ένα τριγωνικό επίπεδο υδατοφράκτη που βρίσκεται (όπως φαίνεται στο σχήμα) μέσα σε νερό. Οι διαστάσεις του τριγωνικού υδατοφράκτη είναι 2 m επί 3 m (b = 2 m, h = 3 m).




(Απ. 29,43 kN, 2,25 m από τον άξονα O)



# Βασικές Εξισώσεις της Ροής των Ρευστών

## 3-1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό δίνονται μερικές απλές σχέσεις που εκφράζουν τους νόμους της ροής των ρευστών καθώς και πρακτικά παραδείγματα εφαρμογής τους.
Για να διευκολυνθεί η κατανόηση και η εξαγωγή των νόμων της ροής των ρευστών αναφέρονται συνοπτικά τα βασικά χαρακτηριστικά ορισμένων τύπων ροής.

## 3-2 ΕΙΔΗ ΡΟΗΣ

Με τον όρο ***ροή*** εννοούμε την κίνηση ενός ρευστού σε μια ορισμένη περιοχή του χώρου, η οποία ονομάζεται ***πεδίο ροής***. Μια δεδομένη ροή, μπορεί να ταξινομηθεί σε διάφορες κατηγορίες ή *είδη ροής* ανάλογα με την διεύθυνση της, τη φύση του ρευστού, τη εξάρτηση της ταχύτητας με τον χρόνο, με τον τρόπο κίνησης των στρωμάτων του ρευστού σε σχέση με την διεύθυνσή της κ.ά.
Ειδικότερα ονομάζουμε:

### ΜΟΝΟΔΙΑΣΤΑΤΗ, ΔΥΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΚΑΙ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΡΟΗ

***Μονοδιάστατη ροή*** ονομάζεται η ροή εκείνη κατά την οποία η μάζα ενός ρευστού κινείται κατά κύριο λόγο παράλληλα προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Παράδειγμα μιας τέτοιας ροής είναι η ροή μέσα από σωλήνες, κανάλια κ.ά.
***Δυσδιάστατη ροή*** ονομάζεται η ροή εκείνη όπου η μάζα του ρευστού κινείται κατά κύριο λόγο προς δύο διευθύνσεις. Έχουμε έτσι την κίνηση του ρευστού επάνω σε ένα επίπεδο για αυτό και η ροή αυτή μπορεί να ονομαστεί επιφανειακή. Απλά παραδείγματα της ροής αυτής είναι, η ροή ενός υγρού που εξαπλώνεται επάνω σε ένα επίπεδο με σταθερό πάχος υγρής στοιβάδας, η κίνηση του αέρα επάνω σε θερμαινόμενες επίπεδες πλάκες κ.ά.
***Τρισδιάστατη ροή*** ονομάζεται η ροή εκείνη όπου η μάζα του ρευστού κινείται προς όλες τις διευθύνσεις στον χώρο και τα μεγέθη που την χαρακτηρίζουν μπορούν να εκφραστούν σαν συνισταμένη τριών συνιστωσών ενός τρισορθογωνίου συστήματος αξόνων. Παραδείγματα μιας τέτοιας ροής είναι η ροή ενός υγρού όταν γεμίζει μια μεγάλη δεξαμενή ή η ροή των αερίων αποβλήτων στην ατμόσφαιρα.

### ΜΗ ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

***Μη μόνιμη ροή*** είναι η ροή εκείνη στην οποία παρατηρείται μεταβολή των χαρακτηριστικών μεγεθών της σε σχέση με τον χρόνο σε κάποιο καθορισμένο σημείο της.

### ΜΟΝΙΜΗ ΡΟΗ

***Μόνιμη ροή*** ονομάζεται η ροή εκείνη στην οποία τα χαρακτηριστικά μεγέθη της (π.χ. η ταχύτητα) δεν μεταβάλλονται σε σχέση με το χρόνο πάνω σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο της.

### ΑΤΡΙΒΗ ΡΟΗ ΚΑΙ ΙΞΩΔΗΣ ΡΟΗ

***Άτριβη ροή*** είναι η ροή ενός ρευστού το οποίο έχει ιξώδες μηδέν (ιδανικό ρευστό). Το βασικό γνώρισμα της άτριβης ροής είναι ότι, σε αυτή, δεν αναπτύσσονται διατμητικές τάσεις αλλά μόνο κάθετες που οφείλονται στην πίεση.
Η έννοια της άτριβης ροής είναι καθαρά θεωρητική, δεδομένου ότι στη φύση δεν υπάρχει κανένα ρευστό το οποίο να έχει ιξώδες μηδέν. Όμως, η αναλυτική μελέτη της ιδεατής αυτής ροής οδηγεί σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα τα οποία συμβάλλουν σημαντικά στην κατανόηση της ρεολογικής συμπεριφοράς των πραγματικών ρευστών. Επίσης η αναλυτική μελέτη των προβλημάτων ροής ρευστών απλουστεύεται σημαντικά όταν η ροή είναι άτριβη.
***Ιξώδης ροή*** ονομάζεται η ροή των πραγματικών ρευστών. Τα πραγματικά ρευστά έχουν όλα ιξώδες, ανεξάρτητα αν αυτό είναι μικρό ή μεγάλο. Η θεώρηση του ιξώδους στην ανάλυση των προβλημάτων της ροής αυξάνει σημαντικά τη δυσκολία διατύπωσης και επίλυσης των εξισώσεων που διέπουν τη ροή του ρευστού.

### ΑΣΤΡΟΒΙΛΗ ΡΟΗ

Η έννοια της άτριβης ροής συνδέεται άμεσα με την έννοια της αστρόβιλης ροής. Ως ***αστρόβιλη ροή*** χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία τα σωματίδια του ρευστού εκτελούν μόνο μεταφορική κίνηση. Αντίθετα, ως ***στροβιλή ροή*** χαρακτηρίζεται η ροή στην οποία τα σωματίδια του ρευστού, ταυτόχρονα με τη *μεταφορική*, εκτελούν και *περιστροφική κίνηση* γύρω από τον εαυτό τους.
Η ύπαρξη αστρόβιλης ροής είναι εφικτή μόνο στην περίπτωση των ιδανικών ρευστών, επειδή σε αυτά δεν αναπτύσσονται ιξώδεις δυνάμεις.

### ΣΤΡΩΤΗ ΚΑΙ ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

***Στρωτή ροή*** ονομάζεται η ιξώδης ροή κατά την οποία το ρευστό κινείται ομαλά και κατά στρώματα χωρίς τα σωματίδια του ρευστού ενός στρώματος να μεταφέρονται στο αμέσως γειτονικό του. Δηλαδή, σε αυτό το είδος της ροής, δε συμβαίνει ανάμειξη των γειτονικών στρωμάτων του ρευστού. Η επικοινωνία των στρωμάτων αυτών γίνεται μόνο σε μοριακό επίπεδο.



***Τυρβώδη ροή*** ονομάζεται η ιξώδης ροή κατά την οποία τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σε ακανόνιστες τροχιές προς όλες τις διευθύνσεις κατά εντελώς τυχαίο τρόπο. Έτσι, κατά την τυρβώδη ροή, συμβαίνει ανάμειξη των γειτονικών στρωμάτων του ρευστού.
Η βασική παράμετρος η οποία χαρακτηρίζει το είδος μιας ροής (ως στρωτή ή τυρβώδης) είναι ο ***αριθμός Reynolds***, *Re*, ο οποίος για ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής ορίζεται από την σχέση:

$$Re = \rho\, \upsilon\, d / \mu \qquad (3\text{-}1)$$

όπου, d είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού, ρ η πυκνότητα, υ η ταχύτητα και μ το δυναμικό ιξώδες του ρευστού.

Αν ο λόγος μ/ρ αντικατασταθεί με το κινηματικό ιξώδες ν η εξίσωση (3-1) γράφεται:

$$Re = \upsilon\, d / \nu \qquad (3\text{-}2)$$

Στην πράξη, δεχόμαστε ότι η μετατροπή της ιξώδους ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται όταν ο αριθμός Reynolds υπερβεί μια κρίσιμη τιμή, $Re_c$ = = 2000, η οποία είναι γνωστή ως ***κρίσιμος αριθμός Reynolds.***

### ΑΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

***Ασυμπίεστη ροή*** ονομάζεται η ροή ενός ρευστού (πραγματικού ή ιδανικού) κατά την οποία οι μεταβολές της πυκνότητας σε όλη την έκταση του πεδίου ροής είναι αμελητέες.

### ΣΥΜΠΙΕΣΤΗ ΡΟΗ

***Συμπιεστή ροή*** ονομάζεται η ροή κατά την οποία η μεταβολές της πυκνότητας είναι σημαντικές. Τα φαινόμενα συμπιεστότητας εμφανίζονται συνήθως σε υψηλές ταχύτητες. Όταν η ταχύτητα του ρευστού μεταβάλλεται σημαντικά, η πίεση (άρα, και η πυκνότητα του) μεταβάλλεται, επίσης σημαντικά.

### ΡΟΪΚΗ ΓΡΑΜΜΗ

***Ροϊκή γραμμή*** ενός πεδίου ροής ονομάζεται κάθε γραμμή η οποία έχει την ιδιότητα η εφαπτόμενη σε κάθε σημείο της να συμπίπτει με τη διεύθυνση του διανύσματος της ταχύτητας του ρευστού σε εκείνο το σημείο, μια δεδομένη χρονική στιγμή. Οι ροϊκές γραμμές είναι ανάλογες προς της γραμμές των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων.

Οι ροϊκές γραμμές είναι " *στιγμιαίες* " γραμμές. Δηλαδή, το σχεδιογράφημα ενός πεδίου ροής με ροϊκές γραμμές δίνει τη μορφή της ροής σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.
Ο πειραματικός προσδιορισμός των ροϊκών γραμμών είναι γενικά δυσχερής. Για το λόγο αυτό, η χάραξη των ροϊκών γραμμών γίνεται υπολογιστικά.

ΡΟΪΚΟΣ ΣΩΛΗΝΑΣ

***Ροϊκός σωλήνας*** είναι ένας σωλήνας τα τοιχώματα του οποίου αποτελούνται από ροϊκές γραμμές .

### 3-3 Ισοζύγιο Μάζας κατά μήκος Ροϊκού Σωλήνα - Εξίσωση της Συνέχειας

Ας θεωρήσουμε ένα ροϊκού σωλήνα μέσα στον οποίο κινείται ένα ρευστό (βλ. Σχ. 3-1). Έστω $A_1$ και $A_2$ τα εμβαδά των διατομών του σωλήνα κάθετα προς την διεύθυνση της ροής σε δύο διαφορετικά σημεία (1) και (2). Αν η ταχύτητα στην είσοδο του σωλήνα είναι ομοιόμορφη κατανεμημένη, με σταθερή τιμή $\upsilon_1$ ενώ στην έξοδο έχει αντίστοιχη τιμή $\upsilon_2$, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:
" Η μάζα του ρευστού που εισέρχεται στο ροϊκό σωλήνα, ισούται με τη μάζα του ρευστού που εξέρχεται στον ίδιο χρόνο ".
Δηλαδή σε χρόνο t:

$$m_1 = m_2$$

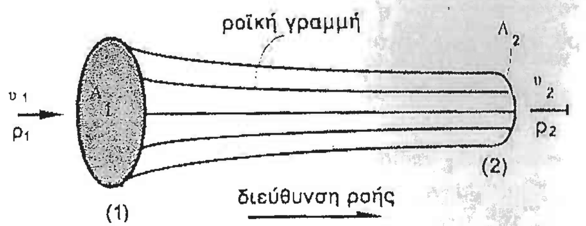
ή

$$m_1 / t = m_2 / t$$

ή

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \qquad (3\text{-}3)$$

όπου, $\dot{m}$ είναι το σύμβολο της " μαζικής ροής " ή " μαζικής παροχής " και ορίζεται σαν την μάζα που διέρχεται από μία διατομή ανά μονάδα χρόνου.




Σχ. 3-1 Ισοζύγιο Μάζας κατά μήκος Ροϊκού Σωλήνα

Ισχύει όμως:



$$\dot{m} = \rho \dot{V} \qquad (3\text{-}4)$$

όπου, ρ είναι η πυκνότητα του ρευστού και $\dot{V}$ το σύμβολο της "ογκομετρικής παροχής " και ορίζεται σαν τον όγκο που διέρχεται από μία διατομή του ροϊκού σωλήνα ανά μονάδα χρόνου.
Για τον υπολογισμό της ογκομετρικής παροχής χρησιμοποιείται η σχέση:

$$\dot{V} = \upsilon A \qquad (3\text{-}5)$$

όπου, A είναι το εμβαδό της διατομής του σωλήνα κάθετα προς την διεύθυνση της ροής και υ η ταχύτητα του ρευστού.
Επομένως:

$$\dot{m}_1 = \rho_1 \upsilon_1 A_1 \quad \text{και} \quad \dot{m}_2 = \rho_2 \upsilon_2 A_2$$

όπου, $\rho_1$ και $\rho_2$ , είναι οι πυκνότητες του ρευστού στα σημεία (1) και (2) αντίστοιχα.
Εφαρμόζοντας την σχέση (3-3) προκύπτει:

$$\rho_1 \upsilon_1 A_1 = \rho_2 \upsilon_2 A_2 \qquad (3\text{-}6)$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται " ***εξίσωση της συνέχειας*** " και όταν εφαρμοστεί σε ασυμπίεστα ρευστά, όπου η πυκνότητα διατηρείται σταθερή ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$), προκύπτει:

$$\dot{V} = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2 \qquad (3\text{-}7)$$

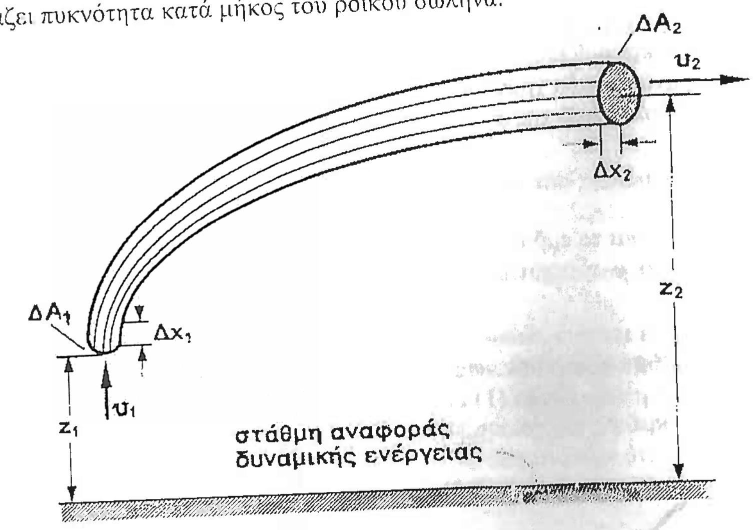
Η εξίσωση της συνέχειας στη γενική της μορφή ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2$) εκφράζεται σαν ισοζύγιο μάζας κατά μήκος ροϊκού σωλήνα ως εξής:

" Η μαζική παροχή ενός ρευστού κατά μήκος ενός ροϊκού σωλήνα παραμένει σταθερή "

### 3-4 Εξίσωση Bernoulli

Η εξίσωση Bernoulli είναι μια από τις ποιο βασικές εξισώσεις της Μηχανικής των Ρευστών. Την εξίσωση Bernoulli θα την εξάγουμε από τη μακροσκοπική εξίσωση ενέργειας.
Ας θεωρήσουμε ένα ροϊκό σωλήνα διατομών εισόδου $\Delta A_1$ και εξόδου $\Delta A_2$ (βλ. Σχ. 3-2). Έστω ότι ένα υγρό πυκνότητας ρέει μέσα στο ροϊκό σωλήνα με μία μόνιμη, μονοδιάστατη, ασυμπίεστη, δυναμική ροή, χωρίς τριβές. Ο όρος " δυναμική ροή ", χρησιμοποιείται εδώ για να δείξει ότι η ταχύτητα του ρευστού

είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη πάνω σε κάθε επιφάνεια κάθετη προς τη διεύθυνση της ροής. Ο όρος " ασυμπίεστη " , υποδηλώνει ότι το ρευστό δεν αλλάζει πυκνότητα κατά μήκος του ροϊκού σωλήνα.




Σχ. 3-2 Ισοζύγιο Ενέργειας κατά μήκος Ροϊκού Σωλήνα (εξίσωση Bernoulli)

Αν θεωρήσουμε Δm την στοιχειώδη μάζα που διέρχεται μέσα από τα τμήματα του ροϊκού σωλήνα με μήκος $\Delta x_1$ και $\Delta x_2$ σε χρόνο Δt, θα έχουμε σύμφωνα με τον νόμο της συνέχειας:

$$\Delta m/\rho = \Delta A_1\ \Delta x_1 = \Delta A_2\ \Delta x_2 \qquad (3\text{-}8)$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει τον όγκο που διαγράφει η μάζα Δm στην είσοδο και στην έξοδο του ροϊκού σωλήνα αντίστοιχα.
Έστω τώρα ότι στην είσοδο του ροϊκού σωλήνα η ταχύτητα της μάζας Δm είναι $\upsilon_1$ και στην έξοδο $\upsilon_2$, ενώ η πίεση μεταβάλλεται από $P_1$ σε $P_2$ αντίστοιχα.
Ταυτόχρονα, εξαιτίας του σχήματος που έχει ο ροϊκός σωλήνας, τα δύο άκρα του απέχουν κατακόρυφα ύψη $z_1$ και $z_2$, από μια θεωρούμενη στάθμη αναφοράς.
Σύμφωνα με την αρχή της διατήρησης της ενέργειας θα πρέπει:

"Μηχανική ενέργεια που έχει η μάζα Δm στην είσοδο + έργο πίεσης στη είσοδο = Μηχανική ενέργεια στην έξοδο + έργο πίεσης στην έξοδο ".

- Μηχανική ενέργεια εισόδου:



- Κινητική ενέργεια: $½\ \Delta m\ \upsilon_1^2$
- Δυναμική ενέργεια: $\Delta m\ g\ z_1$

- Μηχανική ενέργεια εξόδου:

- Κινητική ενέργεια: $½\ \Delta m\ \upsilon_2^2$
- Δυναμική ενέργεια: $\Delta m\ g\ z_2$

- Έργο πίεσης:

Είναι το έργο που καταναλώνεται από την στοιχειώδη μάζα του ρευστού Δm καθώς διέρχεται μέσα από το ροϊκό σωλήνα.
Έτσι για την είσοδο ισχύει:

$$W_1 = P_1\ \Delta A_1\ \Delta x_1$$

Ενώ για την έξοδο:

$$W_2 = P_2\ \Delta A_2\ \Delta x_2$$

Επειδή όμως $\Delta m/\rho = \Delta A_1\ \Delta x_1 = \Delta A_2\ \Delta x_2$ οι παραπάνω σχέσεις μετασχηματίζονται:

$$W_1 = \Delta m/\rho\ P_1 \quad \text{και} \quad W_2 = \Delta m/\rho\ P_2$$

Εφαρμόζοντας την αρχή της διατήρησης της ενέργειας θα έχουμε:

$$\Delta m/\rho\ P_1 + ½\ \Delta m\ \upsilon_1^2 + \Delta m\ g\ z_1 = \Delta m/\rho\ P_2 + ½\ \Delta m\ \upsilon_2^2 + \Delta m\ g\ z_2$$

ή

$$P_1/\rho + ½\ \upsilon_1^2 + g\ z_1 = P_2/\rho + ½\ \upsilon_2^2 + g\ z_2 \qquad (3\text{-}9)$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι προφανώς ανεξάρτητη από τις διαστάσεις του ροϊκού σωλήνα και εξαρτάται από τις τιμές των P, υ, z στην είσοδο και την έξοδο του ροϊκού σωλήνα. Η εξίσωση αυτή είναι γνωστή σαν " ***εξίσωση Bernoulli*** " , και είναι πολύ χρήσιμη για τις πρακτικές εφαρμογές. Από τον τρόπο εξαγωγής της φαίνεται εύκολα ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί και κατά μήκος μιάς ροϊκής γραμμής. Δεν είναι δυνατό να εφαρμόσουμε την παραπάνω εξίσωση σε μη μόνιμη ροή ή σε ροή συμπιεστών ρευστών ή τέλος σε περίπτωση θεώρησης εσωτερικών τριβών κατά την κίνηση του ρευστού. Ακόμη η παραπάνω εξίσωση δεν μπορεί να εφαρμοστεί μεταξύ δύο διατομών στις οποίες η κατανομή της ταχύτητας δεν είναι ομοιόμορφη.

Η έννοια της δυναμικής ροής προσεγγίζεται αρκετά ικανοποιητικά στις περιπτώσεις τυρβώδους ροής, όπου το οριακό στρώμα έχει μικρό πάχος και έτσι δεν επηρεάζει σημαντικά την ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας.
Μια άλλη μορφή της εξίσωσης είναι:

$$P_1/\rho + \frac{1}{2} \upsilon_1^2 + g z_1 = P_2/\rho + \frac{1}{2} \upsilon_2^2 + g z_2 = \text{σταθερό} = E \qquad (3\text{-}10)$$

Στην ουσία η μορφή αυτή αποτελεί έκφραση της αρχής διατήρησης της ενέργειας ή του 1ου θερμοδυναμικού νόμου. Ο πρώτος όρος, $P/\rho$, παριστάνει τη **ενέργεια πίεσης**, ο δεύτερος, $\frac{1}{2} \upsilon^2$, την **κινητική ενέργεια**, ο τρίτος, $g z_1$, την **δυναμική ενέργεια** και ο τέταρτος, E , (το άθροισμα της ενέργειας πίεσης, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας) την **ολική ενέργεια.** Επομένως από φυσική άποψη, η πιο πάνω μορφή της εξίσωσης Bernoulli αναφέρει ότι: *στη μόνιμη, άτριβη και ασυμπίεστη ροή, το άθροισμα της ενέργειας πίεσης, της κινητικής ενέργειας και της δυναμικής ενέργειας κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής παραμένει σταθερό.*
Για να χρησιμοποιηθεί η εξίσωση Bernoulli με ακρίβεια και στις περιπτώσεις ανομοιόμορφης κατανομής της ταχύτητας, θα πρέπει να εισαχθούν διορθωτικές συντελεστές στους όρους της κινητικής ενέργειας, οι οποίες είναι δυνατό να βρεθούν στην βιβλιογραφία για ειδικές περιπτώσεις συστημάτων ροής.
Υπενθυμίζεται ότι, για την κατάστρωση της εξίσωσης Bernoulli, έγιναν επτά βασικές παραδοχές, οι εξής (i) ροή μέσα σε ένα ροϊκό σωλήνα, (ii) ομοιόμορφη ροή στην είσοδο και στην έξοδο του ροϊκού σωλήνα, (iii) μόνιμη ροή, (iv) ασυμπίεστη ροή, (v) το αξονικό έργο είναι μηδέν, (vi) το έργο των επιφανειακών ιξωδών δυνάμεων είναι αμελητέο και (vii) η ροή είναι ισοθερμοκρασιακή.

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

Όταν εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli πρέπει να έχομε υπόψη μας τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

1. Το σύμβολο P, στην εξίσωση Bernoulli παριστάνει την *απόλυτη* πίεση. Όμως, η εξίσωση Bernoulli ισχύει και για *μανομετρικές* πιέσεις.
2. Βασική παραδοχή για την εξίσωση Bernoulli ήταν η μόνιμη ροή. Όμως, η εξίσωση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί, χωρίς σημαντικό σφάλμα, και σε ορισμένες περιπτώσεις μη μόνιμης ροής, όπου η μεταβολές των συνθηκών ροής ως προς τον χρόνο είναι πολύ μικρές, π.χ., στην περίπτωση εκκένωσης μιας δεξαμενής.
3. Η εξίσωση Bernoulli συνδέει την πίεση, την ταχύτητα και το υψόμετρο:
α. Μεταξύ δύο σημείων της ίδιας ροϊκής γραμμής, αν η ροή είναι μόνιμη, άτριβη και ασυμπίεστη.
β. Μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σημείων του πεδίου ροής, αν η ροή είναι μόνιμη, άτριβη, ασυμπίεστη και αστρόβιλη.



## 3-5 Στατική, Υψομετρική και Δυναμική Πίεση

Η εξίσωση (3-9), γράφεται συχνά υπό τη μορφή:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho \upsilon_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \upsilon_2^2 + \rho g z_2 = \text{σταθερό} = P \qquad (3\text{-}11)$$

Το πλεονέκτημα της εξίσωσης αυτής είναι ότι οι όροι της έχουν τις διαστάσεις δύναμης ανά μονάδα επιφανείας, δηλαδή, παριστάνουν πίεση. Ο πρώτος όρος, P, παριστάνει τη **στατική πίεση**, ο δεύτερος, $\frac{1}{2} \rho \upsilon^2$, τη **δυναμική πίεση,** ο τρίτος, $\rho g z_1$, την **υψομετρική πίεση** και ο τέταρτος, P , (το άθροισμα της στατικής πίεσης, της δυναμικής πίεση και της υψομετρικής πίεσης) την **ολική πίεση.** Επομένως από φυσική άποψη, η πιο πάνω μορφή της εξίσωσης Bernoulli αναφέρει ότι: *στη μόνιμη, άτριβη και ασυμπίεστη ροή, το άθροισμα της στατικής πίεσης, της δυναμικής πίεσης και της υψομετρικής πίεσης κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής του πεδίου ροής παραμένει σταθερό.*

## 3-6 Ύψος Πίεσης, Ταχύτητας και Θέσης

Στην υδραυλική, η εξίσωση Bernoulli γράφεται συνήθως υπό τη μορφή:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2 = \text{σταθερό} = h \qquad (3\text{-}12)$$

όπου, $\gamma(=\rho g)$ είναι το ειδικό βάρος του υγρού.

Το πλεονέκτημα της εξίσωσης αυτής είναι ότι οι όροι της έχουν τις διαστάσεις μήκους, έτσι μπορούν να θεωρηθούν ως *ύψη στήλης του ίδιου υγρού.* Ο πρώτος όρος, $P/\gamma$, της εξίσωσης ονομάζεται **ύψος πίεσης**, ο δεύτερος, $\upsilon^2/2g$, **ύψος ταχύτητας** (ή ύψος κινητικής ενέργειας), ο τρίτος, z, **ύψος θέσης** και ο τέταρτος όρος, h, (το άθροισμα του ύψους πίεσης, του ύψους ταχύτητας και του ύψους θέσης) **ολικό ύψος** της ροής. Από φυσική άποψη η πιο πάνω μορφή της εξίσωσης Bernoulli αναφέρει ότι: *στη μόνιμη, άτριβη και ασυμπίεστη ροή, το άθροισμα του ύψους πίεσης, του ύψους ταχύτητας και του ύψους θέσης κατά μήκος μιας ροϊκής γραμμής παραμένει σταθερό.*
Στις τεχνικές εφαρμογές, αντί του ύψους πίεσης, $P/\gamma$, χρησιμοποιείται συνήθως το ύψος μανομετρικής πίεσης, $P^*/\gamma$.

## 3-7 Γραμμή Ενέργειας και Πιεζομετρική Γραμμή Άτριβης Ροής

Η γραμμή ενέργειας είναι μια γραφική απεικόνιση της ενέργειας σε κάθε σημείο της ροής. Σε σχέση με ένα οριζόντιο επίπεδο αναφοράς, η συνολική ενέργεια μπορεί να σχεδιαστεί σε κάθε αντιπροσωπευτική διατομή και η γραμμή που προκύπτει με αυτό τον τρόπο είναι πολύ χρήσιμη σε πολλά προβλήματα ροής. Τα σημεία της γραμμής ενέργειας απέχουν από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς απόσταση ίση με το ολικό ύψος. Η γραμμή ενέργειας θα κλίνει (πέφτει) στην κατεύθυνση της ροής με εξαίρεση τα σημεία όπου προστίθεται ενέργεια από μηχανές.

Η **πιεζομετρική γραμμή** (ή υδραυλική γραμμή) βρίσκεται κάτω από τη γραμμή ενέργειας κατά μια ποσότητα ίση με το ύψος της κινητικής ενέργειας στη διατομή. Τα σημεία της πιεζομετρικής γραμμής απέχουν από το οριζόντιο επίπεδο αναφοράς απόσταση ίση με το άθροισμα του τοπικού ύψους μανομετρικής πίεσης και του αντίστοιχου ύψους θέσης. Το άθροισμα αυτών των δύο υψών αναφέρεται συχνά ως πιεζομετρικό ή υδραυλικό ύψος. Η κατακόρυφος απόσταση μεταξύ της γραμμής ενέργειας και της υδραυλικής γραμμής είναι, εξ ορισμού, ίση με το τοπικό ύψος ταχύτητας.

## 3-8 Ισχύς

Η ισχύς P του ρευστού που ρέει υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P = \rho\, g\, \dot{V}\, h = (kg/m^3)\,(m/s^2)\,(m^3/s)\,(m) = (N\ m/s) \quad (J/s) = W \qquad (3\text{-}13)$$

όπου, ρ η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\dot{V}$ η ογκομετρική παροχή και h το ύψος της ενέργειας του ρευστού (J/N=Nm/N=m).

## 3-9 Παραδείγματα

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-1**

Σε ένα τμήμα κυκλικού αγωγού η διάμετρος ελαττώνεται από 10 cm σε 5 cm. Αν νερό εισέρχεται με σταθερή ταχύτητα 2 m/s στο άνοιγμα διαμέτρου 10cm, να υπολογιστεί η ταχύτητα εξόδου του νερού.

**Λύση:** Η ογκομετρική παροχή, $\dot{V}$, του νερού υπολογίζεται από το γινόμενο της ταχύτητας επί το εμβαδόν, $A_1$, της εγκάρσιας διατομής του αγωγού με διάμετρο 10 cm.

$\dot{V} = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_1 \pi d_1^2/4 = 2\ \pi\ 0{,}1^2/4 = 0{,}016\ m^3/s$

Το εμβαδόν, $A_2$, της εγκάρσιας διατομής του αγωγού με διάμετρο 5 cm είναι:

$A_2 = \pi d_2^2/4 = \pi\ 0{,}05^2/4 = 0{,}002\ m^2$

Από την εξίσωση της συνέχειας έχουμε:

$\dot{V} = \upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$

Στην εξίσωση αυτή, το μόνο άγνωστο είναι το, $\upsilon_2$, το οποίο και υπολογίζουμε:

$\upsilon_2 = \dot{V} / A_2$

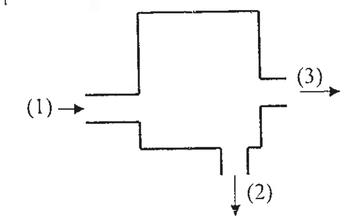
$\upsilon_2 = 0{,}016/0{,}002 = 8\ m/s$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-2**

Μία δεξαμενή τροφοδοτείται με νερό δια μέσου ενός σωλήνα (1) με διάμετρο



4 cm και με ταχύτητα 10 m/s. Η δεξαμενή έχει δύο εξόδους, τους σωλήνες (2) και (3) από τις οποίες το νερό εξέρχεται με μαζική παροχή $\dot{m}_2 = 5kg/s$ και $\dot{m}_3 = 10\ kg/s$ αντίστοιχα. Να υπολογισθεί ο ρυθμός συσσώρευσης της μάζας του νερού στη συσκευή.




**Λύση:** Με βάση την αρχή της διατήρησης της μάζας μπορούμε να γράψουμε:

Ρυθμός εισροής μάζας – Ρυθμός εκροής μάζας = Ρυθμός συσσώρευσης μάζας

$\dot{m}_1 - (\dot{m}_2 + \dot{m}_3) = \dot{m}$

$\dot{m}_1 = \rho\, \dot{V}_1 = \rho\, \upsilon_1 A_1 = 1000\ \ 10\ \ \pi\ \ 0{,}04^2/4 = 12{,}56\ kg/s$

Επομένως ο ρυθμός συσσώρευσης θα είναι:

$12{,}56 - (5 + 10) = \dot{m}$

$\dot{m} = -2{,}44\ kg/s$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η μάζα του νερού στην συσκευή ελαττώνεται με ρυθμό 2,44 kg/s.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-3**

Σε υψόμετρο 36 m πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας ρέει μέσα σε ένα σωλήνα νερό με ταχύτητα 18 m/s και πίεση 350 kN/m$^2$. Να υπολογισθεί η ολική ενέργεια του νερού.

**Λύση:** Η ολική ενέργεια του νερού είναι το άθροισμα της ενέργειας πίεσης, της δυναμικής ενέργειας και της κινητικής ενέργειας:

$E = P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1$

Επομένως η ολική ενέργεια του νερού που ρέει θα είναι:

$E = 350\ 10^3/1000 + ½\ 18^2 + 9{,}81\ 36 = 865{,}16\ J/kg$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-4**

Να προσδιοριστεί η ισχύς που απαιτείται για την ανύψωση κατά 10 m, πετρελαίου σχετικής πυκνότητας 0,8 με ογκομετρική παροχή 28 m$^3$/min. Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες.

**Λύση:** Από την σχετική πυκνότητα του πετρελαίου και την πυκνότητα του νερού υπολογίζουμε την πυκνότητα του πετρελαίου:

$\rho = 0{,}8\ 1000 = 800\ kg/m^3$

Η ισχύς που απαιτείται για την μεταφορά του πετρελαίου υπολογίζεται από την σχέση,

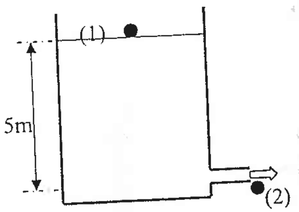
$$P = \rho\, g\, \dot{V}\, h$$

Επομένως η ισχύς που απαιτείται θα είναι:

$$P = 800\ 9{,}81\ 28/60\ 10 = 36624\ W$$

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-5**

Μια δεξαμενή περιέχει νερό και το ύψος του νερού μέσα στην δεξαμενή είναι 5 m επάνω από τον σωλήνα εκροής. Η δεξαμενή έχει πολύ μεγάλες διαστάσεις σε σχέση με τον σωλήνα εκροής ενώ ο τελευταίος συνδέεται με την δεξαμενή δια μέσου εκχείλωσης. Να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής του νερού από την δεξαμενή. Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες.




**Λύση:** Οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται για τη λύση της άσκησης αυτής είναι οι ακόλουθες:

- Επειδή οι διαστάσεις της διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με αυτές της διατομής του αγωγού εκροής, η ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν.
- Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και στο σωλήνα εκροής επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση.
- Ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν κατά την εξαγωγή της εξίσωσης Bernoulli.

Σύμφωνα με τις παραπάνω συνθήκες η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (1), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και του σημείου (2), που είναι το σημείο εξόδου του υγρού από το σωλήνα εκροής. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει:
$z_1 = 5$ m, $z_2 = 0$, $\upsilon_1 = 0$, $P_1 = P_2 = 1$ atm και το μόνο άγνωστο είναι η ταχύτητα εκροής $\upsilon_2$. Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1 = P_2/\rho + ½\, \upsilon_2^2 + g\, z_2$$

$$g\, z_1 = ½\, \upsilon_2^2$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$$9{,}81\ 5 = ½\, \upsilon_2^2$$

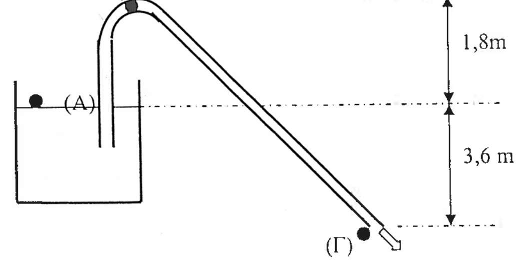
$$\upsilon_2 = 9{,}9\ m/s$$



- Η εξίσωση $\upsilon = \sqrt{2gh}$, που είναι γνωστή ως *εξίσωση Toricelli* αναφέρει ότι: *η ταχύτητα ενός υγρού, το οποίο ρέει υπό την επίδραση της βαρύτητας διαμέσου οπής, η οποία βρίσκεται σε βάθος h από την ελεύθερη επιφάνεια, έχει ταχύτητα, ίση με εκείνη, την οποία θα αποκτούσε, αν έπεφτε ελεύθερα από το ύψος αυτό.*

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-6**

Ένας σωλήνας εκροής με διάμετρο 7,5 cm έχει το υψηλότερο του σημείο σε απόσταση 1,8 m, πάνω από την στάθμη του νερού στη δεξαμενή, το δε νερό εκρέει στον ατμοσφαιρικό αέρα 3,6 m κάτω από την στάθμη του νερού. Να προσδιοριστεί η ταχύτητα εκροής, η ογκομετρική παροχή και η απόλυτη πίεση στο υψηλότερο σημείο του σωλήνα όταν η ατμοσφαιρική πίεση είναι 98100 Pa. Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες.




**Λύση:** Οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται για τη λύση της άσκησης αυτής είναι οι ακόλουθες:

- Επειδή οι διαστάσεις της διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με αυτές της διατομής του αγωγού εκροής, η ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν.
- Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και στο σωλήνα εκροής επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση.
- Ισχύουν όλες οι προϋποθέσεις που αναφέρθηκαν κατά την εξαγωγή της εξίσωσης Bernoulli.

Σύμφωνα με τις παραπάνω συνθήκες για να υπολογιστεί η ταχύτητα εκροής η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (Α), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και του σημείου (Γ), που είναι το σημείο εξόδου του υγρού από το σωλήνα εκροής και παίρνοντας το (Γ) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει:
$z_A = 3{,}6$ m, $z_\Gamma = 0$, $\upsilon_A = 0$, $P_A = P_\Gamma = 98100$ Pa και το μόνο άγνωστο είναι η ταχύτητα εκροής $\upsilon_\Gamma$. Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_A/\rho + ½\, \upsilon_A^2 + g\, z_A = P_\Gamma/\rho + ½\, \upsilon_\Gamma^2 + g\, z_\Gamma$$

$$g\, z_A = ½\, \upsilon_\Gamma^2$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα προκύπτει ότι:

$9{,}81\ 3{,}6 = ½\ υ_Γ^2$

$υ_Γ = 8{,}4$ m/s

Η ογκομετρική παροχή υπολογίζεται από την εξίσωση της συνέχειας:

$\dot V_Γ = υ_Γ\ A_Γ = υ_Γ\ π\ d_Γ^2/4 = 8{,}4\ \ π\ \ 0{,}075^2/4 = 0{,}0371\ m^3/s$

Για να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο (Β) που είναι το υψηλότερο σημείο του σωλήνα εκροής, η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται αυτή τη φορά, σύμφωνα με τις παραπάνω συνθήκες, μεταξύ του σημείου (Α), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και του σημείου (Β), και παίρνοντας το σημείο (Γ) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει: $z_A = 3{,}6$ m, $z_B = 5{,}4$ m , $υ_A = 0$, $υ_B = υ_Γ = 8{,}4$ m/s, $P_A = 0$ όταν πρόκειται για μανομετρική πίεση στο σημείο, (Α), και το μόνο άγνωστο είναι η μανομετρική πίεση στο σημείο (Β) $P_B$.

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$P_{A\,μαν.}/ρ + ½\ υ_A^2 + g\ z_A = P_{B\,μαν}/ρ + ½\ υ_B^2 + g\ z_B$

$9{,}81\ \ 3{,}6 = P_{B\,μαν.}/1000 + ½\ \ 8{,}4^2 + 9{,}81\ \ 5{,}4$

$P_{B\,μαν.} = -\ 52938$ Pa

Οπότε η απόλυτη πίεση στο σημείο (Β) προκύπτει ότι είναι:

$P_{B\,απολ.} = 98100 - 52938 = 45162$ Pa

- Στο ίδιο αποτέλεσμα θα καταλήγαμε αν η εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli μεταξύ των σημείων (Α) και (Β) γινόταν με τις απόλυτες πιέσεις. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει: $z_A = 3{,}6$ m, $z_B = 5{,}4$ m , $υ_A = 0$, $υ_B = 8{,}4$ m/s, $P_A = 98100$ Pa και το μόνο άγνωστο είναι η πίεση στο σημείο (Β) $P_B$.

  Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

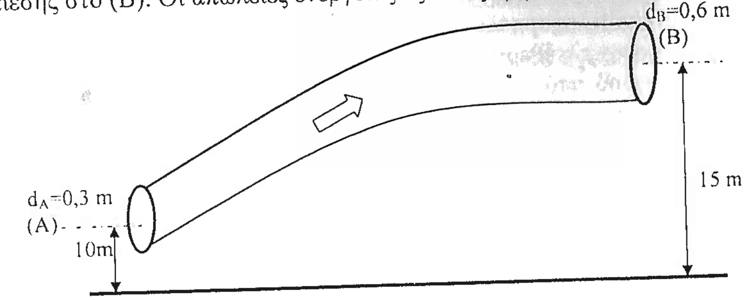
  $P_A/ρ + ½\ υ_A^2 + g\ z_A = P_B/ρ + ½\ υ_B^2 + g\ z_B$

  $98100/1000 + 9{,}81\ \ 3{,}6 = P_B/1000 + ½\ 8{,}4^2 + 9{,}81\ 5{,}4$

  $P_B = 45162$ Pa

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-7**

Στην σωληνογραμμή του σχήματος, η παροχή του νερού από το (Α) προς το (Β) είναι 0,4 $m^3/s$ και τα ύψος πίεσης στο Α είναι 7 m. Να υπολογιστεί το ύψος της πίεσης στο (Β). Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες.






**Λύση:** Η ταχύτητα του νερού στα σημεία (Α) και (Β) υπολογίζεται από την ογκομετρική παροχή , $\dot V$, και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του αγωγού στα σημεία (Α) και (Β) $A_A$ και $A_B$ αντίστοιχα. Αφού υπολογίζουμε το $A_A$ και το $A_B$,

$A_A = π\ d_A^2/4 = π\ 0{,}3^2/4 = 0{,}07\ m^2$

$A_B = π\ d_B^2/4 = π\ 0{,}6^2/4 = 0{,}28\ m^2$

η ταχύτητα του νερού στα σημεία (Α) και (Β) προκύπτει ότι είναι:

$υ_A = \dot V / A_A = 0{,}4 / 0{,}07 = 5{,}71$ m/s

$υ_B = \dot V / A_B = 0{,}4 / 0{,}28 = 1{,}42$ m/s

Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (Α), και του σημείου (Β), και παίρνοντας το (Α) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά θα ισχύει: $z_A = 0$, $z_B = 5$ m , $υ_A = 5{,}71$, $υ_B = 1{,}42$ m/s, $P_A/γ = 7$ m και το μόνο άγνωστο είναι το ύψος της πίεσης στο σημείο (Β) $P_B/γ$.

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$P_A/γ + υ_A^2/2g + z_A = P_B/γ + υ_B^2/2g + z_B$

$7 + 5{,}71^2 / 2\ 9{,}81 = P_B/γ + 1{,}42^2 / 2\ 9{,}81 + 5$

και μετά την εκτέλεση των πράξεων προκύπτει ότι:

$P_B/γ = 3{,}5$ m στήλης νερού.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-8**

Προσδιορίστε την κρίσιμη ταχύτητα για μέσο πετρέλαιο στους 15,6 °C που ρέει σε σωλήνα των 152,4 mm. Το κινηματικό ιξώδες μέσου πετρελαίου στους 15,6 °C είναι $4{,}410\ 10^{-6}\ m^2/s$.

**Λύση:** Η μέση τιμή του αριθμού Reynolds για στρωτή ροή είναι 2000. Η κρίσιμη ταχύτητα υπολογίζεται από την σχέση,

$Re = υ\ d / ν$

Επομένως η κρίσιμη ταχύτητα θα είναι:

$υ_c = Re\ \ ν / d$

$υ_c = 2000\ \ 4{,}410\ 10^{-6} / 0{,}1524$

$υ_c = 0{,}0579$ m/s

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-9**

Προσδιορίστε τον τύπο της ροής σε σωλήνα διαμέτρου 305 mm, όταν ρέει βαρύ πετρέλαιο στους 15,6 °C με ταχύτητα 1,067 m/s. Το κινηματικό ιξώδες για το βαρύ πετρέλαιο στους 15,6 °C είναι $205\ 10^{-6}\ m^2/s$.

**Λύση:** Ο αριθμός Reynolds υπολογίζεται από την σχέση,

$Re = υ\ d / ν$

$Re = 1{,}067\ 0{,}305 / 205\ 10^{-6}$

$Re = 1580$

Επειδή $1580 < 2000$ η ροή είναι στρωτή.

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3-10**

Για συνθήκες στρωτής ροής τι μέγεθος σωλήνα απαιτείται για παροχή $5{,}67\ 10^{-3}$ $m^3/s$ μέσου πετρελαίου στους 4,4 °C. Το κινηματικό ιξώδες μέσου πετρελαίου στους 4,4 °C είναι $6{,}08\ 10^{-6}\ m^2/s$.

**Λύση:** Η ταχύτητα του πετρελαίου υπολογίζεται από την σχέση,

$$\upsilon = \dot{V} / A = 4\ \dot{V} / \pi d^2 = 4\ \ 5{,}67\ 10^{-3} / \pi d^2$$

Η μέση τιμή του αριθμού Reynolds για στρωτή ροή είναι 2000. Ο αριθμός Reynolds ορίζεται από την σχέση,

$$Re = \upsilon\, d / \nu$$

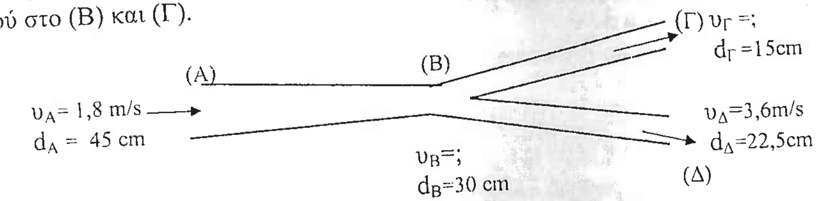
Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην παραπάνω σχέση προκύπτει η διάμετρος:

$$2000 = 4\ \ 5{,}67\ 10^{-3}\ d / \pi d^2\ \ 6{,}08\ 10^{-6}$$

$$d = 593\ 10^{-3}\ m.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

3-1 Η διάμετρος μιας σωληνογραμμής συγκλίνει από διάμετρο 45 cm (θέση Α) σε 30 cm (θέση Β) και μετά διακλαδίζεται σε ένα κλάδο με διάμετρο 15 cm που εκρέει στο (Γ) και σε ένα άλλο κλάδο με διάμετρο 22,5 cm που εκρέει στο (Δ). Αν η ταχύτητα του νερού στη θέση (Α) είναι 1,8 m/s και η ταχύτητα στο (Δ) είναι 3,6 m/s να προσδιοριστεί η παροχή στο (Δ) καθώς και η ταχύτητα του νερού στο (Β) και (Γ).



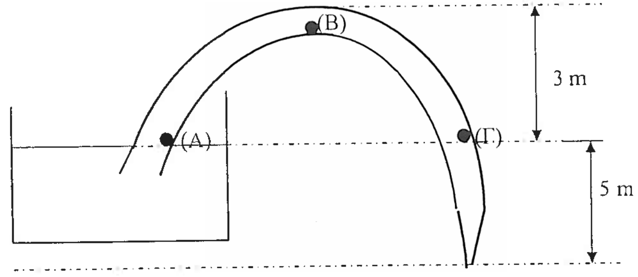

(Απ. $\dot{V}_\Delta = 0{,}143\ m^3/s$, $\upsilon_\Gamma = 8{,}2$ m/s, $\upsilon_B = 4{,}05$ m/s)

3-2 Σε ένα οριζόντιο αγωγό διοχετεύεται ένα ρευστό με πυκνότητα $3{,}2\ kg/m^3$ και με μαζική παροχή 6 kg/s. Αν το εμβαδό της διατομής του αγωγού μειωθεί από $0{,}75\ m^2$ σε $0{,}2\ m^2$ να βρεθεί ποια θα είναι η μεταβολή στην πίεση του ρευστού, όταν οι απώλειες ενέργειας θεωρούνται αμελητέες.

(Απ. 131,4 Pa)



3-3 Ένας σωλήνας εκροής έχει διάμετρο 10 cm και το νερό εκρέει μέσω από ακροφύσιο με διάμετρο 5 cm. Αν οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες να προσδιορισθεί η ογκομετρική παροχή και η πίεση στα σημεία (Α), (Β) και (Γ).

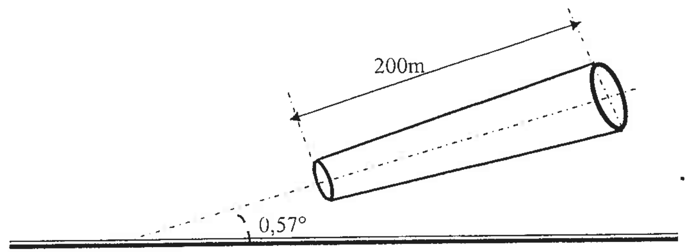



(Απ. $0{,}0194\ m^3/s$, $P_A = P_\Gamma = -3050{,}45$ Pa, $P_B = -32480{,}4$ Pa)

3-4 Μια δέσμη νερού βγαίνει από ένα ακροφύσιο με διάμετρο 25 mm με κατεύθυνση προς τα επάνω. Αν υποθέσουμε ότι δέσμη παραμένει κυκλική και αν αγνοήσουμε τις απώλειες ενέργειας να προσδιοριστεί η διάμετρος της δέσμης του νερού σε ύψος 4,5 m πάνω από το ακροφύσιο. Η ταχύτητα του νερού όπως βγαίνει από το ακροφύσιο είναι 12 m/s.

(Απ. 31,7 mm)

3-5 Ένας σωλήνας μήκους 200 m έχει κλίση 0,57° (προς οριζόντια απόσταση) και συγκλίνει από διάμετρο 1,2 m στο πάνω άκρο του σε διάμετρο 0,6 m στο κάτω άκρο του. Αν η παροχή νερού από τον σωλήνα είναι $0{,}1\ m^3/s$ και η πίεση στο πάνω άκρο του 0,5 bar να προσδιοριστεί η πίεση στο κάτω άκρο του σωλήνα. Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών θεωρούνται αμελητέες.




(Απ. 69,5 kPa)

# Ροή Μέσα σε Αγωγούς

## 4-1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την τυρβώδη ροή μέσα σε σωλήνες και τα φαινόμενα της ροής των ρευστών μέσα σε αγωγούς τόσο από θεωρητική όσο και από τεχνική άποψη.

## 4-2 Γενικά περί Αγωγών

Η διακίνηση των ρευστών, υγρό ή αερίων, γίνεται με τους *αγωγούς*. Στην τεχνική ορολογία οι αγωγοί κυκλικής διατομής, που είναι και οι συνηθέστεροι, ονομάζονται ***σωλήνες***. Οι σωλήνες με σχετικώς λεπτά και λεία τοιχώματα, διαμέτρου 2 ½ in, ονομάζονται και ως ***αυλοί***.
Οι αγωγοί μεταφοράς ρευστών κατασκευάζονται από διάφορα υλικά, όπως καθαρά μέταλλα, κράματα, πλαστικά, κεραμικά, τσιμέντο και γυαλί.
Οι μεταλλικοί αγωγοί παρουσιάζουν μεγάλη αντοχή σε μηχανική καταπόνηση, αλλά όμως, είναι ευπαθείς σε χημική διάβρωση. Αντίθετα, οι μη μεταλλικοί αγωγοί είναι γενικώς ανθεκτικοί σε χημική διάβρωση, αλλά όμως δεν αντέχουν σε πιέσεις.
Οι σωλήνες καθορίζονται με βάση την ***ονομαστική διάμετρο***, $d_o$, και το ***πάχος*** $b$, του τοιχώματος και τυποποιούνται με βάση πρότυπα, τα συνηθέστερα των οποίων είναι τα εξής: ISO, ASTM, DIN και BS.
Για χαλύβδινους σωλήνες οι οποίοι αποτελούν και την πλειοψηφία των σωλήνων διακίνησης ρευστών, οι ονομαστικές διάμετροι ποικίλουν από 1/8 in μέχρι και 30 in. Για μεγάλους σωλήνες (διαμέτρου μεγαλύτερες των 12 in), η ονομαστική διάμετρος συμπίπτει με την εξωτερική διάμετρο του σωλήνα, ενώ για μικρούς σωλήνες, η διάμετρος $d_o$ δεν αντιστοιχεί σε καμιά πραγματική διάσταση του σωλήνα. Ανεξάρτητα από το πάχος του τοιχώματος, η εξωτερική διάμετρος όλων των σωλήνων που έχουν την ίδια ονομαστική διάμετρο είναι η ίδια και αυτό, για να εξασφαλιστεί η δυνατότητα εναλλαγής των εξαρτημάτων της σωλήνωσης. Σωλήνες από άλλα υλικά, κατασκευάζονται, επίσης, με εξωτερικές διαμέτρους ίδιες με εκείνες των χαλύβδινων σωλήνων, για να είναι δυνατή η εναλλαγή τεμαχίων σε συστήματα σωληνώσεων στα οποία υπάρχουν διάφορα είδη αγωγών.
Το πάχος του τοιχώματος ενός σωλήνα υποδηλώνεται με τον ***αριθμό σειράς***, $N_o$. Για τους χαλύβδινους σωλήνες, σε χρήση βρίσκονται οι εξής αριθμοί σειράς: 5, 10, 20, 30, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, S, ST, XS και XX. Για σωλήνα δεδομένης διαμέτρου, το πάχος του τοιχώματος αυξάνεται με την αύξηση του αριθμού $N_0$. Η επιλογή του καταλλήλου αριθμού σειράς για μια χρήση σωλήνα, δεδομένης διαμέτρου, εξαρτάται κυρίως από την πίεση στην

οποία μεταφέρεται το ρευστό και την επιτρεπόμενη τάση για το υλικό κατασκευής του σωλήνα.
Το πάχος του τοιχώματος των χαλκοσωλήνων προσδιορίζεται συνήθως με ένα σύστημα γραμμάτων: ***Τύπος K*** (πολύ παχύ τοίχωμα), ***Τύπος L*** ( τοίχωμα ενδιαμέσου πάχους) ή ***Τύπος M*** (πολύ λεπτό τοίχωμα). Η εξωτερική διάμετρος είναι ίδια και για τους τρεις τύπους ανεξάρτητα από το μέγεθος του σωλήνα.
Ο ευθύγραμμος αγωγός σταθερής διατομής δεν μπορεί να ανταποκριθεί στις ανάγκες κάθε εφαρμογής διακίνησης ρευστών. Για το λόγο αυτό, τα ευθύγραμμα τμήματα των αγωγών συναρμολογούνται μεταξύ τους με τη βοήθεια καταλλήλων τμημάτων ώστε να ικανοποιούν τις ανάγκες κάποιας συγκεκριμένης εφαρμογής. Τα πρόσθετα αυτά τμήματα ονομάζονται ***εξαρτήματα***. Το σύνολο των αγωγών διακίνησης ενός ρευστού και των εξαρτημάτων που παρεμβάλλονται στη ροή του ονομάζεται ***σωλήνωση*** (ή σωληνογραμμή).

## 4.3 Τραχύτητα Επιφανειών

Η επιφάνεια κάθε στερεού σώματος, όσο λεία και αν φαίνεται, παρουσιάζει ανωμαλίες. Το μέγεθος των ανωμαλιών αυτών εκφράζεται ποσοτικά με ένα χαρακτηριστικό μήκος, *e*, το οποίο ονομάζεται ***τραχύτητα*** της επιφάνειας. Το μήκος e είναι ίσο με τη μέση τιμή των υψών των εσοχών και των προεξοχών της επιφάνειας σε μια μεγάλη (σχετικά με το μέγεθος τους) έκταση. Στις ρευστομηχανικές σχέσεις ροής σε αγωγούς, παρουσιάζεται συχνά ο λόγος της απόλυτης τραχύτητας, e, προς την εσωτερική διάμετρο, *d*, του αγωγού. Ο λόγος e/d είναι γνωστός ως ***σχετική τραχύτητα*** του αγωγού. Η τραχύτητα εξαρτάται από το υλικό κατασκευής, το βαθμό μηχανικής κατεργασίας των εσωτερικών τοιχωμάτων και την παλαιότητά τους.

## 4-4 Απώλεια Ενέργειας σε Αγωγούς Κυκλικής Διατομής

Κατά την ιξώδη ροή σε αγωγούς, ένα μέρος της μηχανικής ενέργειας του ρευστού καταναλώνεται για την υπερνίκηση των δυνάμεων τριβής που αναπτύσσονται στο εσωτερικό του. Από ενεργειακή άποψη, η παρουσία τριβών είναι γνωστή ως ***ενέργεια τριβών***. Στην υδραυλική η ενέργεια τριβών ανάγεται συνήθως στη μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού. Το ανοιγμένο αυτό μέγεθος έχει διατάσεις μήκους, ονομάζεται ***ύψος τριβών*** και συμβολίζεται ως $h_L$, δηλαδή:

$$h_L = w_L / g \qquad (4\text{-}1)$$

όπου, $w_L$ είναι η ανά μονάδα μάζας ενέργειας τριβών και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

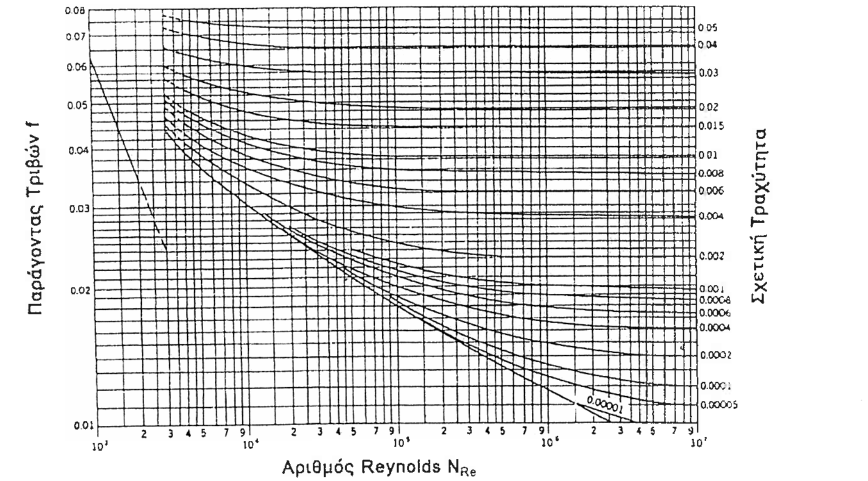


Για ροή σε αγωγούς κυκλικής διατομής, το ύψος τριβών της ροής υπολογίζεται από την εξίσωση των *Darsy – Weisbach*:

$$h_L = f\, l\, \upsilon^2 / d\, 2g \qquad (4\text{-}2)$$

όπου, f είναι ο ***συντελεστής τριβής***, υ η μέση ταχύτητα του ρευστού, l το μήκος και d η εσωτερική διάμετρος του αγωγού. Η εξίσωση Darsy-Weisbach ισχύει τόσο για στρωτή όσο και για τυρβώδη ροή..
Ο συντελεστής τριβής f είναι μια από τις σημαντικές παραμέτρους στην ανάλυση της ιξώδους ροής σε αγωγούς. Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά, η τιμή του f εξαρτάται από τις συνθήκες ροής και το βαθμό κατεργασίας της εσωτερικής επιφανείας του αγωγού.
Εξαιτίας της μεγάλης τεχνικής σημασίας των σωληνώσεων στη μεταφορά των ρευστών έγιναν πολλά πειράματα και συντάχτηκαν πίνακες και διαγράμματα για τις εφαρμογές. Μεγάλη χρήση στην πράξη έχει το ***διάγραμμα Moody*** (Σχ.4-1). Το διάγραμμα Moody παριστάνει γραφικά την εξάρτηση του συντελεστή τριβής κοινών αγωγών του εμπορίου από τον αριθμό Reynolds της ροής με παράμετρο τη σχετική τραχύτητα του αγωγού. Το διάγραμμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο για ροές σε αγωγούς κυκλικής διατομής όσο και για ροές σε αγωγούς μη κυκλικής διατομής.
Στην περίπτωση της στρωτής ροής ο συντελεστής τριβής f υπολογίζεται από τη σχέση:

$$f = 64 / Re \qquad (4\text{-}3)$$




Σχ. 4-1 Το Διάγραμμα Moody

Η εξίσωση (4-2) δείχνει ότι, στη ροή σε αγωγό κυκλικής διατομής, το ύψος τριβών είναι ανάλογο προς το ύψος ταχύτητας, $υ^2/2g$, της ροής.

## 4-5 Δευτερεύουσες Απώλειες Ενέργειας

Ως ***δευτερεύουσες απώλειες*** χαρακτηρίζονται οι απώλειες που προκαλούνται από τα διάφορα εξαρτήματα τα οποία παρεμβάλλονται στη ροή των ρευστών. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν και οι απώλειες ενέργειας που συμβαίνουν κατά την είσοδο και την έξοδο των ρευστών από τους αγωγούς μεταφοράς των. Η ονομασία δευτερεύουσες απώλειες, υποδηλώνει ότι οι κύριες απώλειες ενέργειας της ροής είναι αυτές που συμβαίνουν στα ευθύγραμμα τμήματα της σωλήνωσης. Στις περισσότερες περιπτώσεις, αυτό είναι αλήθεια. Όμως υπάρχουν και περιπτώσεις που οι δευτερεύουσες απώλειες είναι μεγαλύτερες από τις κύριες απώλειες ενέργειας της ροής. Για παράδειγμα, μια μερικώς ανοικτή βαλβίδα μπορεί να προκαλέσει μεγαλύτερη πτώση πίεσης από ότι προκαλεί ένας μακρύς σωλήνας. Γενικώς, οι δευτερεύουσες απώλειες μπορούν να αγνοηθούν όταν μεταξύ των εξαρτημάτων που τις προκαλούν παρεμβάλλονται μεγάλα μήκη σωλήνα. Όταν παρεμβάλλονται μέτρια μήκη σωλήνα, οι δευτερεύουσες απώλειες ενδεχομένως να είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τις κύριες απώλειες ενέργειας ροής.

## 4-6 Το Φαινόμενο της Σπηλαίωσης

Όταν η πίεση P σε κάποιο σημείο του πεδίου ροής ενός υγρού μειωθεί, π.χ. εξαιτίας αύξησης της ταχύτητας, ώστε να φθάσει την τιμή της τάσης ατμών, $P_S$, του υγρού για τη δεδομένη θερμοκρασία (δηλαδή $P = P_S$), τότε σχηματίζονται ταχέως φυσαλίδες ατμού στην περιοχή μείωσης της πίεσης. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται ***σπηλαίωση***.

Οι φυσαλίδες ατμού που σχηματίζονται κατά την σπηλαίωση μεταφέρονται από το κινούμενο υγρό σε περιοχές μεγαλυτέρων πιέσεων ($P>P_S$) όπου και καταστρέφονται (επαναυγροποιούνται) ακαριαία. Η απότομη καταστροφή των φυσαλίδων συνοδεύεται από σημαντική αύξηση της πίεσης στα σημεία σύνθλιψης των φυσαλίδων. Έτσι, αν η περιοχή καταστροφής των φυσαλίδων βρίσκεται κοντά σε ένα στερεό, αυτό υφίσταται πολλαπλές, συνεχείς κρούσης μεγάλης έντασης, ικανές να επιφέρουν σημαντική φθορά στην επιφάνεια του στερεού εξαιτίας μηχανικής κόπωσης. Το φαινόμενο της ακαριαίας επαναυγροποίησης των φυσαλίδων συνοδεύεται από θόρυβο και κραδασμό. Σε μικρές συσκευές, ο θόρυβος αυτός μοιάζει σαν να ρέει μέσα στη συσκευή ψιλή άμμος. Σε μεγάλες υδραυλικές εγκαταστάσεις ο θόρυβος που δημιουργεί η σπηλαίωση μοιάζει σαν να μετακινούνται μέσα στην εγκατάσταση μεγάλες πέτρες οι οποίες χτυπούν στα τοιχώματα της.

Το φαινόμενο της σπηλαίωσης παρατηρείται συνήθως σε αντλίες, υδροστροβίλους, προπέλες πλοίων και γενικά σε υδραυλικές εγκαταστάσεις οι



οποίες λειτουργούν σε χαμηλές πιέσεις. Επειδή οι φυσαλίδες ατμού που σχηματίζονται κατά τη σπηλαίωση καταργούν τοπικά τη συνέχεια της ροής, η απόδοση της εγκατάστασης μειώνεται σημαντικά.

Επίσης η δημιουργία υποπίεσης κατά την περιστροφή της έλικας του πλοίου ή των πτερύγιων αντλίας ή κατά την στροβιλώδη ροή ρευστών σε σωλήνες οδηγεί στη δημιουργία εσοχών, σπηλαίων και κρατήρων από τοπική εξάχνωση υλικού. Στην περίπτωση αυτή η ταχύτητα απώλειας υλικού είναι συνάρτηση της υποπίεσης, της τάσης ατμών του μετάλλου, της θερμοκρασίας, της ταχύτητας περιστροφής και της κατάστασης της επιφανείας του μετάλλου.

## 4-7 Συστήματα Σωληνώσεων – Τροποποίηση της Εξίσωσης Bernoulli

Μία από τις συνθήκες που βασίστηκε η εξαγωγή της εξίσωσης Bernoulli ήταν η παραδοχή ότι κατά την κίνηση του ρευστού δεν υπάρχουν τριβές. Στην πράξη όμως τα ρευστά μεταφέρονται μέσα σε αγωγούς όπου έρχονται σε επαφή με στερεές ακίνητες επιφάνειες. Ως γνωστό η επαφή στερεής ακίνητης επιφάνειας με το ρευστό προκαλεί τριβές μεταξύ των στρωμάτων του ρευστού. Έτσι δεν είναι δυνατό να θεωρείται στην πράξη η ροή ενός ρευστού σαν δυναμική χωρίς τριβές. Εκτός από των ανωτέρων τριβών υπάρχουν και τριβές που οφείλονται είτε σε απότομη μεταβολή του προφίλ της ταχύτητας, προκαλώντας σπάσιμο ροϊκών γραμμών και δημιουργία δινών, είτε σε απότομη μεταβολή της διεύθυνσης της κίνησης του ρευστού εξαιτίας κάποιου εξαρτήματος (π.χ. μία γωνία 90° ή μία κάμψη).

Είναι φανερό η εξίσωση (3-9) δεν αρκεί πλέον να καλύψει τις περιπτώσεις αυτές και είναι λογικό να υποτεθεί ότι το άθροισμα των ορών ενέργειας, $P/ρ + ½\, υ^2 + g\, z$, συνεχώς ελαττώνεται στη φορά κίνησης του ρευστού καθώς κατά την ιξώδη ροή ένα μέρος της κινητικής ενέργειας του ρευστού καταναλίσκεται για την υπερνίκηση των δυνάμεων τριβής, που αναπτύσσονται στο εσωτερικό του.

Η ποσότητα ενέργειας που χάνεται εξαιτίας τριβών είναι γνωστή ως ***ενέργεια τριβών***, $w_L$. Η ενέργεια τριβών συνήθως ανάγεται στη μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού. Το ανοιγμένο αυτό μέγεθος (εξίσωση 4-1) έχει διαστάσεις μήκους και ονομάζεται ***ύψος τριβών (απωλειών)*** $h_L$.

$$h_L = w_L / g$$

·Η εξίσωση (3-9) όταν μεταξύ των σημείων (1) και (2) του Σχ. 3-2 υπάρχουν απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών γίνεται ανισότητα της μορφής:

$$P_1/ρ + ½\, υ_1^2 + g\, z_1 > P_2/ρ + ½\, υ_2^2 + g\, z_2$$

και εάν, $w_L$, είναι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών τότε η εξίσωση (3-9) γράφεται ως:

$$P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1 - w_L = P_2/\rho + ½\, \upsilon_2^2 + g\, z_2 \qquad (4\text{-}4)$$

επίσης η εξίσωση (3-12) γράφεται ως:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_L = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2 \qquad (4\text{-}5)$$

Ας υποθέσουμε ότι μεταξύ εκτός των απωλειών ενέργειας εξαιτίας τριβών έχουμε έξοδο ενέργειας για τη λειτουργία υδροστροβίλου. Η ποσότητα ενέργειας που απορροφάται από μηχανές (όπως οι υδροστρόβιλοι) είναι γνωστή ως , $w_T$ και συνήθως ανάγεται στη μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού. Το ανοιγμένο αυτό μέγεθος έχει διαστάσεις μήκους και συμβολίζεται ως, $h_T$, δηλαδή:

$$h_T = w_T / g \qquad (4\text{-}6)$$

Η εξίσωση (3-9) όταν μεταξύ των σημείων (1) και (2) του Σχ. 3-2 υπάρχει έξοδο ενέργειας $w_T$ για τη λειτουργία υδροστροβίλου γράφεται ως:

$$P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1 - w_T = P_2/\rho + ½\, \upsilon_2^2 + g\, z_2 \qquad (4\text{-}7)$$

επίσης η εξίσωση (3-12) γράφεται ως:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_T = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2 \qquad (4\text{-}8)$$

Είναι γνωστό ότι τα ρευστά για να μεταφερθούν απαιτούν στις περισσότερες περιπτώσεις μηχανικά μέσα, όπως οι αντλίες. Μια αντλία μετατρέπει μία μορφή ενέργειας, συνήθως ηλεκτρική, σε μηχανικό έργο το οποίο προσφέρεται στο ρευστό για τη μεταφορά του. Έτσι, αν η αντλία απορροφά έργο **w** θα απόδοση στο ρευστό έργο $w_A = \eta_P\, w$ όπου, $\eta_P$ είναι ο βαθμός απόδοσης. Η ποσότητα ενέργειας που προσφέρεται από αντλίες $w_A$ συνήθως ανάγεται στη μονάδα βάρους του ρέοντος ρευστού. Το ανοιγμένο αυτό μέγεθος έχει διαστάσεις μήκους και συμβολίζεται ως, $h_A$, δηλαδή:

$$h_A = w_A / g \qquad (4\text{-}9)$$

Η εξίσωση (3-9) όταν μεταξύ των σημείων (1) και (2) του Σχ. 3-2 υπάρχει είσοδο ενέργειας $w_A$ από λειτουργία αντλίας γράφεται ως:

$$P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1 + w_A = P_2/\rho + ½\, \upsilon_2^2 + g\, z_2 \qquad (4\text{-}10)$$

επίσης η εξίσωση (3-12) γράφεται ως:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 + h_A = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2 \qquad (4\text{-}11)$$



## 4-8 Γενική Εξίσωση Ενέργειας για Ασυμπίεστη Ροή

Η εξίσωση ενέργειας προκύπτει από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης ενέργειας σε ροή ρευστού. Για την εφαρμογή της αρχής της διατήρησης της ενέργειας στη διεύθυνση της ροής καθορίζουμε την διατομή (1) ως είσοδο και την διατομή (2) ως έξοδο του ρευστού από τη σωλήνωση. Έστω ότι η ροή σε μια σωλήνωση είναι μόνιμη και ασυμπίεστη, με ομοιόμορφη κατανομή της ταχύτητας σε κάθε εγκάρσια διατομή της. Στη διεύθυνση της ροής η αρχή διατήρησης της ενέργειας, σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει μέχρι τώρα, συνοψίζεται σε γενική εξίσωση ως εξής:

Ενέργεια στη διατομή (1) + Ενέργεια που προσθέτεται – Ενέργεια που χάνεται – Ενέργεια που αφαιρείται = Ενέργεια στη διατομή (2).

Αυτή η εξίσωση, για μόνιμη ροή ασυμπίεστου, ρευστού όπου η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας είναι αμελητέα, παίρνει τη συγκεκριμένη μορφή:

$$P_1/\rho + ½\, \upsilon_1^2 + g\, z_1 + w_A - w_L - w_T = P_2/\rho + ½\, \upsilon_2^2 + g\, z_2 \qquad (4\text{-}12)$$

ή

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 + h_A - h_L - h_T = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2 \qquad (4\text{-}13)$$

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ**

Η παρεμβολή μηχανήματος στην πορεία του ρευστού προκαλεί διαταραχή της ροής σε απόσταση μερικών διαμέτρων πριν και μετά από το εξάρτημα.
Αν το υγρό διέρχεται από ένα στρόβιλο παρουσιάζεται απότομη μείωση του ολικού μανομετρικού ύψους της ροής εξαιτίας της ενέργειας που αποδίδει το ρευστό στο στρόβιλο καθώς διέρχεται από αυτόν. Η απότομη μείωση του ολικού μανομετρικού ύψους της ροής, $h_T$, την οποία προκαλεί η παρεμβολή του στροβίλου υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$h_T = P_T / \rho\, g\, \dot{V} \qquad (4\text{-}14)$$

όπου, $P_T$ η ισχύς που δίνεται από το ρευστό στον στρόβιλο (ισχύς εισόδου), ρ η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\dot{V}$ η ογκομετρική παροχή.
Η ισχύς που παράγεται στον στρόβιλο (ισχύς εξόδου), P, θα είναι:

$$P = \eta_T\, P_T \qquad (4\text{-}15)$$

όπου, $\eta_T$ ο βαθμός απόδοσης του στροβίλου και $P_T$ η ισχύς εισόδου.

Αν το υγρό διέρχεται από μια αντλία η υδραυλική ισχύς, $P_W$, που μεταβιβάζεται στο διακινούμενο ρευστό από την αντλία, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P_W = \rho\, g\, \dot{V}\, h_P \qquad (4\text{-}16)$$

όπου, ρ η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\dot{V}$ η ογκομετρική παροχή και $h_p$ το ολικό μανομετρικό ύψος της αντλίας ($h_p = h_A$). Ο βαθμός απόδοσης μιας αντλίας, $\eta_P$, ορίζεται από την εξίσωση:

$$\eta_P = P_W / P_S \qquad (4\text{-}17)$$

όπου, $P_W$ η υδραυλική ισχύς και $P_S$ η αξονική ισχύς της αντλίας.

Η αξονική ισχύς, $P_S$, που μεταβιβάζεται στον άξονα της αντλίας, υπολογίζεται από την εξίσωση (4-16) σε συνδυασμό και με την εξίσωση (4-17):

$$P_S = P_W / \eta_P = \rho\, g\, \dot{V}\, h_P / \eta_P \qquad (4\text{-}18)$$

όπου, ρ η πυκνότητα του ρευστού, g η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\dot{V}$ η ογκομετρική παροχή, $h_p$ το ολικό μανομετρικό ύψος της αντλίας και $\eta_P$ ο βαθμός απόδοσης της αντλίας.

## 4-9 Εφαρμογή του Θεωρήματος Bernoulli

Η εφαρμογή του θεωρήματος του Bernoulli θα πρέπει να είναι ορθολογική και συστηματική. Μια διαδικασία που είναι σκόπιμο να ακολουθείται είναι η εξής:

- Σχεδιάζουμε το σύστημα εκλέγοντας και ονομάζοντας όλες τις εξεταζόμενες διατομές της ροής.
- Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά την διεύθυνση της ροής. Εκλέγουμε ένα επίπεδο αναφοράς για κάθε εξίσωση που γράφουμε. Είναι σκόπιμο το επίπεδο αναφοράς να είναι αρκετό χαμηλό για να μην έχουμε αρνητικό πρόσημα και έτσι να αποφεύγονται τα λάθη.
- Υπολογίζουμε την ενέργεια ή το ολικό ύψος της ροής στην διατομή (1) και στη διατομή (2). Το σύμβολο P στην εξίσωση Bernoulli παριστάνει την απόλυτη πίεση και η ταχύτητα υ θεωρείται ότι είναι η μέση ταχύτητα. Επίσης η εξίσωση Bernoulli ισχύει και για μανομετρικές πιέσεις.
- Προσθέτουμε κάθε ενέργεια ή ύψος που προσφέρεται από μηχανές (όπως οι αντλίες).
- Αφαιρούμε κάθε απώλεια ενέργειας ή ύψους εξαιτίας τριβών.
- Αφαιρούμε κάθε απώλεια ενέργειας ή ύψους που απορροφάτε από μηχανές.
- Εξισώνουμε αυτό το άθροισμα των ενεργειών ή το υψών ροής στην διατομή (1) με το άθροισμα των ενεργειών ή το υψών ροής στη διατομή (2).



- Αν τα δύο ύψη κινητικής ενέργειας είναι άγνωστα, τα συσχετίζουμε μεταξύ τους με τη βοήθεια της εξίσωσης συνέχειας.

## 4-10 Παραδείγματα

**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-1**

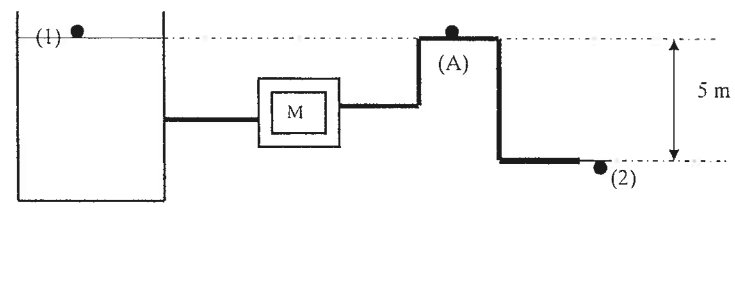
Σε μία υδραυλική εγκατάσταση νερό εκρέει στην ατμόσφαιρα με ρυθμό 0,06 $m^3/s$. Το σημείο εκροής βρίσκεται 5 m χαμηλότερα από την ελεύθερη επιφάνεια του νερού στη δεξαμενή. Ο αγωγός μεταφοράς του νερού έχει εσωτερική διάμετρο 20 cm και καταλήγει σε ακροφύσιο διαμέτρου 10 cm. Η απώλειες ενέργειας της ροής θεωρούνται αμελητέες.
α. Τι είδους μηχάνημα είναι το Μ, αντλία ή στρόβιλος.
β. Να υπολογιστεί η ισχύς του Μ, αν ο βαθμός απόδοσης του είναι 85 %.
γ. Να υπολογιστεί η πίεση στο σημείο Α, αν η βαρομετρική πίεση είναι 100 kPa.

**Λύση:** **α.** Για να συμπεραίνουμε για το είδος του μηχανήματος Μ, πρέπει να ελέγξουμε αν το ύψος h που εμφανίζεται στο πρώτο μέλος της εξίσωσης Bernoulli που εκφράζει το ισοζύγιο ενέργειας, σε μορφή υψών, για ασυμπίεστη μόνιμη ροή μεταξύ δύο θέσεων (1) και (2) είναι θετικό ή αρνητικό.

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 + h - h_L = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2$$

Και αν μεν διαπιστωθεί ότι το h > 0, το μηχάνημα Μ θα είναι αντλία, αν δε h < 0, το μηχάνημα Μ θα είναι στρόβιλος.
Οι παραδοχές που χρησιμοποιούνται για την εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli είναι οι ακόλουθες:

- Επειδή οι διαστάσεις της διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με αυτές της διατομής του αγωγού εκροής, η ταχύτητα καθόδου της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού μπορεί να θεωρηθεί ίση με το μηδέν.
- Στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού και στο σωλήνα εκροής επικρατεί ατμοσφαιρική πίεση.




Σύμφωνα με τις παραπάνω συνθήκες η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (1), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια,

και του σημείου (2), που είναι το σημείο εξόδου του υγρού από το σωλήνα εκροής και παίρνοντας το σημείο (2) σαν επίπεδο αναφοράς.. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει:
$z_1 = 5$ m, $z_2 = 0$, $\upsilon_1 = 0$, $P_1 = P_2 = 100$ kPa, $h_L = 0$ αφού οι απώλειες ενέργειας της ροής θεωρούνται αμελητέες και το μόνο άγνωστο είναι το h. Η ταχύτητα εκροής $\upsilon_2$ στην έξοδο του ακροφυσίου υπολογίζεται από την ογκομετρική παροχή, $\dot{V}$, και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του ακροφυσίου.

$$\upsilon_2 = \dot{V} / A = 4\ \dot{V} / \pi\, d_{\alpha\kappa}^2 = 4\ 0{,}06 / \pi\ 0{,}1^2 = 7{,}64\ m/s$$

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 + h - h_L = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2$$
$$5 + h = 7{,}64^2 / 2\ 9{,}81$$
$$h = -2{,}02\ m$$

Άρα, αφού το ύψος $h < 0$, το μηχάνημα είναι στρόβιλος.
**β.** Η ισχύς του στροβίλου υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P = \eta\ \rho\ g\ \dot{V}\ h_T$$
$$P = 0{,}85\ 1000\ 9{,}81\ 0{,}06\ 2{,}02 = 1008\ W$$

**γ.** Για τον υπολογισμό της πίεσης στο σημείο (Α) η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (1), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και του σημείου (Α), και παίρνοντας το (Α) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τις συνθήκες αυτές θα ισχύει:
$z_1 = z_A$, $\upsilon_1 = 0$, $P_1 = 100$ kPa, $h_L = 0$ επειδή οι απώλειες ενέργειας της ροής θεωρούνται αμελητέες, $h_T = 2{,}02$ m και το μόνο άγνωστο είναι η πίεση στο σημείο (Α) $P_A$. Η ταχύτητα $\upsilon_A$ του νερού στην θέση (Α) υπολογίζεται από την ογκομετρική παροχή, $\dot{V}$, και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής του αγωγού στη θέση (Α).

$$\upsilon_A = \dot{V} / A = 4\ \dot{V} / \pi\, d_A^2 = 4\ 0{,}06 / \pi\ 0{,}2^2 = 1{,}91\ m/s$$

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\rho g + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_L - h_T = P_A/\rho g + \upsilon_A^2/2g + z_A$$
$$100\ 10^3 / 1000\ 9{,}81 - 2{,}02 = P_A / 1000\ 9{,}81 + 1{,}91^2 / 2\ 9{,}81$$
$$P_A = 82000\ Pa$$

δηλαδή, στο σημείο (Α) η πίεση του νερού είναι μικρότερη από την ατμοσφαιρική.

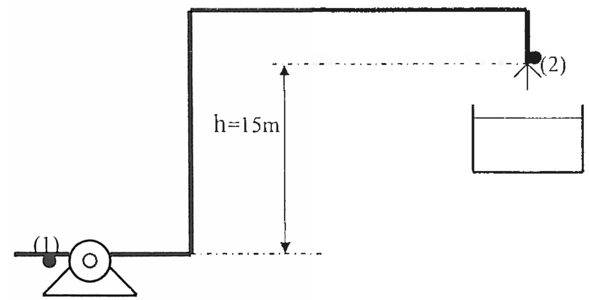
### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-2

Αντλία γεμίζει πλήρως μία δεξαμενή σε χρόνο 45 min. Αν η αντλία παρέχει στο σύστημα ισχύ 250 W και η πίεση στην αναρρόφηση της αντλίας είναι 80 kPa, να υπολογιστεί ο όγκος της δεξαμενής. Η διατομή της σωληνογραμμής είναι σταθερή, το σημείο εκροής βρίσκεται 15 m υψηλότερα από το σημείο που έχει τοποθετηθεί η αντλία, η ατμοσφαιρική πίεση είναι 1,013 bar και οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών είναι αμελητέες.

**Λύση:** Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται



μεταξύ του σημείου (1), που το σημείο αναρρόφησης και του σημείου (2), που




είναι το σημείο εξόδου του υγρού από το σωλήνα εκροής και παίρνοντας το σημείο (1) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά θα ισχύει:
$z_1 = 0$ m, $z_2 = 15$ m, $\upsilon_1 = \upsilon_2$, $P_1 = 80\ 10^3$ Pa, $P_2 = 1{,}013\ 10^5$ Pa, $h_L = 0$ επειδή οι απώλειες ενέργειας της ροής θεωρούνται αμελητέες και το μόνο άγνωστο είναι το $h_A$.
Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\rho g + \upsilon_1^2/2g + z_1 + h_A - h_L = P_2/\rho g + \upsilon_2^2/2g + z_2$$
$$80\ 10^3/1000\ 9{,}81 + h_A = 1{,}013\ 10^5 / 1000\ 9{,}81 + 15$$
$$h_A = 17{,}16\ m$$

Το ύψος αυτό σχετίζεται με την προσφερόμενη ισχύ της αντλίας με την σχέση,

$$P_W = \rho\ g\ \dot{V}\ h_P$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα υπολογίζεται η ογκομετρική παροχή:

$$\dot{V} = P_W / \rho\ g\ h_P = 250 / 1000\ 9{,}81\ 17{,}16 = 1{,}48\ 10^{-3}\ m^3/s$$

Ο όγκος της δεξαμενής προκύπτει από την σχέση,

$$\dot{V} = V_\delta / t_{o\lambda}$$

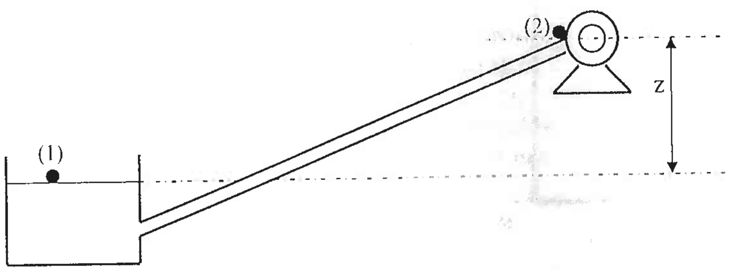
όπου $V_\delta$ ο όγκος της δεξαμενής και $t_{o\lambda}$ ο συνολικός χρόνος που απαιτείται για να γεμίσει η δεξαμενή. Επομένως ο όγκος της δεξαμενής προκύπτει ότι είναι:

$$V_\delta = \dot{V}\ t_{o\lambda} = 1{,}48\ 10^{-3}\ 45\ 60 = 4\ m^3$$

### ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-3

Από μια δεξαμενή βενζίνας αντλούνται 150 lit/s μέσα από σωληνογραμμή με διάμετρο 20 cm. Να προσδιοριστεί το μέγιστο ύψος z στο οποίο μπορεί να τοποθετηθεί η αντλία. Οι απώλειες ενέργειας (σε ύψος) στον σωλήνα αναρρόφησης είναι διπλάσιες του ύψους ταχύτητας της ροής, η βαρομετρική πίεση στην επιφάνεια της δεξαμενής είναι $1{,}03\ 10^5$ Pa, η πυκνότητα της βενζίνης στους 20 °C είναι 720 kg/m$^3$ και η τάση ατμών της βενζίνης στους 20 °C είναι $0{,}32\ 10^5$ Pa.

**Λύση:** Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται μεταξύ του σημείου (1), που είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στην ελεύθερη επιφάνεια, και του σημείου(2), που είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να τοποθετηθεί αντλία και παίρνοντας το σημείο (1) σαν επίπεδο αναφοράς.




Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά θα ισχύει:
$z_1 = 0$ , $\upsilon_1 = 0$ επειδή οι διαστάσεις της διατομής της δεξαμενής είναι πολύ μεγάλες σε σχέση με αυτές της διατομής της σωληνογραμμής, $P_1 = 1{,}03\ 10^5$ Pa, $P_2 = 0{,}32\ 10^5$ Pa για να μη συμβεί το φαινόμενο της σπηλαίωσης, $h_L = 2\ \upsilon^2/2g$ επειδή οι απώλειες ενέργειας είναι διπλάσιες του ύψους ταχύτητας της ροής και το μόνο άγνωστο είναι το z, που είναι το μέγιστο ύψος που μπορεί να τοποθετηθεί αντλία. Η ταχύτητα $\upsilon_2$ υπολογίζεται από την ογκομετρική παροχή, $\dot{V}$ , και το εμβαδόν της εγκάρσιας διατομής της σωληνογραμμής.

$$\upsilon_2 = \dot{V} / A = 4\ \dot{V} / \pi d^2 = 4\ 0{,}15 / \pi\ 0{,}2^2 = 4{,}78 \text{ m/s}$$

Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\rho g + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_L = P_2/\rho g + \upsilon_2^2/2g + z_2$$
$$1{,}03\ 10^5/720\ 9{,}81 - 2\ 4{,}78^2/2\ 9{,}81 = 0{,}32\ 10^5/720\ 9{,}81 + 4{,}78^2/2\ 9{,}81 + z_2$$
$$z_2 = 6{,}47 \text{ m}$$

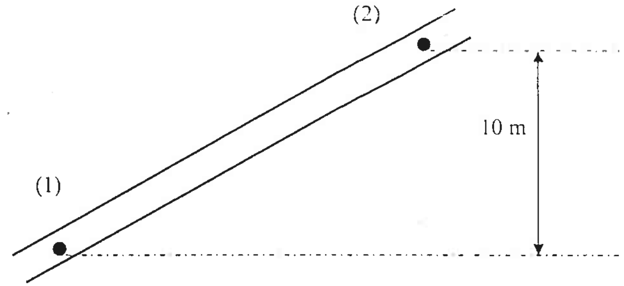
**ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4-4**

Σε μία σωληνογραμμή με σταθερή διάμετρο η πίεση στο σημείο (1) είναι 21000 Pa στο σημείο (2) είναι 14000 Pa και το σημείο (2) βρίσκεται 10 m υψηλότερα από το σημείο (1). Να προσδιοριστεί η διεύθυνση της ροής και οι απώλειες ενέργειας σε ύψος όταν το ειδικό βάρος του υγρού είναι:

α. 480 $kg/m^2s^2$
β. 1600 $kg/m^2s^2$

**Λύση:** α. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται, με την προϋπόθεση ότι η διεύθυνση της ροής είναι από το σημείο (1) προς το σημείο (2), μεταξύ του σημείου (1) και του σημείου (2) και παίρνοντας το σημείο (1) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά θα ισχύει:






$z_1 = 0$ m, $z_2 = 10$ m, $\upsilon_1 = \upsilon_2$ , $P_1 = 21000$ Pa, $P_2 = 14000$ Pa, και το μόνο άγνωστο είναι το $h_L$.
Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_L = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2$$
$$21000/480 - h_L = 14000/480 + 10$$
$$h_L = 4{,}6 \text{ m}$$

Επειδή το $h_L > 0$ πράγματι η ροή είναι από το σημείο (1) προς το σημείο (2).

β. Σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα η εξίσωση Bernoulli, εφαρμόζεται, με την προϋπόθεση ότι η διεύθυνση της ροής είναι από το σημείο (1) προς το σημείο (2), μεταξύ του σημείου (1) και του σημείου (2) και παίρνοντας το σημείο (1) σαν επίπεδο αναφοράς. Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά θα ισχύει:
$z_1 = 0$ m, $z_2 = 10$ m, $\upsilon_1 = \upsilon_2$ , $P_1 = 21000$ Pa, $P_2 = 14000$ Pa, και το μόνο άγνωστο είναι το $h_L$.
Η εξίσωση Bernoulli εφαρμόζεται ανάλογα:

$$P_1/\gamma + \upsilon_1^2/2g + z_1 - h_L = P_2/\gamma + \upsilon_2^2/2g + z_2$$
$$21000/1600 - h_L = 14000/1600 + 10$$
$$h_L = -5{,}6 \text{ m}$$

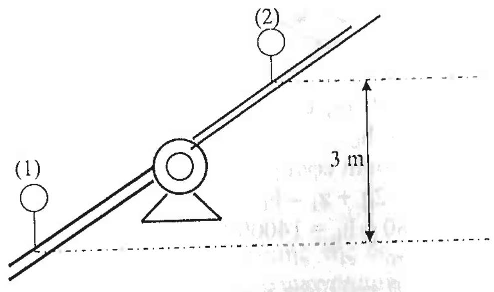
Επειδή το $h_L < 0$ η ροή είναι από το σημείο (2) προς το σημείο (1) και όχι από το σημείο(1) προς το σημείο (2) όπως υποθέσαμε.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ**

4-1 Μια σωληνογραμμή χρησιμοποιείται για την μεταφορά νερού από ένα σημείο (Α) όπου η μανομετρική πίεση είναι 5,15 $MN/m^2$ προς ένα άλλο σημείο (Β) το οποίο βρίσκεται 3,6 m πάνω από το (Α) και όπου η μανομετρική πίεση είναι 4,7 $MN/m^2$. Αν η ταχύτητα του νερού είναι 1 m/s στο σημείο (Α) όπου η διάμετρος της σωληνογραμμής είναι 5 cm, η δε διάμετρος στο σημείο (Β) είναι 2,5 cm, να προσδιοριστεί η ισχύς η οποία καταναλίσκεται για την υπερνίκηση των απωλειών ενέργειας εξαιτίας τριβών.

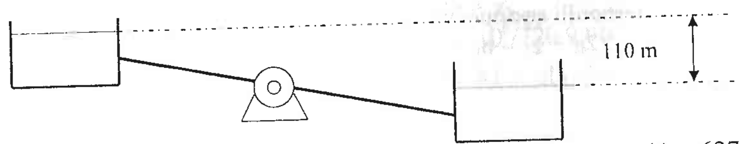
(Απ. 811 W)

4-2 Να βρεθεί η ισχύς την οποία πρέπει να παρέχει η αντλία στο σύστημα ώστε τα μανόμετρα (1) και (2), όταν η παροχή της αντλίας είναι 0,15 $m^3/s$, να έχουν ένδειξη – 33,25 kPa και 276 kPa αντίστοιχα. Η διάμετρος την σωληνογραμμής στον σωλήνα αναρρόφησης είναι 200 mm και στο σωλήνα κατάθλιψης 150 mm. Με την αντλία αντλούμε νερό , το μανόμετρο (2) είναι 3 m υψηλότερα από το μανόμετρο (1) και οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών είναι αμελητέες.



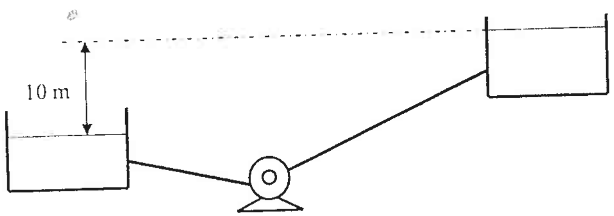

(Απ. 54,4 kW)

4-3 Ποια είναι η ισχύς που παράγεται στον υδροστρόβιλο όταν η διερχόμενη από αυτό ογκομετρική παροχή είναι 8 $m^3/s$ και η απόδοση του υδροστροβίλου είναι 80%. Οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών στον αγωγό είναι 10 m, η δε υδατόπτωση 110 m.




(Απ. 6278,4 kW)

4-4 Να προσδιοριστεί η αξονική ισχύς της αντλίας όταν η υψομετρική διαφορά των δύο δεξαμενών είναι 10 m και η παροχή του νερού 30 lit/s. Η διάμετρος της σωληνογραμμής είναι 12 cm, οι απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών (σε ύψος) είναι πέντε φορές του ύψους της ταχύτητας και η απόδοση της αντλίας είναι 80%.




(Απ. 4337 W)



# Όργανα Μέτρησης της Πίεσης και της Ροής

## 5-1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε στην περιγραφή της αρχής λειτουργίας του Διαφορικού Μανομέτρου και του Μετρητή Venturi.

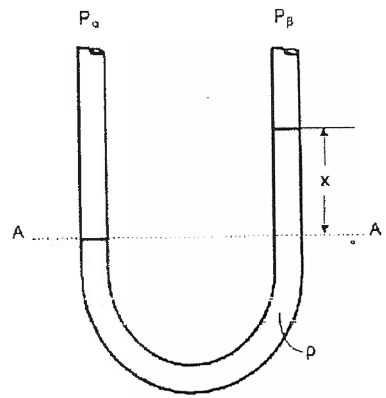
## 5-2 Μέτρηση της Πίεσης – Διαφορικό Μανόμετρο

Η μέτρηση της πίεσης γίνεται με όργανα που είναι γνωστά με το όνομα μανόμετρα. Ειδικότερα, ένας τύπος μανομέτρων που στηρίζεται στις αρχές της Υδροστατικής και μπορεί να μετράει διαφορές πιέσεων είναι γνωστός με το όνομα Διαφορικό Μανόμετρα. Το μανόμετρο αυτό φαίνεται στο Σχ. 5-1. Αποτελείται από ένα γυάλινο σωλήνα σταθερής διατομής σχήματος U που περιέχει κάποιο υγρό πυκνότητας ρ. Έστω ότι στα δύο σκέλη του μανομέτρου ασκούνται εξωτερικά (π.χ. από κάποιο έμβολο ή κάποιο αέριο) πιέσεις $P_\alpha$ και $P_\beta$ με $P_\alpha > P_\beta$. Το υγρό στον δεξιό σωλήνα ανέρχεται σε διαφορά ύψους, x, από την στάθμη του υγρού στον αριστερό σωλήνα, έτσι ώστε να επικρατήσει ισορροπία. Για τις πιέσεις που ασκούνται επάνω στη στάθμη ΑΑ θα ισχύει η ισότητα: πίεση στο αριστερό σκέλος = πίεση στο δεξιό σκέλος, ή,

$$P_\alpha = P_\beta + x\,\rho\,g$$

Επομένως θα ισχύει:

$$\Delta P = P_\alpha - P_\beta = x\,\rho\,g \qquad (5\text{-}1)$$




Σχ. 5-1 Σχηματικό Διάγραμμα Διαφορικού Μανομέτρου

Το μανόμετρο του Σχ.5-1 περιέχει συνήθως υδράργυρο ο οποίος έχει μεγάλη πυκνότητα και δεν απαιτεί έτσι μεγάλες διατάσεις μανομέτρου. Ένα τέτοιο μανόμετρο ονομάζεται υδραργυρικό. Είναι προφανές ότι τα μανόμετρο αυτό μπορεί να μετρήσει τις $P_\pi$ ή $P_\beta$ χωριστά, με την προϋπόθεση όμως ότι είναι γνωστή η μία από αυτές.

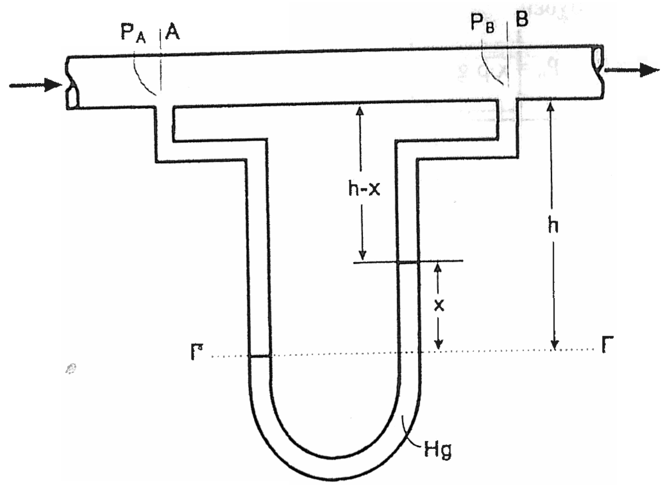
Στο Σχ. 5-2 φαίνεται μια διάταξη διαφορικού μανομέτρου η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την μέτρηση διαφορών πίεσης κατά μήκος κάποιου οριζοντίου σωλήνα δια μέσου του οποίου μεταφέρεται κάποιο υγρό. Στην περίπτωση αυτή δεν ισχύει η εξίσωση (5-1). Το υγρό για να κινηθεί στο σωλήνα από τα αριστερά προς τα δεξιά, απαιτείται κάποια διαφορά πίεσης, $\Delta P = P_A - P_B$ με $P_A > P_B$. Επειδή το υγρό που μεταφέρεται στο σωλήνα εισέρχεται και μέσα στο μανόμετρο, επηρεάζεται το ύψος ανύψωσης του υδραργύρου x. Έτσι όταν ο υδράργυρος ισορροπήσει, θα έχουμε για τις πιέσεις που ασκούνται επάνω στην στάθμη ΓΓ :

συνολική πίεση στο αριστερό σκέλος = συνολική πίεση στο δεξιό σκέλος, δηλαδή:

$$P_A + h\,\rho_\upsilon\, g = P_B + (h-x)\,\rho_\upsilon\, g + x\,\rho_{Hg}\, g$$ ή απλούστερα:

$$\Delta P = P_A - P_B = x\, g\,(\rho_{Hg} - \rho_\upsilon) \qquad (5\text{-}2)$$

όπου: x η ανύψωση του υδραργύρου στο δεξιό σκέλος, $\rho_\upsilon$ η πυκνότητα του υγρού που ρέει, $\rho_{Hg}$ η πυκνότητα του υδραργύρου και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

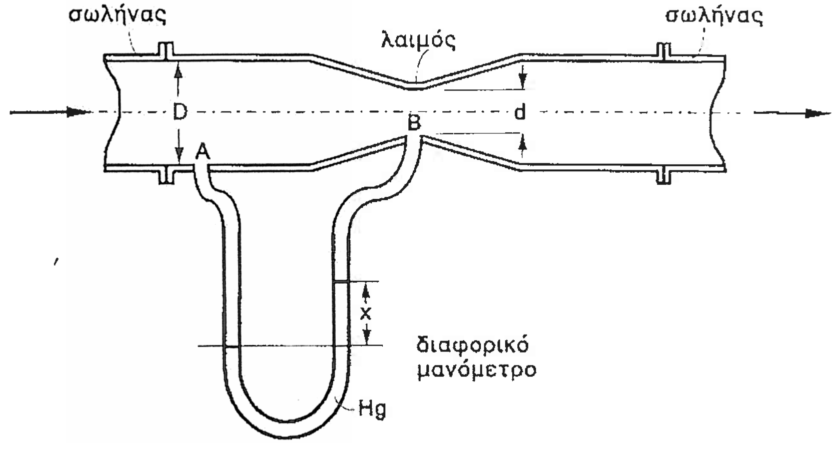



Σχ. 5-2 Διαφορικό Μανόμετρο σε Σωλήνα Μεταφοράς Ρευστού



## 5.3 Μέτρηση της Ροής – Μετρητής Venturi

Στο Σχ. 5-3 φαίνεται η σχηματική παράσταση ενός οργάνου που ονομάζεται Μετρητής Venturi (γνωστός και ως σωλήνας Venturi) και χρησιμοποιείται για την μέτρηση της μέσης τιμής της ταχύτητας ροής ενός ασυμπίεστου ρευστού.




Σχ. 5-3 Σχηματικό Διάγραμμα του Μετρητή Venturi

Το όργανο αυτό μπορεί να παρεμβληθεί ενδιάμεσα σε μια σωληνογραμμή και έχει σχήμα οριζόντιας κλεψύδρας μεγάλων διαστάσεων. Στα σημεία Α και Β (βλ. Σχ. 5-3) μπορεί να διαφορικό μανόμετρο. Η αρχή λειτουργίας του οργάνου αυτού στηρίζεται στην πτώση πίεσης που δημιουργείται μεταξύ των σημείων Α και Β εξαιτίας της απότομης συστολής της ροής στο σημείο Β (στένωση λαιμού). Η εσωτερική διάμετρος του οργάνου στο στένωμα Β είναι γνωστή και εδώ συμβολίζεται με d. Αν D είναι η εσωτερική διάμετρος του σωλήνα και x είναι η κατακόρυφη διαφορά στάθμης του υδραργύρου στο διαφορικό μανόμετρο, η εξίσωση Bernoulli δίνει:

$$P_1/\rho + g\,z_1 + \alpha_1\,\upsilon_1^2/2 = P_2/\rho + g\,z_2 + \alpha_2\,\upsilon_2^2/2 \qquad (5\text{-}3)$$

όπου, $P_1$ η πίεση στο σημείο Α, $P_2$ η πίεση στο σημείο Β, $z_1$, $z_2$ οι υψομετρικές αποστάσεις από την οριζόντια στάθμη αναφοράς (εξαιτίας της οριζόντιας θέσης του οργάνου $z_1 = z_2$ ), $\upsilon_1$ και $\upsilon_2$ η μέση τιμή της ταχύτητας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα και $\alpha_1$, $\alpha_2$ οι συντελεστές διόρθωσης για την μέση τιμή της ταχύτητας στα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

Οι απώλειες μηχανικής ενέργειας εξαιτίας τριβών μεταξύ των σημείων Α και Β θεωρούνται αμελητέες. Έτσι η παραπάνω εξίσωση τροποποιείται:

$$\alpha_2 \upsilon_2^2 - \alpha_1 \upsilon_1^2 = 2\,(P_1 - P_2)\,/\,\rho \qquad (5\text{-}4)$$

Εφαρμόζοντας τον νόμο της συνέχειας για ασυμπίεστα υγρά προκύπτει:

$$\upsilon_1 A_1 = \upsilon_2 A_2$$

όπου, τα εμβαδά των κυκλικών διατομών $A_1$ και $A_2$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$A_1 = \pi\, d_1^2 / 4 \quad \text{και} \quad A_2 = \pi\, d_2^2 / 4$$

Συνδυάζοντας τις τρεις παραπάνω σχέσεις η ταχύτητα $\upsilon_1$ γράφεται:

$$\upsilon_1 = \upsilon_2\,(d_2 / d_1)^2 \qquad (5\text{-}5)$$

Αντικαθιστώντας την (5-5) στην (5-4) και θέτοντας,

$d_2 / d_1 = d / D = \beta$ προκύπτει:

$$\alpha_2 \upsilon_2^2 - \alpha_1 \beta^4 \upsilon_2^2 = 2\,\Delta P/\rho \quad \text{ή} \quad \upsilon_2^2 = 1/(\alpha_2 - \alpha_1 \beta^4)\,.\,2\,\Delta P/\rho \quad \text{ή}$$

$$\upsilon_2^2 = 1/\sqrt{\alpha_2 - \alpha_1 \beta^4}\;.\;\sqrt{2\Delta P/\rho} \qquad (5\text{-}6)$$

Η εξίσωση (5-6) ισχύει για ροή χωρίς τριβές και ασυμπίεστα ρευστά. Στην πράξη όμως χρησιμοποιείται η τροποποιημένη σχέση:

$$\upsilon_2^2 = C_\beta / \sqrt{1-\beta^4}\;.\;\sqrt{2\Delta P/\rho} \qquad (5\text{-}7)$$

όπου, $C_\beta$ είναι ένας διορθωτικός εμπειρικός συντελεστής, που λαμβάνει υπόψη τις απώλειες ενέργειας εξαιτίας τριβών, καθώς και τους συντελεστές διόρθωσης $\alpha_1$ και $\alpha_2$.

Ο $C_\beta$ παίρνει την τιμή 0,98 για διαμέτρους σωλήνα από 2 έως 8 in και περίπου 0,99 για μεγαλύτερες διαμέτρους.
Επειδή στην πράξη η ταχύτητα $\upsilon_2$ δια μέσου του στενώματος Β του οργάνου δεν αποτελεί ενδιαφέρον μέγεθος, η σχέση (5-7) μπορεί να μετασχηματισθεί ως προς την ογκομετρική παροχή $\dot{V}$:

$$\dot{V} = \upsilon_2 A_2 = \pi\, C_\beta\, d^2 / 4 \sqrt{1-\beta^4}\;.\;\sqrt{2\Delta P/\rho} \qquad (5\text{-}8)$$



Η τελευταία σχέση (5-8) δίνει την ογκομετρική παροχή, όταν είναι γνωστοί οι διάμετροι του σωλήνα και του στενώματος, ο συντελεστής $C_\beta$ και η διαφορά πίεσης ΔΡ. Υπενθυμίζεται ότι για τον υπολογισμό της διαφοράς πίεσης ΔΡ ισχύει η σχέση (5-2) που αναφέρθηκε για τα διαφορικά μανόμετρα υδραργύρου.
Ο μετρητής Venturi είναι από τα ακριβέστερα για την μέτρηση της ογκομετρικής παροχής και έχουν το πλεονέκτημα ότι δεν προκαλούν σημαντικές απώλειες ενέργειας στο σύστημα εξαιτίας του ειδικού σχήματος τους. Από τα μειονεκτήματα τους είναι το κόστος αγοράς τους, ο μεγάλος σχετικά χώρος που απαιτείται για την εγκατάσταση τους, και το γεγονός ότι ο λόγος β είναι δεδομένος και δεν μπορεί να μεταβληθεί, με αποτέλεσμα να περιορίζεται το πεδίο εφαρμογής του οργάνου, ανάλογα με τις παροχές που επικρατούν.

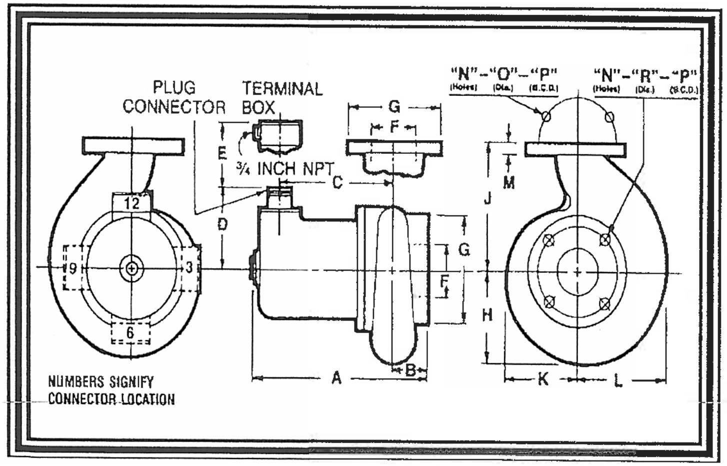
# Βιβλιογραφία

1. Παπαϊωάννου, Α., Μηχανική των Ρευστών, Τόμος Ι, Αθήνα, 1998.
2. Παπαϊωάννου, Α., Μηχανική των Ρευστών, Τόμος ΙΙ, Αθήνα, 1998.
3. Σκουλικίδη, Θ., Φυσικοχημεία, Τόμος $I_1$, Αθήνα, 1983.
4. Perry, R., Chilton, C., Chemical Engineers' Handbook, 7th ed., Mc Graw Hill, New York, 1997.
5. Ζόγκζας, Ν., Σημειώσεις Μηχανικής Τροφίμων Ι, ΤΕΙ Αθήνας 1997.
6. Ζόγκζας, Ν., Σημειώσεις Μηχανικής Τροφίμων ΙΙΙ, ΤΕΙ Αθήνας 1997.
7. Atkins, P,. and Trapp, A., Physical Chemistry, 5th ed., Freeman, San Francisco, 1994.
8. Κουμούτσου, Ν., Εφαρμοσμένη Θερμοδυναμική, ΕΜΠ, Αθήνα, 1980.
9. Κουμούτσου, Ν., και Παλυβού, Ι., Εισαγωγή στα Φαινόμενα Μεταφοράς, ΕΜΠ, Αθήνα, 1992.
10. Whitaker, S., Introduction to Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968.
11. White, F., Fluid Mechanics, 3rd ed., Mc Graw Hill, New York, 1994.
12. Αθανασιάδη, Ν., Μηχανική Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1989.
13. Τσαγγάρη, Σ., Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995.
14. Νουτσόπουλος, Γ., Μαθήματα Θεωρητικής και Εφαρμοσμένης Υδραυλικής, ΕΜΠ, Αθήνα, 1972.
15. Λυγερός, Α., και Μαρίνος-Κουρής, Δ., Σύμβολα Διαγραμμάτων Ροής Χημικών Βιομηχανιών, ΕΜΠ, Αθήνα, 1978.
16. Παπαντώνης, Δ., Υδροδυναμικές Μηχανές: Αντλίες-Υδροστόβιλοι, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1995.
17. Giles, R., Μηχανική των Ρευστών και Υδραυλική, Schaum's Outline Series, ΕΣΠΙ, Αθήνα, 1976.
18. Αυλωνίτης, Σ., και Αυλωνίτης, Δ., Μηχανική των Ρευστών, Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα, 1997.
19. Κορωνάκη, Π., Μηχανική Ρευστών Ι, ΟΕΔΒ, Αθήνα, 1995.
20. Streeter, V., και Wylie, B., Μηχανική Ρευστών, Εκδόσεις Γ.Φούντα, Αθήνα, 1995.

ΥΕΝ/ΚΕΣΕΝ
Δ/ΝΣΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

# ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ

# ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΩΝ





ΜΗΝΑ ΝΕΡΣΙΣΓΙΑΝ
Δρ. ΧΗΜΙΚΟΥ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥ ΕΜΠ
ΚΑΘΗΓΗΤΗ ΚΕΣΕΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ



ΑΘΗΝΑ 2003

I

# Πρόλογος

Σκοπός του Εργαστηρίου είναι να γνωρίσει στους σπουδαστές μεθόδους και εφαρμογές που σχετίζονται με τις εφαρμογές του μαθήματος Μηχανικής των Ρευστών. Έτσι κάθε σπουδαστής έχει την ευκαιρία να εξετάσει, κάτω από συνθήκες που δεν απέχουν από την πραγματικότητα, θεωρητικές έννοιες που αναφέρονται στις σημειώσεις ή στην παράδοση κατά την ώρα του μαθήματος.

Δίνεται επίσης στον σπουδαστή η ευκαιρία να είναι επινοητικός τόσο ως προς την διαδικασία που ακολουθείται όσο και ως προς την ανάλυση και επεξεργασία των μετρήσεων.

Θεωρώ καθήκον μου να τονίσω ότι δέχομαι κάθε καλόπιστη υπόδειξη σχετικά με την εργασία αυτή.

Αθήνα 2003 — Μηνάς Νερσισγιάν

# Περιεχόμενα

# ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΣΚΗΣΗ

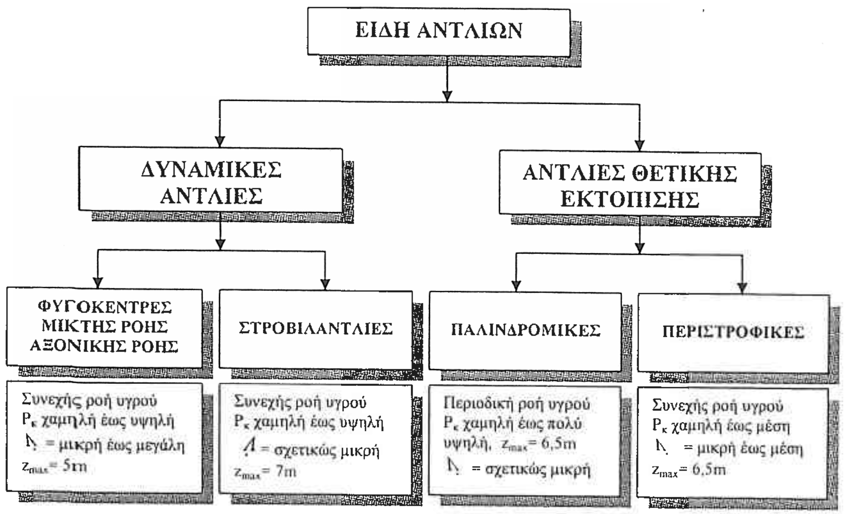
## ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΗΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΗΜΕΙΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΗΣ ΑΝΤΛΙΑΣ

### Ε.1-1 Σκοπός της Άσκησης

Σκοπός της άσκησης είναι να παραχθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες φυγόκεντρης αντλίας με σταθερή ταχύτητα περιστροφής και να εκτιμηθεί το άριστο σημείο λειτουργίας της.

### Ε.1-2 Εισαγωγή

*Αντλίες* ονομάζονται τα μηχανικά μέσα με τα οποία επιτυγχάνεται η διακίνηση υγρού σε μικρή ή μεγάλη απόσταση ή από ένα χώρο χαμηλής πίεσης σε άλλο υψηλής πίεσης ή από μια υψομετρική στάθμη (δεξαμενή) σε άλλη που βρίσκεται υψηλότερα.
Οι αντλίες τοποθετούνται πάντοτε μεταξύ των σημείων παραλαβής και των σημείων αποστολής του υγρού. Η διακίνηση του υγρού γίνεται μέσα από σωληνώσεις και επιτυγχάνεται με τη δημιουργία διαφοράς πίεσης στις δύο πλευρές του κινούμενου στοιχείου της αντλίας. Η κίνηση στο κινούμενο δίνεται από εξωτερική πηγή (ηλεκτροκινητήρα) με κατάλληλη σύνδεση.




Σχ. Ε-1. Ταξινόμηση και Χαρακτηριστικά Λειτουργίας των Αντλιών
($P_κ$ = Πίεση Κατάθλιψης, $\dot{V}$ = Ογκομ. Παροχή, $z_{max}$ = Μέγιστο Ύψος Αναρρόφησης)

Υπάρχουν δύο βασικοί τύποι αντλιών, *οι δυναμικές και οι αντλίες θετικής εκτόπισης*.

Στις *δυναμικές αντλίες* το διακινούμενο υγρό υφίσταται μεταβολή της κινητικής του κατάστασης, εξαιτίας πρόσδοσης ορμής σε αυτό από το κινούμενο στοιχείο της αντλίας. Το αποτέλεσμα της δράσης αυτής είναι η αύξηση της κινητικής ενέργειας του υγρού η οποία, στη συνέχεια μετατρέπεται σε στατική πίεση. Η ογκομετρική παροχή των δυναμικών αντλιών επηρεάζεται σημαντικά από την αντίσταση που παρουσιάζεται κατά την κίνηση του υγρού μέσα στη σωλήνωση μεταφοράς του. Οι δυναμικές αντλίες είναι κατάλληλες για τη διακίνηση υγρών χαμηλού ιξώδους με παροχές που μπορεί να φτάσουν σε πολύ υψηλές τιμές. Το κύριο μειονέκτημα τους είναι ότι, όταν λειτουργούν με μικρή παροχή και υψηλή πίεση, έχουν μικρό βαθμό απόδοσης.

Το κινούμενο στοιχείο των *δυναμικών αντλιών* αποτελείται από ένα ή περισσότερους δρομείς οι οποίοι φέρουν, χυτευμένα, *πτερύγια*. Ο δρομέας μαζί με τα πτερύγια ονομάζεται *πτερωτή*. Το σχήμα της πτερωτής εξαρτάται από τον τύπο της αντλίας και τη φύση του διακινούμενου υγρού. Η πτερωτή είναι στερεωμένη πάνω στον άξονα της αντλίας, ο οποίος συνδέεται με την κινητήρια μηχανή. Το ακίνητο μέρος της αντλίας, μέσα στο οποίο περιστρέφεται η πτερωτή, ονομάζεται *κέλυφος*. Το κέλυφος έχει ανοίγματα εισόδου και εξόδου του υγρού. Στις αντλίες του τύπου αυτού, το υγρό οδηγείται από το στόμιο εισόδου του κελύφους στο κέντρο ή στην περιφέρεια της περιστρεφόμενης πτερωτής. Η περαιτέρω κίνηση του υγρού εξαρτάται από τη σχήμα και τον τρόπο τοποθέτησης των πτερυγίων της πτερωτής. Έτσι, διακρίνουμε τέσσερα είδη δυναμικών αντλιών: *φυγόκεντρες, μικτής ροής, αξονικής ροής και στροβιλαντλίες.*

Στις αντλίες ***θετικής εκτόπισης***, το αντλητικό στοιχείο της αντλίας παραλαμβάνει μια ποσότητα υγρού η οποία παγιδεύεται εντός θαλάμου και τη μετατοπίζει στο χώρο αυξάνοντας τη στατική πίεση του υγρού, χωρίς να μεταβάλει την κινητική του ενέργεια. Η ογκομετρική παροχή των αντλιών αυτών είναι ανεξάρτητη από την υδραυλική αντίσταση των αγωγών μεταφοράς του υγρού. Οι αντλίες θετικής εκτόπισης είναι κατάλληλες για ανάπτυξη υψηλής πίεσης και μικρής παροχής. Το βασικό πλεονέκτημα, εκτός από την ανάπτυξη υψηλής πίεσης, είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την διακίνηση υγρών με μεγάλο ιξώδες. Διακρίνουμε δύο είδη αντλιών θετικής εκτόπισης: *τις παλινδρομικές και τις περιστροφικές.*

### Ε.1-3 Φυγόκεντρες Αντλίες

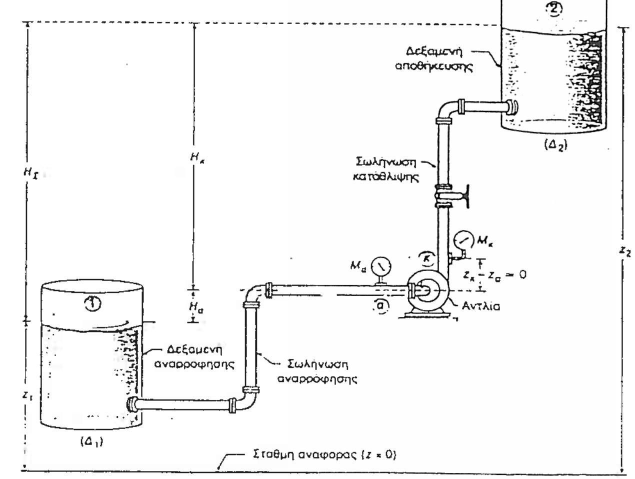
Τα βασικά εξαρτήματα μιας τυπικής φυγόκεντρης αντλίας είναι το κέλυφος, η πτερωτή και ο κινητήριος άξονας. Στις αντλίες του τύπου αυτού, το σχήμα των πτερυγίων και η διάταξη τους είναι τέτοια ώστε το υγρό που εισέρχεται στο κέλυφος αξονικώς, να κινείται και εξέρχεται κάθετα προς τον άξονα της αντλίας, δηλαδή, ακτινικώς. Για το λόγο αυτό, οι φυγόκεντρες αντλίες αναφέρονται συχνά και ως αντλίες ακτινικής ροής. Η αύξηση της πιέσεως του υγρού οφείλεται στη δράση της αναπτυσσόμενης φυγόκεντρης δύναμης. Οι



φυγόκεντρες αντλίες αποτελούν στην πράξη το συνηθέστερο τύπο αντλητικού μηχανήματος.

## • ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ

***Αντλητική εγκατάσταση*** ονομάζεται το υδροδυναμικό σύστημα το οποίο αποτελείται από την αντλία και τις σωληνώσεις μεταφοράς του υγρού. Η δυναμική αντλία αντλεί το υγρό από τη δεξαμενή αναρρόφησης και το καταθλίβει στη δεξαμενή αποθηκεύσεως που βρίσκεται σε μεγαλύτερο υψόμετρο και διαφορετική πίεση. Σε αντλητικές εγκαταστάσεις όπου οι δεξαμενές είναι ανοιχτές στην ατμόσφαιρα, οι πιέσεις στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στις δύο δεξαμενές είναι ίσες με ατμοσφαιρική.




Σχ. Ε-2 Τυπικό Σύστημα Διακίνησης Υγρών Μεταξύ Δεξαμενών

Σε ένα τυπι ... μεταφοράς του υγρού ( ... την αντλία) και τη *σωλ* ... είσοδο της αντλίας ονομάζεται ***πίεση αναρρόφησης***, $P_a$, και εκείνη στην έξοδο της, ***πίεση κατάθλιψης***, $P_\kappa$. Προφανώς, η πίεση $P_\kappa$ είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την πίεση $P_a$. Στους συνήθεις υπολογισμούς υψομετρική διαφορά μεταξύ των σημείων α (αναρρόφηση) και κ (κατάθλιψη), στα οποία τοποθετούνται τα μανόμετρα $M_a$ και $M_\kappa$ για τη μέτρηση των στατικών πιέσεων $P_a$ και $P_\kappa$, αντίστοιχα, θεωρείται αμελητέα $(z_\kappa - z_a = 0)$.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, στο άκρο του στομίου εισόδου της σωλήνωσης αναρρόφησης τοποθετείται ένα φίλτρο για να εμποδίζει την μεταφορά ξένων υλών στην αντλία. Συνήθως μετά το φίλτρο τοποθετείται μία ποδοβαλβίδα η οποία κλείνει υδατοστεγώς στο τμήμα αναρρόφησης. Όταν σταματήσει η λειτουργία της αντλίας η ποδοβαλβίδα εμποδίζει τη διαφυγή του υγρού από τη σωλήνωση αναρρόφησης και την αντλία, οπότε δε χρειάζεται πλήρωση για την εκκίνησή της.
Σε κάθε ***σύστημα άντλησης υγρών***, υπάρχουν τέσσερα χαρακτηριστικά ύψη (βλ. Σχ. Ε-2) τα οποία σχετίζονται άμεσα με τη λειτουργία της φυγόκεντρης αντλίας:

- Το στατικό ύψος αναρρόφησης, $H_a$
- Το στατικό ύψος κατάθλιψης, $H_\kappa$
- Το ολικό στατικό ύψος, $H_\Sigma$
- Το ολικό μανομετρικό ύψος, $h_\Sigma$

Ως ***στατικό ύψος αναρρόφησης, $H_a$***, ενός συστήματος άντλησης ορίζεται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στη δεξαμενή αναρρόφησης και του άξονα της αντλίας. Αν η αντλία είναι τοποθετημένη χαμηλότερα από τη στάθμη του υγρού στη δεξαμενή αναρρόφησης, το ύψος $H_a$ είναι αρνητικό ($H_a < 0$).
Το στατικό ύψος αναρρόφησης του συστήματος άντλησης, $H_a$, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$H_a \approx z_a - z_1 = \frac{P_1 - P_a}{\gamma} + \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_a^2}{2g} - h_{L,a} \qquad \text{(E-1)}$$

όπου, $h_{L,a}$ το ύψος των ολικών απωλειών ενέργειας της ροής στη σωλήνωση αναρρόφησης της αντλητικής εγκατάστασης, $P_1$ η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στη δεξαμενή αναρρόφησης, $P_a$ η πίεση αναρρόφησης, $\upsilon_1$ η ταχύτητα του υγρού στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής αναρρόφησης, $\upsilon_a$ η ταχύτητα του υγρού στη σωλήνωση αναρρόφησης, $\gamma$ το ειδικό βάρος του υγρού, $g$ η επιτάχυνση της βαρύτητας, και $(z_a - z_1)$ η υψομετρική διαφορά μεταξύ του μανομέτρου αναρρόφησης και της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στη δεξαμενή αναρρόφησης.

Ως ***στατικό ύψος κατάθλιψης, $H_\kappa$***, ενός *συστήματος άντλησης* ορίζεται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ του άξονα της αντλίας και της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού στη δεξαμενή αποθήκευσης. Το στατικό ύψος του συστήματος άντλησης, $H_\kappa$, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$H_\kappa \approx z_2 - z_\kappa = \frac{P_\kappa - P_2}{\gamma} + \frac{\upsilon_\kappa^2 - \upsilon_2^2}{2g} - h_{L,\kappa} \qquad \text{(E-2)}$$



όπου, $h_{L,\kappa}$ το ύψος των ολικών απωλειών ενέργειας της ροής στη σωλήνωση κατάθλιψης της αντλητικής εγκατάστασης, $P_\kappa$ η πίεση κατάθλιψης, $P_2$ η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού στη δεξαμενή αποθήκευσης, $\upsilon_\kappa$ η ταχύτητα του υγρού στη σωλήνωση κατάθλιψης, $\upsilon_2$ η ταχύτητα του υγρού στην ελεύθερη επιφάνεια της δεξαμενής αποθήκευσης, $\gamma$ το ειδικό βάρος του υγρού και $g$ η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η εξισώσεις (Ε-1) και (Ε-2) προκύπτουν από την άμεση εφαρμογή της εξίσωσης Bernoulli στη σωλήνωση αναρρόφησης και στη σωλήνωση κατάθλιψης, αντίστοιχα.

Ως ***ολικό στατικό ύψος, $H_\Sigma$***, ενός *συστήματος άντλησης* ορίζεται η κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των ελεύθερων επιφανειών του υγρού στις δεξαμενές αναρρόφησης, $z_1$, και αποθήκευσης, $z_2$:

$$H_\Sigma = z_2 - z_1 = (z_2 - z_\kappa) + (z_\kappa - z_a) + (z_a - z_1) \qquad \text{(E-3)}$$

και επειδή η υψομετρική διαφορά μεταξύ του μανομέτρου αναρρόφησης και του μανομέτρου κατάθλιψης $(z_\kappa - z_a)$ θεωρείται αμελητέα:

$$H_\Sigma = H_a + H_\kappa \qquad \text{(E-4)}$$

Το ***ολικό μανομετρικό ύψος, $h_\Sigma$***, *ενός συστήματος άντλησης* είναι ίσο με:

$$h_\Sigma = H_\Sigma + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + h_L + \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} - \frac{\upsilon_\kappa^2 - \upsilon_a^2}{2g} \qquad \text{(E-5)}$$

όπου, $H_\Sigma$ το ολικό στατικό ύψος, $\left(\frac{P_2 - P_1}{\gamma}\right)$ η διαφορά των υψών πίεσης στις επιφάνειες του υγρού, $h_L$ το ύψος των ολικών απωλειών ενέργειας σε ολόκληρη τη σωλήνωση, $\left(\frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g}\right)$ η διαφορά των υψών ταχύτητας στις περιοχές κατάθλιψης και αναρρόφησης και $\left(\frac{\upsilon_\kappa^2 - \upsilon_a^2}{2g}\right)$ το ύψος της ταχύτητας που παράγεται από την αντλία.
Συνήθως, η ταχύτητα εισόδου και εξόδου του υγρού από την αντλία είναι περίπου η ίδια $(\upsilon_a \approx \upsilon_\kappa)$ οπότε η εξίσωση (Ε-5) γράφεται:

$$h_\Sigma = H_\Sigma + \frac{P_2 - P_1}{\gamma} + \frac{\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2}{2g} + h_L \qquad \text{(E-6)}$$

Αν οι δεξαμενές αναρρόφησης και κατάθλιψης είναι ανοιχτές στην ατμόσφαιρα και η στάθμη του υγρού σε αυτές θεωρηθεί σταθερή, εξίσωση (Ε-6) απλοποιείται ως εξής:

$$h_\Sigma = H_\Sigma + h_L \qquad \text{(E-7)}$$

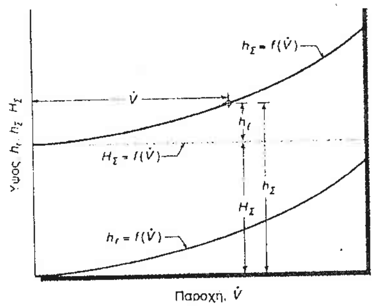
Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, *το μανομετρικό ύψος του αντλητικού συστήματος, $h_\Sigma$, είναι ίσο με το άθροισμα του ολικού στατικού ύψους του, $H_\Sigma$, και του ύψους των ολικών απωλειών ενέργειας στη σωλήνωση, $h_L$.*

- **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΤΛΗΣΗΣ**

Για ένα σύστημα άντλησης στο οποίο η δεξαμενή αναρρόφησης και η δεξαμενή αποθήκευσης είναι ανοιχτές στην ατμόσφαιρα και η στάθμη του υγρού σε αυτές είναι σταθερή, το μανομετρικό ύψος $h_\Sigma$ του συστήματος δίνεται από την εξίσωση (Ε-7):

$$h_\Sigma = H_\Sigma + h_L \qquad \text{(E-7)}$$

Δηλαδή το μανομετρικό ύψος του αντλητικού συστήματος, $h_\Sigma$, είναι ίσο με το άθροισμα του ολικού στατικού ύψους του, $H_\Sigma$, και του ύψους των ολικών απωλειών ενέργειας, $h_L$, στη σωλήνωση.




Σχ. Ε-3 Τυπική Χαρακτηριστική Καμπύλη Αντλητικού Συστήματος

Σε διάγραμμα ύψους – παροχής, η συνάρτηση $h_L = f(\dot V)$ παριστάνεται με μια καμπύλη δευτέρου βαθμού ενώ η συνάρτηση $H_\Sigma = f(\dot V)$ με μια ευθεία γραμμή. Προσθέτοντας το ύψος $H_\Sigma$ στο ύψος $h_L$ για κάθε τιμή της παροχής $\dot V$, προκύπτει το αντίστοιχο μανομετρικό ύψος, $h_\Sigma$. Ενώνοντας τα σημεία αυτά με μια συνεχή γραμμή προκύπτει η καμπύλη $h_\Sigma = f(\dot V)$, η οποία



ονομάζεται ***χαρακτηριστική καμπύλη του συστήματος*** *και* η οποία είναι καμπύλη δευτέρου βαθμού (βλ. Σχ. Ε-3 και Σχ. Ε-7 ).

- **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΜΕΓΕΘΗ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΗΣ ΑΝΤΛΙΑΣ**

Οι βασικές παράμετροι που χαρακτηρίζουν την απόδοση μιας φυγόκεντρης αντλίας είναι:

- Ογκομετρική Παροχή
- Ύψος Αναρρόφησης, Κατάθλιψης και Ολικό Μανομετρικό
- Αξονική και Υδραυλική Ισχύς
- Βαθμός Απόδοσης
- Αριθμός Στροφών

***Ογκομετρική Παροχή***, $\dot V$, είναι ο όγκος του υγρού που αποδίδεται από την αντλία στη σωλήνωση κατάθλιψης της αντλητικής εγκατάστασης στην μονάδα χρόνου $(m^3/_{sec})$. Η παροχή $\dot V$ υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\dot V = \upsilon_\kappa \cdot A_\kappa \qquad \text{(E-8)}$$

όπου, $\upsilon_\kappa$ είναι η μέση ταχύτητα του υγρού και $A_\kappa$ η εγκάρσια διατομή του στομίου εξόδου της αντλίας.

Επειδή στις συνήθως συνθήκες τα υγρά θεωρούνται ασυμπίεστα η εξίσωση (Ε-8) μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε θέση της σωλήνωσης κατάθλιψης.

***Ύψος αναρρόφησης***, $h_\alpha$, *μιας φυγόκεντρης αντλίας* είναι ίσο με το ύψος πίεσης της ροής στο στόμιο εισόδου του υγρού στην αντλία και δίνεται από τη σχέση:

$$h_\alpha = \frac{P_\alpha}{\gamma} = \frac{P_\alpha}{\rho \; g} \quad \left[ \frac{N/m^2}{Kg/m^3 \; m/s^2} = \frac{Kg\,m/s^2 / m^2}{Kg/m^3 \; m/s^2} = m \right] \qquad \text{(E-9)}$$

όπου, $P_\alpha$ η απόλυτη πίεση αναρρόφησης και $\gamma$ το ειδικό βάρος *($\gamma=\rho g$)* του υγρού.

***Ύψος κατάθλιψης***, $h_\kappa$, *μιας φυγόκεντρης αντλίας* είναι ίσο με το ύψος πίεσης της ροής στο στόμιο εξόδου του υγρού από την αντλία και δύνεται από σχέση:

$$h_\kappa = \frac{P_\kappa}{\gamma} = \frac{P_\kappa}{\rho \cdot g} \qquad \text{(E-10)}$$

όπου, $P_\kappa$ η απόλυτη πίεση κατάθλιψης, και $\gamma$ το ειδικό βάρος ($\gamma=\rho g$) του υγρού.

**Το *ολικό μανομετρικό ύψος (ή υδραυλικό ύψος)*, $h_p$,** μιας δυναμικής αντλίας είναι ίσο με την αύξηση της ολικής ενέργειας της μονάδας βάρους του υγρού καθώς αυτό διέρχεται από την αντλία. Υπολογίζεται με άμεση εφαρμογή της εξίσωσης μηχανικής ενέργειας, υπό μορφή υψών, μεταξύ της εισόδου και της εξόδου της αντλίας [σημεία (α) και (κ) του Σχ. Ε-2].

$$h_p = (z_\kappa - z_\alpha) + \frac{P_\kappa - P_\alpha}{\gamma} + \frac{\upsilon_\kappa^2 - \upsilon_\alpha^2}{2g} \qquad \text{(E-11)}$$

όπου, $(z_\kappa - z_\alpha)$ η υψομετρική διαφορά μεταξύ του μανομέτρου αναρρόφησης και του μανομέτρου κατάθλιψης, $\frac{P_\kappa - P_\alpha}{\gamma}$ η διαφορά των υψών πίεσης στο μανόμετρο κατάθλιψης και στο μανόμετρο αναρρόφησης, $\frac{\upsilon_\kappa^2 - \upsilon_\alpha^2}{2g}$ το ύψος της ταχύτητας που παράγεται από την αντλία.

Η εξίσωση (Ε-11), για $z_\kappa - z_\alpha \approx 0$ και $\upsilon_\alpha \approx \upsilon_\kappa$ γράφεται:

$$h_p = \frac{P_\kappa - P_\alpha}{\gamma} \qquad \text{(E-12)}$$

ή

$$h_p = h_\kappa - h_\alpha \qquad \text{(E-13)}$$

όπου, $h_\kappa$ το ύψος κατάθλιψης και $h_\alpha$ το ύψος αναρρόφησης.

***Αξονική ισχύς*, $P_s$,** είναι η ισχύς που μεταβιβάζεται στον άξονα της αντλίας από τον κινητήρα και υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P_s = V \cdot I \text{ (volt} \cdot \text{ampere = watt)} \qquad \text{(E-14)}$$

όπου, $V$ η τάση και $I$ η ένταση του ρεύματος.



***Υδραυλική ισχύς*, $P_w$,** είναι ισχύς που μεταβιβάζεται, τελικώς στο διακινούμενο υγρό από την αντλία. Η ισχύς, $P_w$, υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$P_w = \rho \cdot g \cdot \dot{V} \cdot h_P \quad \left( \frac{Kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2} \cdot \frac{m^3}{s} \cdot m = \frac{Kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{J}{s} = W \right) \qquad \text{(E-15)}$$

όπου, $\rho$ η πυκνότητα του ρευστού, $g$ η επιτάχυνση της βαρύτητας, $\dot{V}$ η ογκομετρική παροχή και $h_P$ το ολικό μανομετρικό ύψος.

***Βαθμός απόδοσης*, $n_p$,** μιας αντλίας ορίζεται ο λόγος της υδραυλικής ισχύος, $P_w$, προς την αξονική ισχύ, $P_s$, της αντλίας.

$$n_P = \frac{P_W}{P_S} \quad \text{ή} \quad \%n_P = \frac{P_W}{P_S} \cdot 100 \qquad \text{(E-16)}$$

Ο βαθμός απόδοσης των δυναμικών αντλιών κυμαίνεται συνήθως μεταξύ 60 και 80%.

***Αριθμός στροφών*, $N$,** της πτερωτής εξαρτάται από το είδος και τον τρόπο σύνδεσης της κινητήριας μηχανής με τον άξονα της αντλίας. Η ταχύτητα περιστροφής της πτερωτής εκφράζεται συνήθως σε στροφές ανά λεπτό (στρ./min). Στην πράξη, χρησιμοποιούνται κυρίως διπολικοί και τετραπολικοί κινητήρες, οι οποίοι όταν τροφοδοτούνται με εναλλασσόμενο ρεύμα συχνότητας 50 Hz περιστρέφονται με ταχύτητα 2900 – 1450 στρ./min, αντίστοιχα.

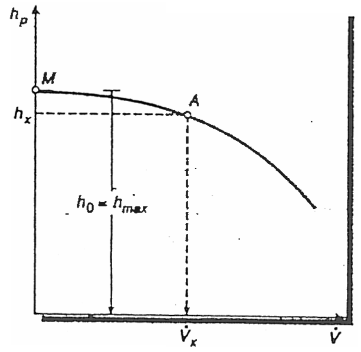
- **ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΦΥΓΟΚΕΝΤΡΗΣ ΑΝΤΛΙΑΣ**

Κάθε αντλία κατασκευάζεται για να παρέχει ορισμένη παροχή, $\dot{V}$, και ορισμένο ολικό μανομετρικό ύψος, $h_p$, όταν λειτουργεί με το μέγιστο βαθμό απόδοσης ($n_p = n_{max}$), σε δεδομένο αριθμό στροφών, $N$, της πτερωτής. Όμως, όταν η αντλία εγκατασταθεί σε κάποιο αντλητικό σύστημα δε θα λειτουργεί απαραίτητα στις συνθήκες για τις οποίες έχει κατασκευαστεί. Επομένως για την εγκατάσταση μιας αντλίας, εκτός από τους παραμέτρους $\dot{V}$, $h_p$ και $N$, πρέπει να είναι γνωστή και η απόδοση της αντλίας όταν οι συνθήκες λειτουργίας της μεταβάλλονται.
Ο καθορισμός των υδραυλικών χαρακτηριστικών των αντλιών γίνεται πειραματικά και τα σχετικά αποτελέσματα δίνονται συνήθως σε μορφή διαγραμμάτων. Τα διαγράμματα αυτά σχεδόν πάντοτε χαράσσονται για σταθερό αριθμό στροφών, $N$, του άξονα της αντλίας. Η βασική ανεξάρτητη

μεταβλητή είναι η πραγματική παροχή, $\dot{V}$, η τιμή της οποίας μεταβάλλεται, κατά βούληση, με τη ρύθμιση της βαλβίδας εκροής του υγρού από την αντλία. Ως εξαρτημένες μεταβλητές λαμβάνονται το ολικό μανομετρικό ύψος, $h_p$, η αξονική ισχύς, $P_s$ και ο ολικός βαθμός απόδοσης, $n_p$, της αντλίας. Με τον τρόπο αυτό καθορίζονται τρεις πειραματικές καμπύλες:

- Η καμπύλη Ολικού Μανομετρικού Ύψους - Παροχής $\left[h_p = f(\dot{V})\right]$
- Η καμπύλη Αξονικής Ισχύος – Παροχής $\left[P_s = f(\dot{V})\right]$
- Η καμπύλη Βαθμού Απόδοσης – Παροχής $\left[n_p = f(\dot{V})\right]$

Οι καμπύλες αυτές ονομάζονται χαρακτηριστικές καμπύλες της αντλίας. Η μορφή των χαρακτηριστικών καμπυλών μιας φυγόκεντρης αντλίας εξαρτάται από τα κατασκευαστικά χαρακτηριστικά (όπως το γεωμετρικό σχήμα και το μέγεθος των




Σχ. Ε-4 Χαρακτηριστική Καμπύλη Ολικού Μανομετρικού Ύψους - Παροχής

πτερυγίων και του κελύφους) και της ταχύτητα περιστροφής του άξονά τους. Επίσης σημαντική είναι η επίδραση του ιξώδους του διακινούμενου υγρού.

- **Χαρακτηριστική Καμπύλη Ολ. Μαν. Ύψους – Παροχής,** $h_p = f(\dot{V})$

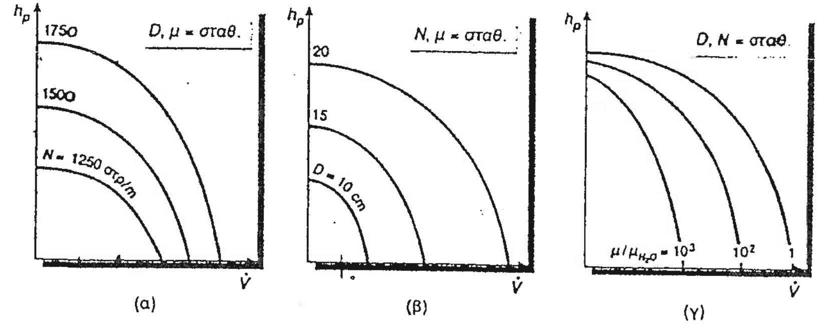
Η καμπύλη $h_p = f(\dot{V})$ είναι η πιο σημαντική από τις τρεις χαρακτηριστικές καμπύλες λειτουργίας μιας αντλίας (βλ. Σχ. Ε-4 και Σχ. Ε-6). Το ολικό μανομετρικό ύψος που αναπτύσσει η αντλία για $\dot{V} = 0$ δηλαδή, με τελείως κλειστή τη βαλβίδα εκροής του υγρού από την αντλία, είναι μέγιστο $(h_p = h_0 = h_{max})$ και, με την αύξηση της παροχής, γίνεται μικρότερο. Όταν η αντλία παρέχει τη μέγιστη δυνατή παροχή, $\dot{V}_{max}$, για τη δεδομένη ταχύτητα περιστροφής, το μανομετρικό ύψος της είναι μηδέν.

Στο Σχ. Ε-5 φαίνεται η επίδραση της ταχύτητας περιστροφής, του μεγέθους της πτερωτής και του ιξώδους του διακινούμενου υγρού στη μορφή της χαρακτηριστικής καμπύλης ολικού μανομετρικού ύψους – παροχής των φυγόκεντρων αντλιών. Παρατηρούμε ότι όταν ο βαθμός στροφών της αντλίας, $N$, αυξάνεται η καμπύλη $h_p = f(\dot{V})$ διατηρεί την ίδια μορφή, αλλά η ίδια μετατοπίζεται προς τα επάνω και δεξιά (βλ. Σχ.Ε-5α). Δηλαδή, για δεδομένη παροχή, η αντλία αναπτύσσει μεγαλύτερο ολικό μανομετρικό ύψος.



Ποιοτικά την ίδια επίδραση έχει και αύξηση της διαμέτρου, D, της φτερωτής (βλ. Σχ. Ε-5β). Με την αύξηση του ιξώδους του διακινούμενου υγρού, η χαρακτηριστική καμπύλη της αντλίας μετατοπίζεται προς τα κάτω και αριστερά (βλ. Σχ. Ε-5γ). Όταν το αντλούμενο υγρό έχει πολύ μεγάλο ιξώδες επειδή η απόδοση της αντλίας μειώνεται δραματικά συνιστάται η χρησιμοποίηση αντλιών θετικής εκτόπισης.

Σχ. Ε-5 Επίδραση (α) της Ταχύτητας Περιστροφής, (β) του Μεγέθους της Πτερωτής και (γ) του Ιξώδους του Διακινούμενου Υγρού στην Καμπύλη



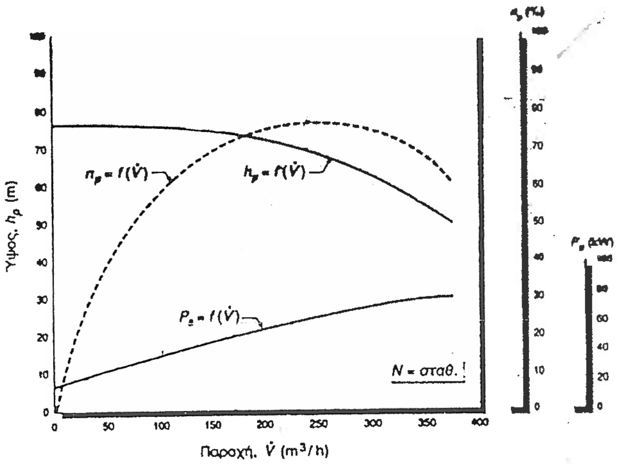

$h_p = f(\dot{V})$.

- **Χαρακτηριστική Καμπύλη Αξονική Ισχύος – Παροχής,** $P_s = f(\dot{V})$

Σε μια φυγόκεντρη αντλία που λειτουργεί με σταθερή ταχύτητα, η αξονική ισχύς της αντλίας αυξάνεται με την αύξηση της παροχής (βλ. Σχ. Ε-6). Αν ο αριθμός στροφών της αντλίας αυξηθεί, η καμπύλη $P_s = f(\dot{V})$ μετατοπίζεται προς την περιοχή μεγαλύτερων τιμών αξονικής ισχύος. Το ίδιο ισχύει, αλλά σε πολύ μεγαλύτερο βαθμό, και με την αύξηση του ιξώδους του υγρού.

- **Χαρακτηριστική Καμπύλη Βαθμού Απόδοσης–Παροχής,** $n_p = f(\dot{V})$

Η καμπύλη $n_p = f(\dot{V})$ μιας φυγόκεντρης αντλίας (βλ. Σχ. Ε-6) διέρχεται από ένα μέγιστο το οποίο αντιστοιχεί σε παροχή ίση περίπου με το 60% της μέγιστης δυνατής παροχής (δηλαδή $(\dot{V} \approx 0{,}60\dot{V}_{max})$. Ο βαθμός απόδοσης της αντλίας είναι μηδέν στην αρχή (όταν δεν υπάρχει ροή) και στη $\dot{V}_{max}$ (όταν δεν αναπτύσσεται μανομετρικό ύψος).



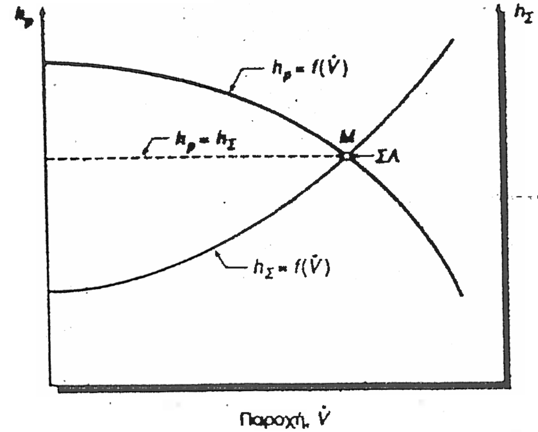

Σχ. Ε-6 Τυπικές Χαρακτηριστικές Καμπύλες Φυγόκεντρης Αντλίας

- **ΣΗΜΕΙΟ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑΣ**

Η αντλία μπορεί να λειτουργήσει σε οποιοδήποτε σημείο της χαρακτηριστικής καμπύλης $h_p = f(\dot{V})$. Όμως από οικονομική άποψη, προτιμάται το σημείο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο μέγιστο βαθμό απόδοσης της αντλίας (υπό την προϋπόθεση η παροχή βρίσκεται μέσα στα επιθυμητά όρια).



Από φυσική άποψη, ***το άριστο σημείο λειτουργίας*** της αντλίας είναι εκείνο στο οποίο *το ολικό μανομετρικό ύψος,* $h_p$, *που αναπτύσσει η αντλία είναι ακριβώς ίσο με το ολικό μανομετρικό ύψος,* $h_\Sigma$, *του αντλητικού συστήματος.*
Αν σχεδιάσουμε σε κοινό διάγραμμα (βλ. Σχ. Ε-7) τη χαρακτηριστική καμπύλη Ολικού Μανομετρικού Ύψους – Παροχής της αντλίας, $h_p = f(\dot{V})$, και τη χαρακτηριστική καμπύλη του αντλητικού συστήματος, $h_\Sigma = f(\dot{V})$, το σημείο τομής τους προσδιορίζει το σημείο λειτουργίας στο οποίο η αντλία προσαρμόζεται αυτόματα. Υπενθυμίζεται ότι χαρακτηριστική καμπύλη συστήματος για ένα σύστημα άντλησης στο οποίο η δεξαμενή αναρρόφησης και η δεξαμενή αποθήκευσης είναι ανοιχτές στην ατμόσφαιρα και η στάθμη του υγρού σε αυτές είναι σταθερή, ονομάζεται η καμπύλη δευτέρου βαθμού $h_\Sigma = f(\dot{V})$ (βλ. Σχ. Ε-3).




Σχ. Ε-7 Προσδιορισμός του Σημείου Λειτουργίας (ΣΛ) Φυγόκεντρης Αντλίας

## Ε.1-4 Διαδικασία Άσκησης

- Τίθεται σε λειτουργία ο ηλεκτροκινητήρας της φυγόκεντρης αντλίας.
- Ανοίγεται πρώτα ο διακόπτης αναρρόφησης και μετά ο διακόπτης κατάθλιψης, εντελώς.
- Στον πίνακα ελέγχου ρυθμίζονται οι στροφές της αντλίας στις 2900.

- Λαμβάνονται: (α) οι ενδείξεις από τα δύο μανόμετρα που βρίσκονται αμέσως πριν και μετά την αντλία, ένα στον αγωγό αναρρόφησης (το μανόμετρο αυτό μετράει ύψος υποπίεσης) και ένα στον αγωγό κατάθλιψης και (β) οι ενδείξεις του βολτομέτρου και αμπερομέτρου που βρίσκονται στον πίνακα ελέγχου.

- Υπολογίζεται το ολικό στατικό ύψος του συστήματος άντλησης, $H_{\Sigma}$.

- Η ογκομετρική παροχή της αντλίας βρίσκεται από το ροόμετρο σε $m^3/h$.

- Οι παραπάνω λειτουργίες επαναλαμβάνονται μερικές ακόμη φορές, κάθε φορά στραγγαλίζοντας λίγο περισσότερο τη ροή, κλείνοντας δηλαδή το διακόπτη στον αγωγό κατάθλιψης.

## Ε.1-5 Παρουσίαση Μετρήσεων και Αποτελεσμάτων

1. Από τις μετρήσεις να συμπληρωθεί ο Πίνακας Μετρήσεων.

2. Να σχηματιστούν οι γραφικές παραστάσεις:
   (α) Ολικού Μανομετρικού Ύψους - Παροχής $\left[h_p = f(\dot{V})\right]$
   (β) Αξονικής Ισχύος – Παροχής $\left[P_s = f(\dot{V})\right]$
   (γ) Βαθμού Απόδοσης – Παροχής $\left[n_p = f(\dot{V})\right]$

3. Να σχηματιστούν οι γραφικές παραστάσεις όλες μαζί σε ίδιο γράφημα.

4. Να αξιολογηθούν τα αποτελέσματα των γραφικών παραστάσεων της παραγράφου 2 και 3 και να δικαιολογηθούν οι υπάρχουσες ιδιομορφίες ή και σοβαρές αποκλίσεις (εάν υπάρχουν) από αντίστοιχα αναμενόμενα μεγέθη.

5. Να εκτιμηθεί το άριστο σημείο λειτουργίας της αντλίας όταν οι ολικές απώλειες ενέργειας της ροής θεωρηθούν αμελητέες.



ΠΙΝΑΚΑΣ 1

### Ε.2-3 Διαδικασία Άσκησης

- Τίθεται σε λειτουργία οι ηλεκτροκινητήρες των φυγόκεντρων αντλιών και ανοίγουμε ή κλείνουμε τους κατάλληλους διακόπτες προκειμένου να γίνει δυνατή η παράλληλη ή σε σειρά σύνδεση των δύο αντλιών.
- Ανοίγεται πρώτα ο διακόπτης αναρρόφησης και μετά ο διακόπτης κατάθλιψης του συστήματος των δύο αντλιών, εντελώς.
- Στον πίνακα ελέγχου ρυθμίζονται οι στροφές της κάθε αντλίας στις 2900.
- Λαμβάνονται: (α) οι ενδείξεις από το μανόμετρο αναρρόφησης και το μανόμετρο κατάθλιψης του συστήματος και (β) οι ενδείξεις του βολτομέτρου και αμπερομέτρου και για τις δύο αντλίες που βρίσκονται στον πίνακα ελέγχου.
- Η ογκομετρική παροχή του συστήματος βρίσκεται από το ροόμετρο σε $m^3/h$.
- Οι παραπάνω λειτουργίες επαναλαμβάνονται μερικές ακόμη φορές, κάθε φορά στραγγαλίζοντας λίγο περισσότερο τη ροή, κλείνοντας δηλαδή το διακόπτη στον αγωγό κατάθλιψης του συστήματος.

### Ε.2-4 Παρουσίαση Μετρήσεων και Αποτελεσμάτων

1. Από τις μετρήσεις να συμπληρωθεί ο Πίνακας Μετρήσεων.
2. Να σχηματιστούν, τόσο στην περίπτωση της σε σειρά σύνδεσης όσο και στην περίπτωση της σε σειρά σύνδεσης , οι γραφικές παραστάσεις:
   (α) Ολικού Μανομετρικού Ύψους - Παροχής $\left[h_p = f(\dot{V})\right]$
   (β) Αξονικής Ισχύος – Παροχής $\left[P_s = f(\dot{V})\right]$
   (γ) Βαθμού Απόδοσης – Παροχής $\left[n_p = f(\dot{V})\right]$
3. Να σχηματιστούν οι γραφικές παραστάσεις όλες μαζί στο ίδιο γράφημα.
4. Να αξιολογηθούν οι γραφικές παραστάσεις της παραγράφου 2 και 3 και να συγκριθούν με τα αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις της πρώτης Εργαστηριακής Άσκησης.
5. Να συγκριθεί η γραφική παράσταση $\left[h_p = f(\dot{V})\right]$ της σε σειρά σύνδεσης με την αντίστοιχη γραφική παράσταση της παράλληλης σύνδεσης.



ΠΙΝΑΚΑΣ 2

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

| $A/A$ | $\dot{V}$ $(m^3/h)$ | $P_\kappa$ (bar) | $P_\alpha$ (bar) | $V_{\alpha\nu\tau.1}$ (Volt) | $V_{\alpha\nu\tau.2}$ (Volt) | $I_{\alpha\nu\tau.1}$ (Amp) | $I_{\alpha\nu\tau.2}$ (Amp) | $h_\kappa$ (m) | $h_\alpha$ (m) | $h_p$ (m) | $P_w$ (Watt) | $P_s$ (Watt) | $\%\eta_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | |
| 7 | | | | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | | | | | | | | | | | | | |
| 11 | | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | | | | | | | | | | | | |

όπος Σύνδεσης = Αριθμός Στροφών =

# Βιβλιογραφία


1. Παπαϊωάννου, Α., Μηχανική των Ρευστών, Τόμος Ι, Αθήνα, 1998.
2. Παπαϊωάννου, Α., Μηχανική των Ρευστών, Τόμος ΙΙ, Αθήνα, 1998.
3. Ζόγκζας, Ν., Σημειώσεις Μηχανικής Τροφίμων ΙΙΙ, ΤΕΙ Αθήνας 1997.
4. Αθανασιάδη, Ν., Μηχανική Ρευστών, Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1989.
5. Κορωνάκη, Π., Εργαστηριακή Ρευστομηχανική Ι, Εκδόσεις Ιων, Αθήνα, 1995.