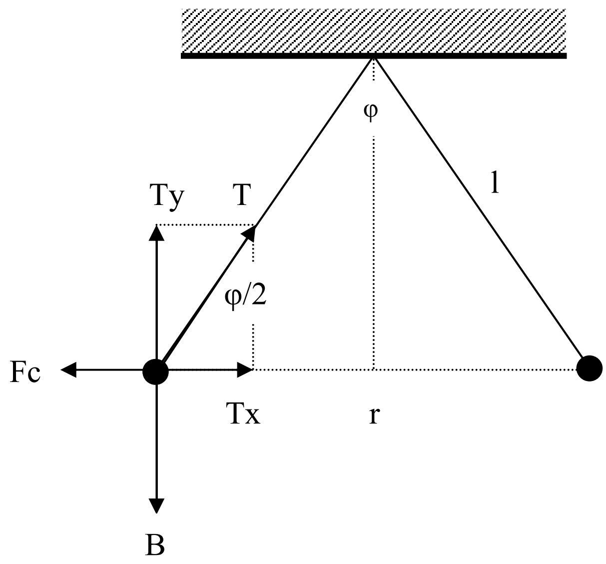
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

ΑΣΚΗΣΗ 1.1

Δύο σφαίρες φορτίου q και μάζας m = 3gr, κρέμονται από το ίδιο σημείο με νήματα μήκους l =40cm. Αν οι σφαίρες ισορροπούν όταν τα νήματα σχηματίζουν γωνία φ = 60^o, να βρεθεί το φορτίο q. Δίνονται g = $10 m/s^2$ και $\varepsilon_o = 8,85 x 10^{-12}$ F/m.



Σε κάθε σφαίρα ασκούνται το βάρος B, μια απωστική ηλεκτρική δύναμη (δύναμη Coulomb) F_c και η τάση του νήματος T. Αναλύουμε την τάση T σε δύο ορθογώνιες συνιστώσες T_x και T_y. Θεωρώντας ισορροπία δυνάμεων στον οριζόντιο και κατακόρυφο άξονα έχουμε:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad T_x = F_c \quad \Rightarrow \quad T\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o r^2}$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad T_y = B \quad \Rightarrow \quad T\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = mg$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες σχέσεις:

$$\tan\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_o mgr^2}$$

Επιλύνοντας ως προς το φορτίο:

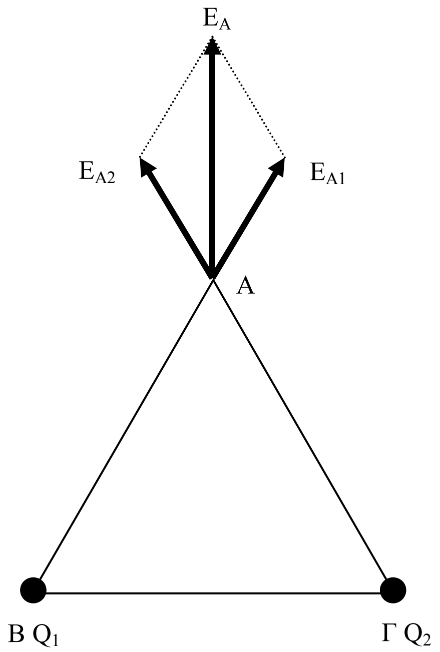
$$q = 2r\sqrt{\pi\varepsilon_o mg\tan(\phi/2)}.$$

Επειδή τα νήματα και η απόσταση r μεταξύ των φορτίων σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο έπεται ότι r = l. Επομένως:

$$q = 2l\sqrt{\pi\varepsilon_o mg \tan(\phi/2)} = 5{,}6x10^{-7}\,C.$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.2

Δύο όμοια ηλεκτρικά φορτία $Q_1 = Q_2 = 1\mu C$ είναι τοποθετημένα στις δύο κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α = 10cm. Να υπολογιστεί η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που σχηματίζεται στην τρίτη κορυφή. Δίνεται $\varepsilon_o = 8{,}85x10^{-12}$ F/m.



Το φορτίο Q_1 δημιουργεί στο σημείο Α ένταση E_{A1} ίση με

$$E_{A1} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_o a^2} = \frac{1x10^{-6}}{4x3{,}14x8{,}85x10^{-12}x(0{,}1)^2} = 900000 \quad \left(\frac{N}{C}\right).$$

Ομοίως το φορτίο Q_2 δημιουργεί στο σημείο Α ένταση E_{A2} ίση με

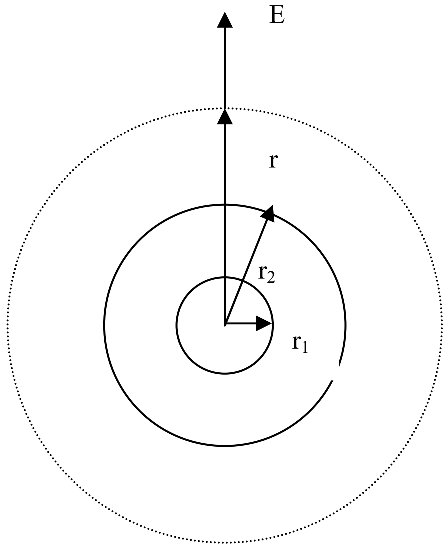
$$E_{A2} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_o a^2} = 900000 \quad \left(\frac{N}{C}\right).$$

Η συνολική ένταση στο σημείο Α βρίσκεται από τη διανυσματική άθροιση των επιμέρους πεδίων E_{A1} και E_{A2}. Η σχέση που χρησιμοποιούμε ονομάζεται νόμος συνημιτόνου και παρατηρούμε ότι τα διανύσματα σχηματίζουν γωνία ίση με $\varphi = 60^o$.

$$E_A^2 = E_{A1}^2 + E_{A2}^2 + 2E_{A1}E_{A2}\cos\phi$$
$$E_A = \sqrt{E_{A1}^2 + E_{A2}^2 + 2E_{A1}E_{A2}\cos\phi}$$
$$E_A = \sqrt{2x(900000)^2 + 2x900000x900000\cos 60^o} = 1559000 \quad \left(\frac{N}{C}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.3

Σφαίρα ακτίνας r_1 = 5cm έχει χωρική πυκνότητα φορτίου ρ_V=3x10^{-6}C/m^3. Η σφαίρα περικλείεται από σφαιρικό φλοιό ακτίνας r_2 = 10cm με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου ρ_S = 2x10^{-7}C/m^2. Να υπολογιστεί η ένταση E στο τυχαίο σημείο του χώρου που απέχει απόσταση r > r_2 από το κοινό κέντρο.



Το πρόβλημα παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία. Επιλέγουμε μια σφαιρική επιφάνεια S με ακτίνα ίση με r. Το διάνυσμα της έντασης θα έχει τη διεύθυνση της ακτίνας και θα έχει σταθερό μέτρο σε όλη την επιφάνεια της εξωτερικής σφαίρας. Η εφαρμογή του νόμου του Gauss δίνει.

$$\Phi = Q_{ο\lambda}$$
$$\varepsilon_o E \oint_S dS = Q_{ο\lambda}$$

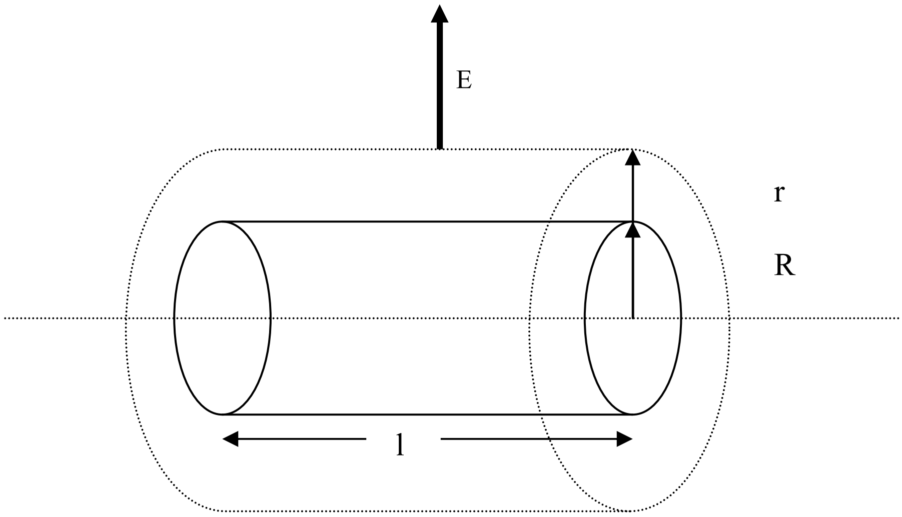
Το ολικό φορτίο ισούται με το φορτίο $Q_1 = \rho_V V_1$ της εσωτερικής σφαίρας συν το φορτίο $Q_2 = \rho_S S_2$ της ενδιάμεσης σφαίρας. Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις την επιφάνεια S, τον όγκο V_1 και το εμβαδόν S_2

$$\varepsilon_o E\left(4\pi r^2\right) = \rho_V \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \rho_S 4\pi r_2^2$$

$$E = \frac{\rho_V \frac{1}{3} r_1^3 + \rho_S r_2^2}{\varepsilon_o r^2} = \frac{240}{r^2} \quad \left(\frac{N}{C}\right).$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.4

Να υπολογιστεί η ένταση E και το δυναμικό φ σε ένα σημείο που απέχει απόσταση r > R από τον άξονα ενός φορτισμένου κυλίνδρου ακτίνας R = 10cm. Ο κύλινδρος έχει γραμμική πυκνότητα φορτίο $\rho_l = 2x10^{-6}$C/m και συνολικό μήκος ίσο με l.



α) Το πρόβλημα παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία. Για να εφαρμόσω το νόμο του Gauss επιλέγω μια κυλινδρική επιφάνεια S με ακτίνα ίση με r. Η ένταση E θα έχει διεύθυνση κάθετη στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου.

$$\Phi = Q_{o\lambda}$$

$$\varepsilon_o E \oint_S dS = \rho_l l$$

$$\varepsilon_o E(2\pi r l) = \rho_l l$$

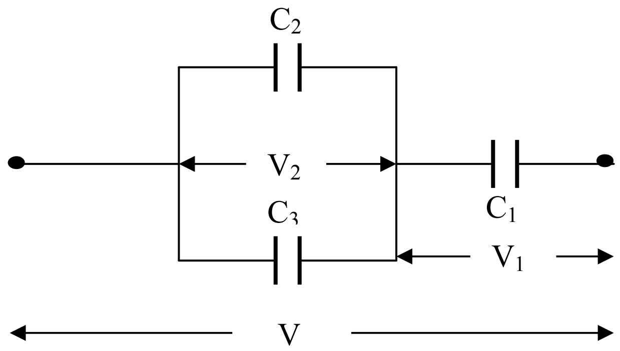
$$E = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_o r} = \frac{36000}{r} \quad \left(\frac{N}{C}\right)$$

β) Η συνάρτηση δυναμικού υπολογίζεται με απευθείας ολοκλήρωση της έκφρασης για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου.

$$\phi = -\int_R^r E(r)dr = -36000\int_R^r \frac{1}{r}dr = -36000[\ln r]_R^r = 36000(\ln R - \ln r) = 36000\ln\left(\frac{R}{r}\right) \quad (V)$$

ΑΣΚΗΣΗ 1.5

Να βρεθεί το φορτίο και η διαφορά δυναμικού για κάθε πυκνωτή του σχήματος, αν $C_1 = 8\mu F$, $C_2 = 5\mu F$, $C_3 = 3\mu F$ και $V = 100V$.



Οι πυκνωτές C_2 και C_3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα και έχουν ισοδύναμη χωρητικότητα

$$C_{23} = C_2 + C_3 = 5 + 3 = 8\mu F.$$

Η χωρητικότητα C_{23} είναι σε σειρά με τον πυκνωτή C_1 και επομένως η συνολική χωρητικότητα του συστήματος θα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{23}} + \frac{1}{C_1} \Rightarrow C = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}} = \frac{8x8}{8+8} = 4\mu F.$$

Το ολικό φορτίο είναι ίσο με

$$Q = C \cdot V = 4x10^{-6}x100 = 4x10^{-4}C.$$

Η εν σειρά σύνδεση σημαίνει ότι

$$Q_1 = Q_{23} = Q = 4x10^{-4}C.$$

Για τη διαφορά δυναμικού έχουμε

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{4x10^{-4}}{8x10^{-6}} = 50V \qquad V_2 = V - V_1 = 100 - 50 = 50V.$$

Τα φορτία υπολογίζονται ως εξής:

$$Q_2 = C_2V_2 = 5x10^{-6}x50 = 2,5x10^{-4}C.$$

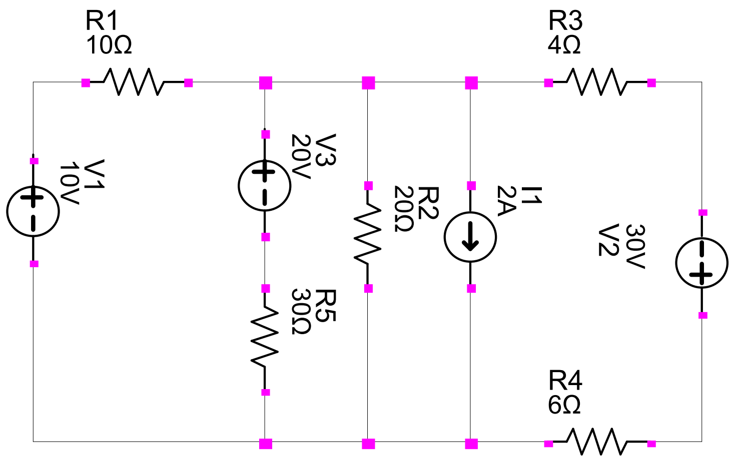
$$Q_3 = C_3V_2 = 3x10^{-6}x50 = 1,5x10^{-4}C.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

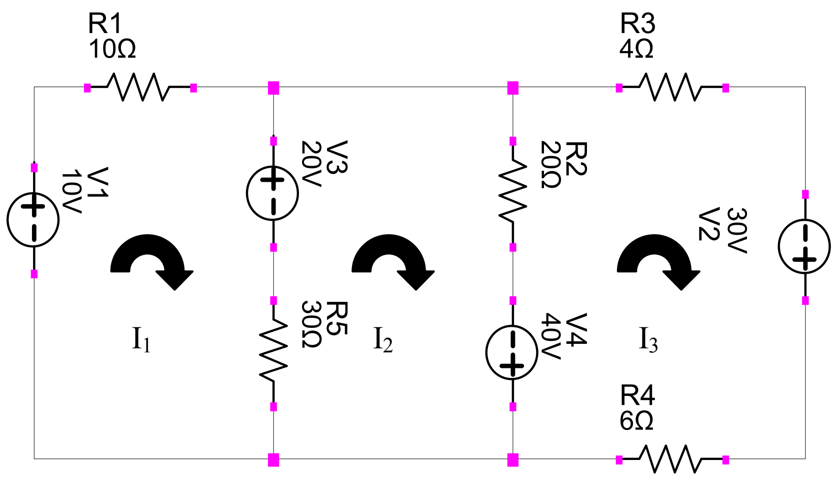
ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

ΑΣΚΗΣΗ 2.1

Να επιλυθεί το κύκλωμα με τη μέθοδο των ελάχιστων βρόχων.



Για να εφαρμοστεί η μέθοδος, όλες οι πηγές στο κύκλωμα πρέπει να είναι πηγές τάσης. Μετατρέπουμε αρχικά την πηγή ρεύματος των 2A με την παράλληλη αντίσταση των 20Ω σε πηγή τάσης.



Ορίζουμε σε κάθε απλό βρόχο ένα ρεύμα με φορά δεξιόστροφη. Οι εξισώσεις βρόχων γράφονται ως εξής:

$$10I_1 + 30(I_1 - I_2) = 10 - 20$$
$$30(I_2 - I_1) + 20(I_2 - I_3) = 20 + 40$$
$$10I_3 + 20(I_3 - I_2) = 30 - 40$$

Κάνοντας πράξεις και εμφανίζοντας σε κάθε βρόχο όλα τα ρεύματα

$$
\begin{aligned}
&40I_1 - 30I_2 - 0I_3 = -10 \\
&-30I_1 + 50I_2 - 20I_3 = 60 \\
&0I_1 - 20I_2 + 30I_3 = -10
\end{aligned}
$$

Σε μορφή πινάκων οι εξισώσεις βρόχων γράφονται

$$
\begin{bmatrix} 40 & -30 & 0 \\ -30 & -50 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 60 \\ -10 \end{bmatrix}
$$

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο πίνακας των αντιστάσεων είναι συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο. Η επίλυση του συστήματος γίνεται με τη μέθοδο Crammer. Υπολογίζουμε πρώτα τις ορίζουσες

$$
\Delta_o = \begin{vmatrix} 40 & -30 & 0 \\ -30 & -50 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{vmatrix} = 17 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & -30 & 0 \\ 60 & -50 & -20 \\ -10 & -20 & 30 \end{vmatrix} = 37
$$

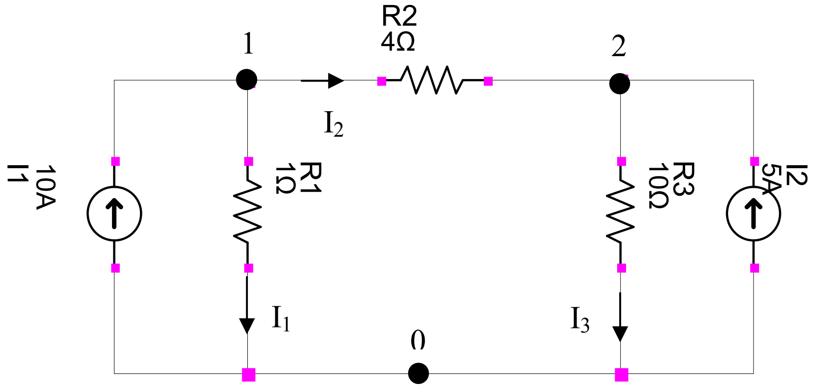
$$
\Delta_2 = \begin{vmatrix} 40 & -10 & 0 \\ -30 & 60 & -20 \\ 0 & -10 & 30 \end{vmatrix} = 55 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 40 & -30 & -10 \\ -30 & -50 & 60 \\ 0 & -20 & -10 \end{vmatrix} = 31
$$

Τα ρεύματα των βρόχων δίνονται από τις σχέσεις

$$
I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_o} = \frac{37}{17} = 2{,}18A \qquad I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_o} = \frac{55}{17} = 3{,}23A \qquad I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_o} = \frac{31}{17} = 1{,}82A.
$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.2

Να γραφούν οι εξισώσεις κόμβων. Να υπολογιστεί το ρεύμα μέσω της αντίστασης 4Ω.



Το κύκλωμα έχει μόνο πηγές ρεύματος. Οι κόμβοι του κυκλώματος είναι τρεις, θεωρούμε τον ένα από αυτούς ως κόμβο αναφοράς (κόμβος 0). Ορίζουμε επίσης ρεύματα σε κάθε κλάδο με αυθαίρετη φορά. Οι εξισώσεις των κόμβων 1 και 2 γράφονται:

$$I_1 + I_2 - 10 = 0$$

$$I_3 - I_2 - 5 = 0$$

Εκφράζουμε τα ρεύματα κλάδων συναρτήσει των δυναμικών των κόμβων.

$$\frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_2}{4} - 10 = 0$$
$$\frac{V_2}{10} - \frac{V_1 - V_2}{4} - 5 = 0$$

Ή διαφορετικά:

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)V_1 - \frac{1}{4}V_2 = 10$$
$$-\frac{1}{4}V_1 + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4}\right)V = 5$$

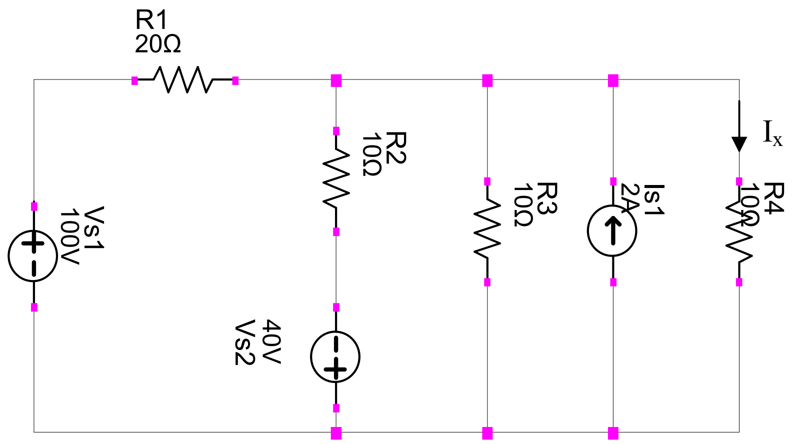
Επίλυση του συστήματος δίνει V_1 = 14,3V και V_2 = 31,5V. Το ρεύμα μέσω της αντίστασης 4Ω επομένως είναι

$$I_2 = \frac{V_1 - V_2}{4} = \frac{14{,}3 - 31{,}5}{4} = -4{,}3A.$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η πραγματική φορά του I_2 είναι αντίθετη από αυτή που αρχικά υποθέσαμε.

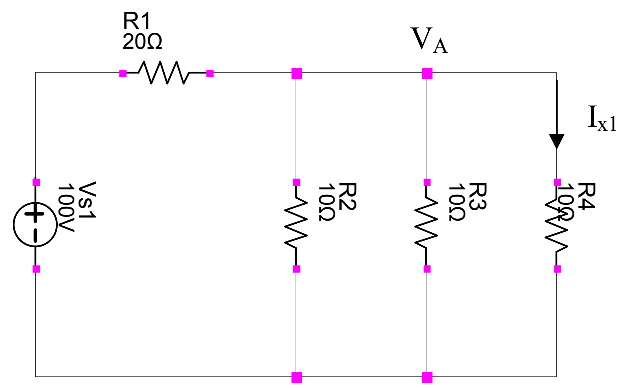
ΑΣΚΗΣΗ 2.3

Με το θεώρημα της επαλληλίας (υπέρθεσης) να υπολογιστεί το ρεύμα I_x.



Υπολογίζουμε τη συνεισφορά κάθε πηγής στο ρεύμα του κλάδου που μας ενδιαφέρει νεκρώνοντας όλες τις υπόλοιπες πηγές.

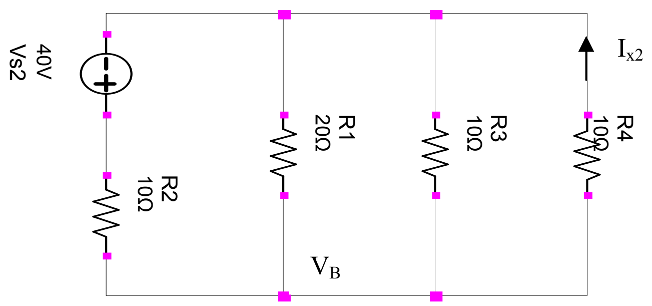
<u>Πηγή 100V</u>



Είναι

$$V_A = \frac{10/3}{20+10/3}\cdot 100V = 14{,}27V \Rightarrow I_{x1} = \frac{V_A}{10} = 1{,}427A.$$

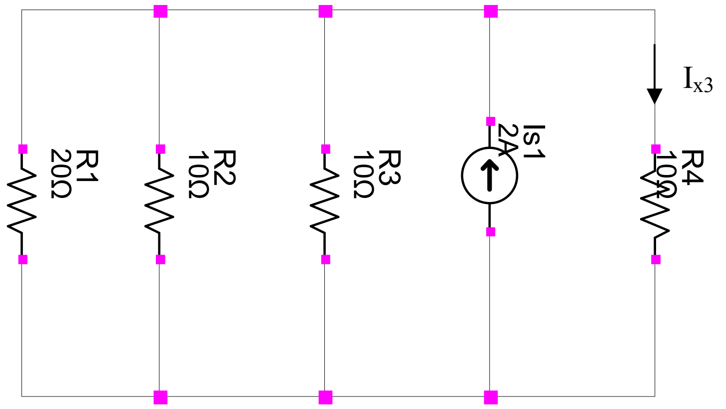
<u>Πηγή 40V</u>



Είναι

$$V_B = \frac{4}{10+4} \cdot 40V = 11{,}43V \Rightarrow I_{x2} = \frac{V_B}{10} = 1{,}143A.$$

<u>Πηγή 2Α</u>



Από το διαιρέτη ρεύματος που σχηματίζεται έχουμε

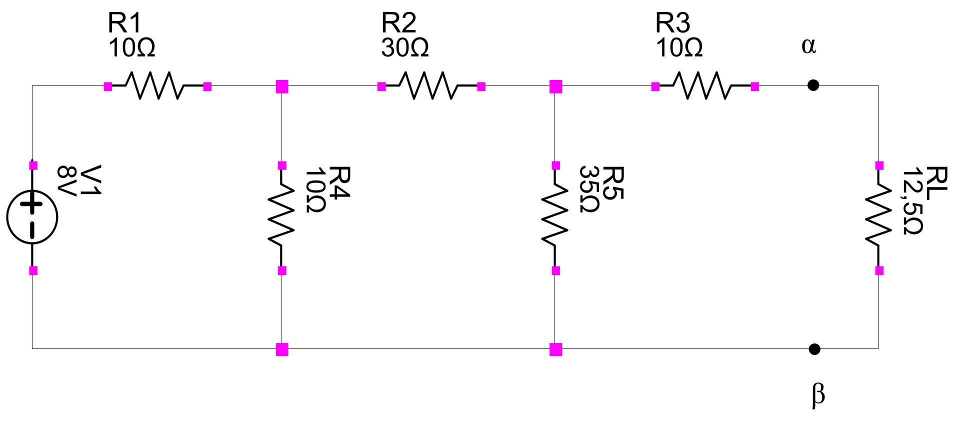
$$I_{x3} = \frac{1/10}{1/10 + 1/10 + 1/10 + 1/20} = 0{,}571A.$$

Το ρεύμα I_x υπολογίζεται από την υπέρθεση των τριών ρευμάτων λαμβάνοντας υπόψη τη φορά τους.

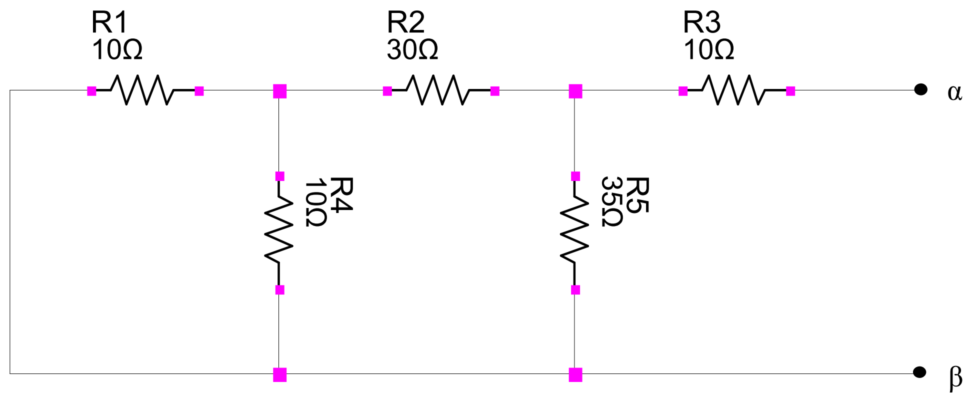
$$I_x = I_{x1} - I_{x2} + I_{x3} = 0{,}855A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.4

Να υπολογιστεί η ισχύς στην αντίσταση R_L με τη βοήθεια του θεωρήματος Thevenin.



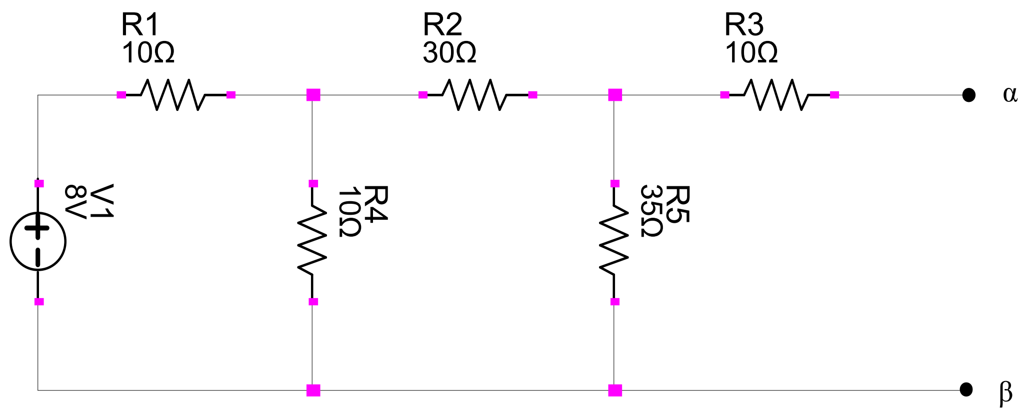
Αποσυνδέουμε το φορτίο R_L και νεκρώνουμε την πηγή τάσης 8V (αντικαθιστώντας την με βραχυκύκλωμα).



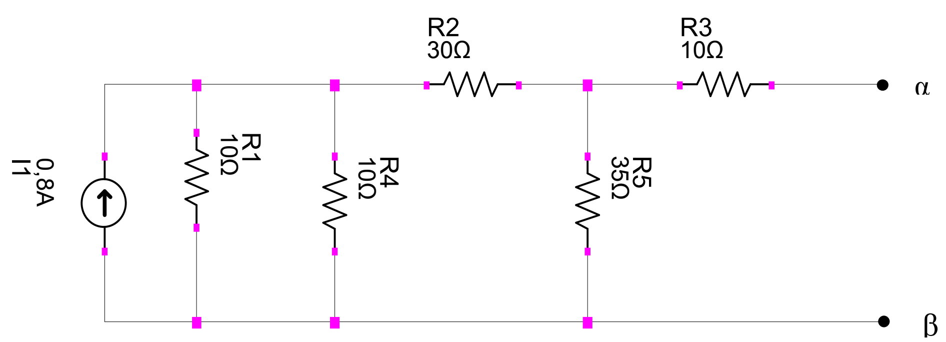
Η αντίσταση κοιτάζοντας το κύκλωμα από τα σημεία α και β είναι

$R_{\alpha\beta} = 10 + 35 \,//\, [30 + (10//10)] = 10 + 35 \,//\, 35 = 10 + 17{,}5 = 27{,}5\Omega$.

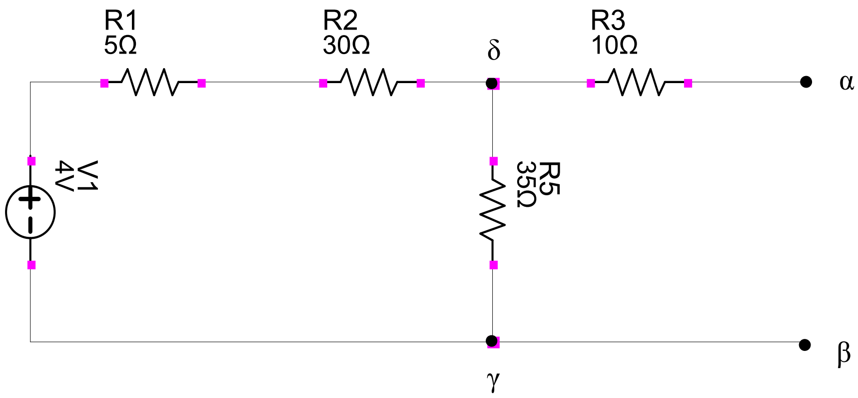
Αυτή είναι και η αντίσταση του ισοδύναμου κυκλώματος Thevenin. Επαναφέρουμε στη συνέχεια την πηγή των 8V και υπολογίζουμε την τάση $V_{\alpha\beta}$ (τάση Thevenin).



Για την απλοποίηση του κυκλώματος μετατρέπουμε την πηγή τάσης σε ρεύματος.



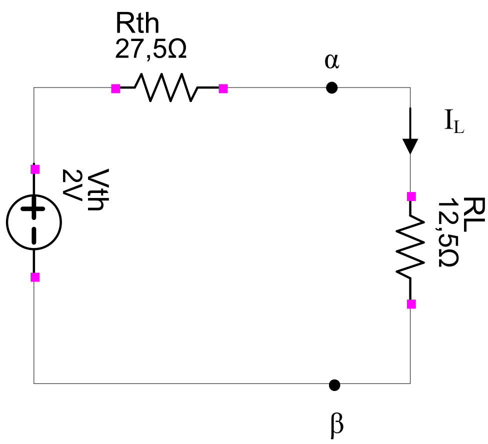
Ο παράλληλος συνδυασμός των R_1 και R_4 ισοδυναμεί με μια αντίσταση 5Ω. Επιπλέον μετατροπή της πηγής ρεύματος (με παράλληλη αντίσταση 5Ω) σε τάσης δίνει το παρακάτω κύκλωμα.



Επειδή η R_3 δεν διαρέεται από ρεύμα δεν υπάρχει πτώση τάσης πάνω της. Κατά συνέπεια η τάση $V_{αβ}$ ισούται με τη τάση $V_{γδ}$. Η $V_{γδ}$ μπορεί απευθείας να υπολογιστεί από το διαιρέτη τάσης που σχηματίζεται.

$$V_{\gamma\delta} = V_{\alpha\beta} = \frac{35}{35+35} \cdot 4V = 2V.$$

Σχηματίζουμε το ισοδύναμο κύκλωμα Thevenin και συνδέουμε το φορτίο R_L.



Το ρεύμα βρόχου είναι

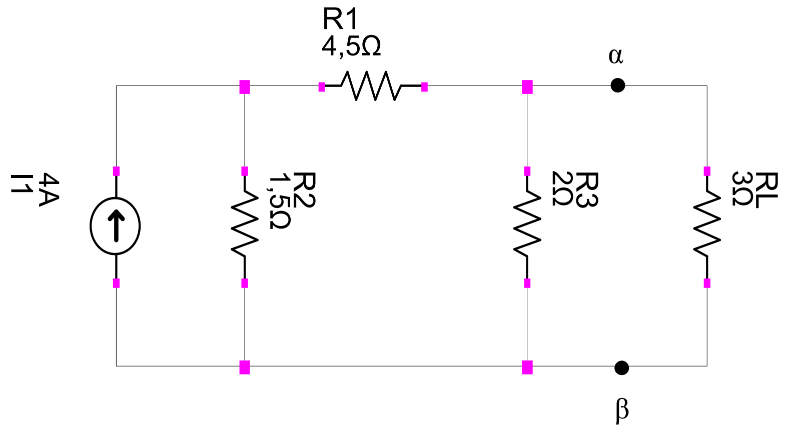
$$I_L = 2V/(27,5 + 12,5) = 0,05A.$$

Η ισχύς στο φορτίο είναι

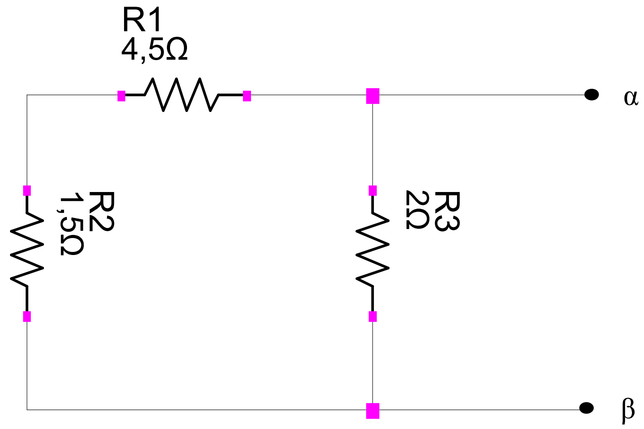
$$P_L = I_L^2 R_L = (0,05)^2 x12,5 = 31,25mW.$$

ΑΣΚΗΣΗ 2.5

Να υπολογιστεί η ισχύς στην αντίσταση R_L με τη βοήθεια του θεωρήματος Norton.

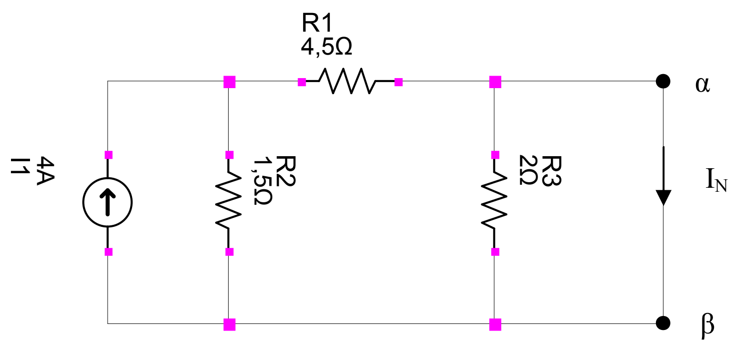


Νεκρώνουμε την πηγή ρεύματος (αντικαθιστώντας τη με ανοικτό κύκλωμα) και απομακρύνουμε το φορτίο.



Η αντίσταση που φαίνεται από τα σημεία α και β είναι:

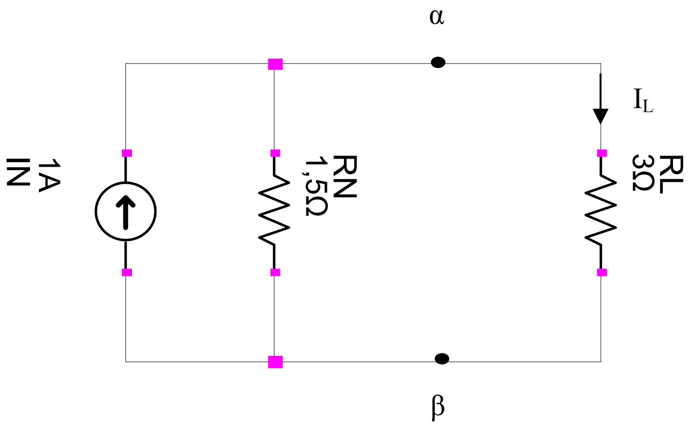
$$R_{\alpha\beta} = 2 \,//\, (4{,}5 + 1{,}5) = 2 \,//\, 6 = 1{,}5\Omega.$$



Η αντίσταση των 2Ω βραχυκυκλώνεται και επομένως από το διαιρέτη ρεύματος που σχηματίζεται

$$I_N = \frac{\frac{1}{4,5}}{\frac{1}{4,5}+\frac{1}{1,5}} \cdot 4A = 1A.$$

Το ισοδύναμο κύκλωμα Norton με συνδεδεμένο το φορτίο δίνεται παρακάτω.



Από το διαιρέτη ρεύματος που σχηματίζεται το ρεύμα I_L θα είναι:

$$I_L = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{1,5}} \cdot 1A = 0,33A.$$

Η ζητούμενη ισχύς δίνεται από τη σχέση

$$P_L = I_L^2 R_L = (0,33)^2 x3 = 0,323W.$$

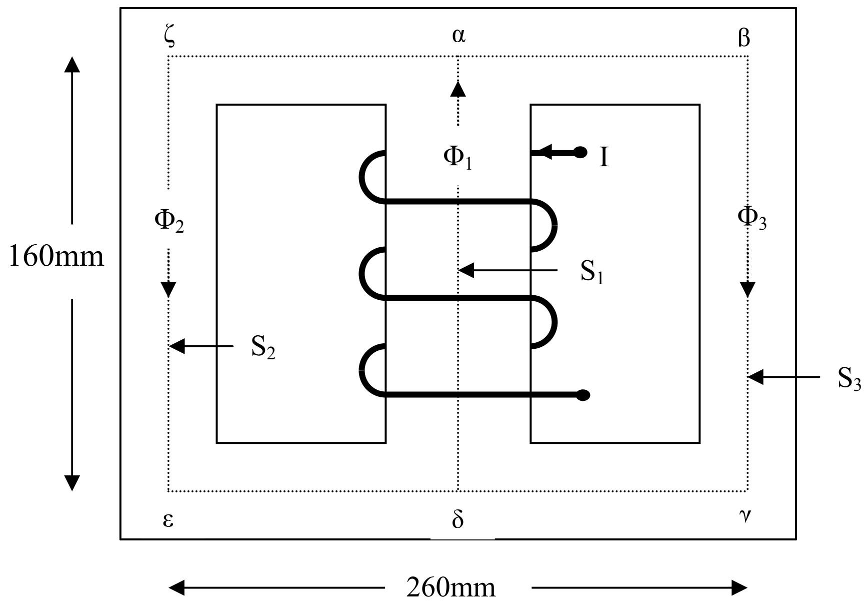
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙΙ

ΑΣΚΗΣΗ 3.1

Να βρεθεί το ρεύμα I στο τύλιγμα έτσι ώστε η μαγνητική ροή στο δεξιό και αριστερό σκέλος του μαγνητικού κυκλώματος να είναι $\Phi_2 = \Phi_3 =$ 2mWb. Δίνεται N = 500 σπείρες, $S_1 = 30cm^2$, $S_2 = S_3 = 20cm^2$. Η καμπύλη μαγνήτισης του σιδηρομαγνητικού υλικού δίνεται στον παρακάτω πίνακα.

B(T)	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7
H(A/cm)	1,85	2,35	3,00	3,95	5,40	7,70	13,00	27,50	51,50	89,00



Διακρίνουμε τις διαδρομές όπου αλλάζει είτε το υλικό, ή η διατομή του πυρήνα. Ορίζω ως l_1 τη διαδρομή <αδ> = 0,16m, ως l_2 τη διαδρομή <δεζα> = 0,42m και ως l_3 τη διαδρομή <αβγδ> = 0,42m. Υπολογίζω τη μαγνητική επαγωγή B και ένταση H στα διάφορα τμήματα.

$$B_2 = \frac{\Phi_2}{S_2} = \frac{2x10^{-3}}{20x10^{-4}} = 1T \qquad B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = 1T.$$

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 4x10^{-3}Wb \qquad B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{4x10^{-3}}{30x10^{-4}} = 1{,}33T.$$

Από την καμπύλη μαγνήτισης (πίνακας) για τις αντίστοιχες τιμές του B προκύπτει:

$$H_2 = H_3 = 3\frac{A}{cm} = 300\frac{A}{m} \qquad H_1 = 8\frac{A}{cm} = 800\frac{A}{m}.$$

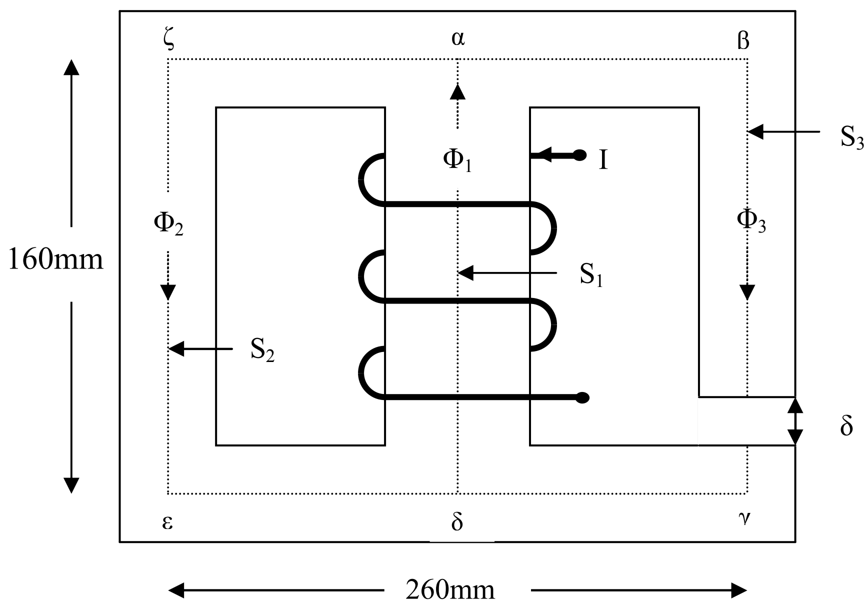
Με εφαρμογή του νόμου του διαρρεύματος στη διαδρομή <αβγδ> και θεωρώντας δεξιόστροφη φορά διαγραφής

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 = NI = 254A$$

$$I = \frac{254}{500} = 0{,}51A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.2

Στο κύκλωμα της άσκησης 3.1 εισάγουμε διάκενο δ = 0,1cm. Οι υπόλοιπες διαστάσεις και η καμπύλη μαγνήτισης παραμένουν ως έχουν. Να υπολογιστεί το ρεύμα I έτσι ώστε Φ_3 = 2mWb ($\mu_o = 4\pi x 10^{-7}$ H/m).



Υπολογίζουμε πρώτα τη μαγνητική επαγωγή B_δ στο διάκενο.

$$B_\delta = B_3 = \frac{\Phi_3}{S_3} = \frac{2x10^{-3}}{20x10^{-4}} = 1T.$$

Για τον υπολογισμό της έντασης στο διάκενο χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$H_\delta = \frac{B_\delta}{\mu_o} = \frac{1}{4\pi x 10^{-7}} = 796000\frac{A}{m}.$$

Από την καμπύλη μαγνήτισης για B_3 = 1T προκύπτει H_3 = 3 A/cm = 300A/m. Εφαρμόζω το νόμο του διαρρεύματος στη διαδρομή <αβγδεζα>.

$$-H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta = 0$$
$$H_2 = \frac{H_3 l_3 + H_\delta l_\delta}{l_2} = 2200\frac{A}{m}.$$

Από την καμπύλη μαγνήτισης βρίσκω B_2 = 1,48T και επομένως

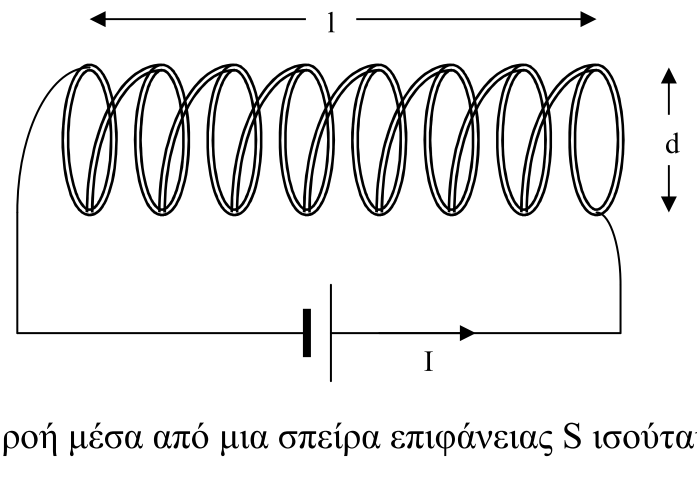
$$\Phi_2 = B_2 S_2 = 1{,}48x20x10^{-4} = 2{,}96mWb.$$
$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3 = 4{,}96mWb.$$
$$B_1 = \frac{\Phi_1}{S_1} = \frac{4{,}96x10^{-3}}{30x10^{-4}} = 1{,}65T.$$

Από την καμπύλη μαγνήτισης H_1 = 69,5A/cm = 6950A/m. Το ζητούμενο ρεύμα μπορεί να υπολογιστεί με εφαρμογή του νόμου του διαρρεύματος στη διαδρομή <αβγδα>.

$$H_1 l_1 + H_3 l_3 + H_\delta l_\delta = NI = 2032A.$$
$$I = \frac{2032}{500} = 4{,}06A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 3.3

Για το σωληνοειδές του σχήματος να υπολογιστεί ο συντελεστής αυτεπαγωγής αν l = 6cm , d = 2cm , N = 100 και $\mu_o = 4\pi x10^{-7}$ H/m.



Η μαγνητική ροή μέσα από μια σπείρα επιφάνειας S ισούται με

$$\Phi = BS = \mu_o HS = \mu_o \frac{NI}{l} \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

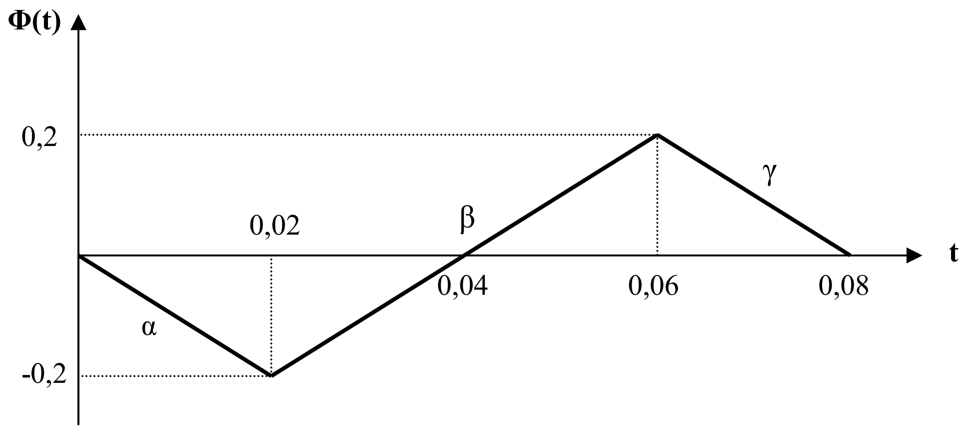
Όπου η ένταση Η αντικαθίσταται με NI/l από το νόμο του διαρρεύματος και η επιφάνεια S εκφράζεται συναρτήσει της διαμέτρου d. Από τη σχέση ορισμού ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \mu_o N^2 \frac{\pi d^2}{4l} = 4\pi x 10^{-7} x 100^2 \frac{3{,}14x(0{,}02)^2}{4x0{,}06} = 66\mu H.$$

Η ποσότητα L είναι πολύ μικρή και η τιμή της μπορεί να αυξηθεί σημαντικά τυλίγοντας το πηνίο γύρω από πυρήνα σιδηρομαγνητικού υλικού.

ΑΣΚΗΣΗ 3.4

Η μαγνητική ροή σε ένα κύκλωμα ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται στο διάγραμμα που ακολουθεί. Αν N = 15 σπείρες, να υπολογιστεί η επαγόμενη στο πηνίο τάση.



Διακρίνουμε τρία ευθύγραμμα τμήματα τα α, β και γ που μπορούμε να εκφράσουμε με τη βοήθεια της εξίσωσης ευθείας. Για την ευθεία που περνά από τα σημεία (t_1, Φ_1) και (t_2, Φ_2) η εξίσωση είναι

$$\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Phi - \Phi_1}{t - t_1}.$$

Αντικαθιστώντας τις αντίστοιχες τιμές οι εξίσωση της ροής ως συνάρτηση του χρόνου για κάθε ένα από τα ευθύγραμμα τμήματα α, β και γ είναι

α) $\Phi = -10t$
β) $\Phi = -0{,}4 + 10t$
γ) $\Phi = 0{,}8 - 10t.$

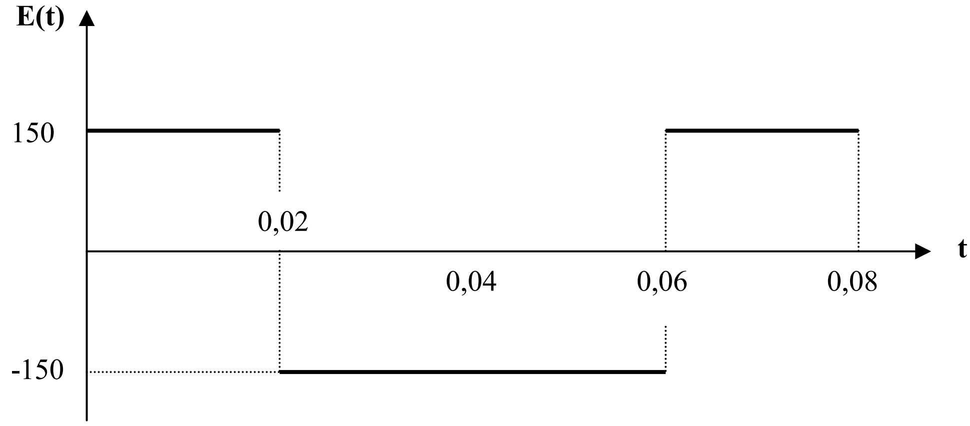
Η επαγόμενη τάση προκύπτει με πολλαπλασιασμό επί Ν και απευθείας παραγώγιση των παραπάνω σχέσεων.

$$\alpha)\qquad E=-N\frac{d\Phi}{dt}=-15(-10)=150V$$

$$\beta)\qquad E=-N\frac{d\Phi}{dt}=-15(10)=-150V$$

$$\gamma)\qquad E=-N\frac{d\Phi}{dt}=-15(-10)=150V$$

Η μορφή της τάσης φαίνεται στο σχήμα.

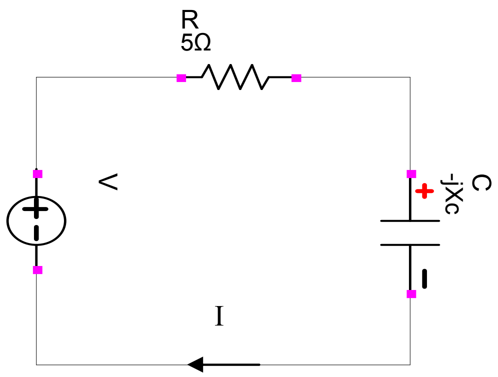


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ IV

ΑΣΚΗΣΗ 4.1

Ένα κύκλωμα RC αποτελείται από μια αντίσταση R = 5Ω και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C σε σειρά. Αν το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά 60^o και η κυκλική συχνότητα της πηγής είναι ω = 2000rad/s να βρεθεί η τιμή C.



Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος είναι

$$Z = \frac{V}{I} = |Z| < \phi.$$

Από την παραπάνω σχέση είναι φανερό ότι η φάση της σύνθετης αντίστασης ισούται με τη διαφορά των φάσεων των διανυσμάτων τάσης και ρεύματος. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τη φάση της σύνθετης αντίστασης.

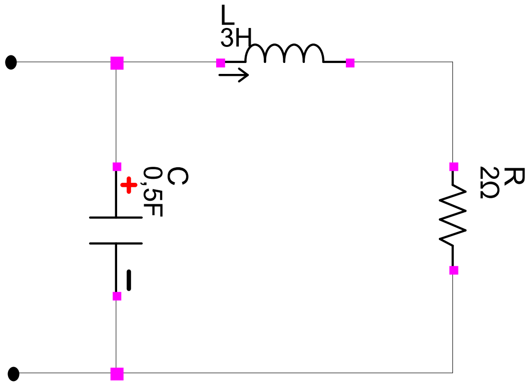
$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C}$$

$$\tan\phi = -\frac{1/\omega C}{R} = -\frac{1}{\omega RC} = \tan(-60^o) = -1{,}73$$

Το πρόσημο (-) σημαίνει ότι το ρεύμα προηγείται της τάσης. Λύνοντας ως προς τη χωρητικότητα έχουμε

$$C = \frac{1}{1{,}73x\omega R} = 38{,}5\mu F.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.2
Να βρεθεί η σύνθετη αντίσταση εισόδου του κυκλώματος τόσο σε πολική όσο και σε ορθογώνια μορφή.



Η σύνθετη αντίσταση εισόδου μπορεί να γραφεί με απλή επισκόπηση του κυκλώματος.

$$Z_{in} = \frac{1}{j\omega C} // (R + j\omega L) = \frac{\dfrac{R + j\omega L}{j\omega C}}{\dfrac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{R + j\omega L}{\left(1 - \omega^2 LC\right) + j\omega RC}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των στοιχείων

$$Z_{in} = \frac{5 + j3}{-0{,}5 + j2{,}5} = \frac{(5 + j3)(-0{,}5 - j2{,}5)}{(0{,}5)^2 + (2{,}5)^2} = 1{,}54 + j1{,}69\Omega.$$

Η παραπάνω μορφή είναι η ορθογώνια μορφή. Η πολική μορφή βρίσκεται υπολογίζοντας το μέτρο και τη φάση.

$$|Z_{in}| = \sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}69)^2} = 2{,}29\Omega$$

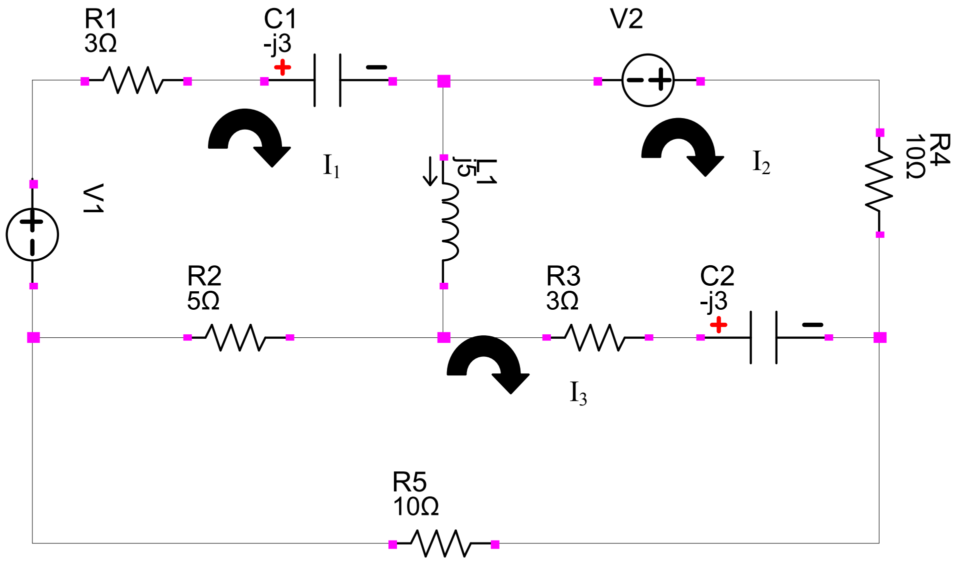
$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}69}{1{,}54}\right) = 48^o$$

Επομένως η πολική μορφή της αντίστασης είναι

$$Z_{in} = 2{,}29 < 48^o\,\Omega.$$

ΑΣΚΗΣΗ 4.3

Να επιλυθεί το παρακάτω κύκλωμα με τη μέθοδο των απλών βρόχων. Οι πηγές τάσης έχουν την έκφραση: $V_1 = 10 < 0^o$ και $V_1 = 10 < 30^o$.



Ορίζουμε ρεύματα σε κάθε απλό βρόχο με δεξιόστροφη φορά. Οι εξισώσεις βρόχων γράφονται.

$$(3-j3)I_1 + j5(I_1 - I_2) + 5(I_1 - I_3) = 10 < 0^o$$
$$j5(I_2 - I_1) + 10I_2 + (3-j3)(I_2 - I_3) = 10 < 30^o$$
$$5(I_3 - I_1) + (3-j3)(I_3 - I_2) + 10I_3 = 0$$

Κάνοντας αναγωγή όμοιων όρων

$$(8+j2)I_1 - j5I_2 - 5I_3 = 10 < 0^o$$
$$-j5I_1 + (13+j2)I_2 - (3-j3)I_3 = 10 < 30^o$$
$$-5I_1 - (3-j3)I_2 + (18-j3)I_3 = 0$$

Οι εξισώσεις βρόχων γράφονται στη συνέχεια με τη μορφή πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 8+j2 & -j5 & -5 \\ -j5 & 13+j2 & -3+j3 \\ -5 & -3+j3 & 18-j3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 < 0^o \\ 10 < 30^o \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας είναι φυσικά συμμετρικός ως προς την κύρια διαγώνιο. Για να υπολογίσουμε τα διανύσματα των ρευμάτων χρειάζεται να υπολογίσουμε πρώτα τις ορίζουσες Δ_o, Δ_1, Δ_2, και Δ_3. Στην περίπτωση αυτή οι πηγές V_1 και V_2 είναι προτιμότερο να αντικατασταθούν με την ορθογώνια έκφραση τους.

$$V_1 = 10 < 0^o = 10$$
$$V_2 = 10 < 30^o = 8,7 + j5$$

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} 8 + j2 & -j5 & -5 \\ -j5 & 13 + j2 & -3 + j3 \\ -5 & -3 + j3 & 18 - j3 \end{vmatrix} = 1865 + j32 = 1865 < 1^o$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -j5 & -5 \\ 8,7 + j5 & 13 + j2 & -3 + j3 \\ 0 & -3 + j3 & 18 - j3 \end{vmatrix} = 2286 + j953 = 2478 < 23^o$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 8 + j2 & 10 & -5 \\ -j5 & 8,7 + j5 & -3 + j3 \\ -5 & 0 & 18 - j3 \end{vmatrix} = 1327 + j1479 = 1987 < 48^o$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 8 + j2 & -j5 & 10 \\ -j5 & 13 + j2 & 8,7 + j5 \\ -5 & -3 + j3 & 0 \end{vmatrix} = 1026 + j461 = 1125 < 24^o$$

Τα ρεύματα των βρόχων δίνονται από τις σχέσεις

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_o} = \frac{2487 < 23^o}{1865 < 1^o} = 1,33 < 22^o\ A.$$
$$I_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_o} = \frac{1987 < 48^o}{1865 < 1^o} = 1,07 < 47^o\ A.$$
$$I_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_o} = \frac{1125 < 24^o}{1865 < 1^o} = 0,6 < 23^o\ A.$$

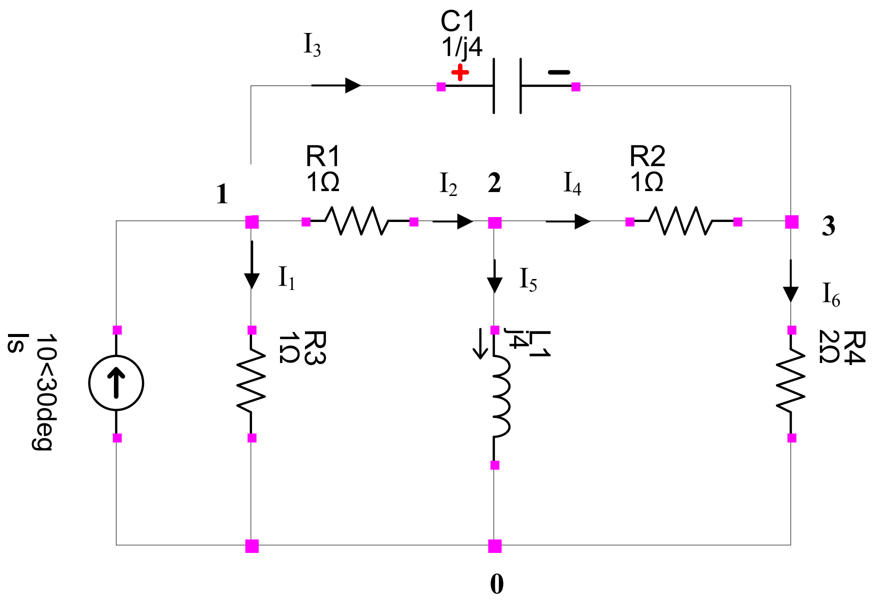
Τέλος οι εκφράσεις των ρευμάτων στο πεδίο του χρόνου είναι

$$i_1(t) = \mathrm{Re}\left\{1,33\sqrt{2}e^{j\left(\omega t + 22^o\right)}\right\} = 1,88\cos\left(\omega t + 22^o\right)$$
$$i_2(t) = \mathrm{Re}\left\{1,07\sqrt{2}e^{j\left(\omega t + 47^o\right)}\right\} = 1,51\cos\left(\omega t + 47^o\right)$$
$$i_3(t) = \mathrm{Re}\left\{0,6\sqrt{2}e^{j\left(\omega t + 23^o\right)}\right\} = 0,6\cos\left(\omega t + 23^o\right)$$

όπου πολλαπλασιάσαμε με $\sqrt{2}$ για να πάμε από την ενεργό τιμή στο πλάτος.

ΑΣΚΗΣΗ 4.4

Για το παρακάτω κύκλωμα να γραφούν οι εξισώσεις κόμβων. Στη συνέχεια να επιλυθούν ως προς τα δυναμικά των κόμβων και να υπολογιστεί το ρεύμα στο πηνίο.



Αριθμούμε τους κόμβους του κυκλώματος και ορίζουμε ένα κόμβο αναφοράς (κόμβος 0). Γράφουμε τις εξισώσεις όλων των κόμβων εκτός του κόμβου αναφοράς. Ας σημειωθεί ότι η αρίθμηση των ρευμάτων κλάδων και η φορά τους εκλέγεται αυθαίρετα.

$$I_1 + I_3 + I_2 = 10 < 30^o$$
$$-I_2 + I_4 + I_5 = 0$$
$$-I_3 - I_4 + I_6 = 0$$

Αντικαθιστούμε κάθε ρεύμα ως συνάρτηση των δυναμικών των κόμβων.

$$\frac{V_1}{1} + \frac{V_1 - V_3}{1/j4} + \frac{V_1 - V_2}{1} = 10 < 30^o$$
$$-\frac{V_1 - V_2}{1} + \frac{V_2 - V_3}{1} + \frac{V_2}{j4} = 0$$
$$-\frac{V_1 - V_3}{1/j4} - \frac{V_2 - V_3}{1} + \frac{V_3}{2} = 0$$

Κάνουμε αναγωγή όμοιων όρων

$$\begin{aligned}
&(2+j4)V_1 - V_2 - j4V_3 = 10<30^o \\
&-V_1 + (2-j4)V_2 - V_3 = 0 \\
&-j4V_1 - V_2 + (3/2+j4)V_3 = 0
\end{aligned}$$

Γράφουμε τις εξισώσεις κόμβων με τη μορφή πινάκων.

$$\begin{bmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2-j4 & -1 \\ -j4 & -1 & 1{,}5+j4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10<30^o \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τις ορίζουσες Δ_o, Δ_1, Δ_2, και Δ_3.

$$\Delta_o = \begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & -j4 \\ -1 & 2-j4 & -1 \\ -j4 & -1 & 1{,}5+j4 \end{vmatrix} = 58{,}5$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8{,}7+j5 & -1 & -j4 \\ 0 & 2-j4 & -1 \\ 0 & -1 & 1{,}5+j4 \end{vmatrix} = 147 + j107 = 182 < 36^o$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+j4 & 8{,}7+j5 & -j4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -j4 & 0 & 1{,}5+j4 \end{vmatrix} = -1{,}5 - j8 = 8{,}14 < 100^o$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2+j4 & -1 & 8{,}7+j5 \\ -1 & 2-j4 & 0 \\ -j4 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 108 + j155 = 188 < 55^o$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τα δυναμικά κόμβων.

$$V_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_o} = 3{,}11 < 36^o \quad Volt$$

$$V_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_o} = 0{,}14 < 100^o \quad Volt$$

$$V_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_o} = 3{,}21 < 55^o \quad Volt$$

Το ρεύμα στο πηνίο είναι

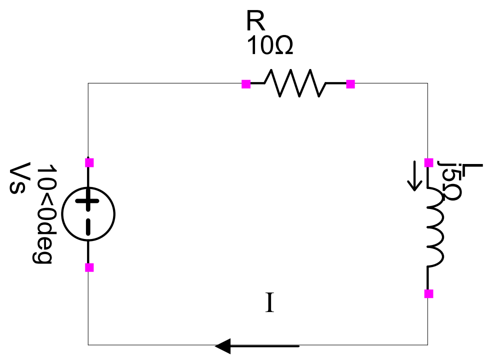
$$I_5 = \frac{V_2}{j4} = \frac{0{,}14 < 100^o}{4 < 90^o} = 0{,}035 < 10^o \, A.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ V

ΑΣΚΗΣΗ 5.1

Για το παρακάτω κύκλωμα να υπολογιστούν η μιγαδική, η φαινόμενη, η ενεργός και άεργος ισχύς, καθώς και ο συντελεστής ισχύος.



Η σύνθετη αντίσταση του κυκλώματος ισούται με

$$Z = 10 + j5 \quad \Rightarrow \quad |Z| = \sqrt{10^2 + 5^2} = 11{,}2\Omega, \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{5}{10}\right) = 26{,}6^o.$$

Μετατρέπουμε την αντίσταση στην πολική μορφή Z = 11,2 < 26,6^o. Το ρεύμα I θα είναι

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{10 < 0^o}{11{,}2 < 26{,}6^o} = 0{,}89 < -26{,}6^o \ A.$$

Η μιγαδική ισχύς μπορεί να υπολογιστεί ως

$$S = VI^* = 10 < 0^o \cdot 0{,}89 < 26{,}6^o = 8{,}9 < 26{,}6^o \ VA.$$

Η φαινόμενη ισχύς είναι το μέτρο της μιγαδικής ισχύος, δηλαδή είναι |S| = 8,9VA. Μετατρέπω τη μιγαδική ισχύ σε ορθογώνια μορφή.

$$S = 7{,}96 + j3{,}99 = P + jQ.$$

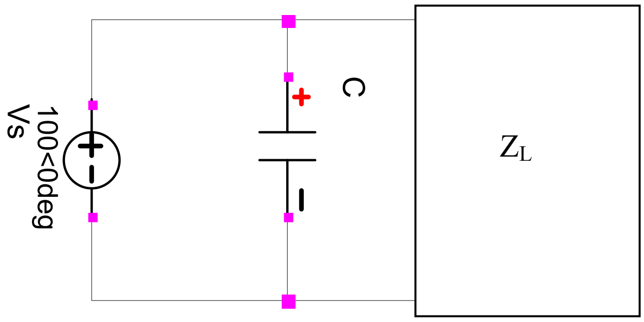
Είναι φανερό ότι η ενεργός ισχύς ισούται με P = 7,96W, ενώ η άεργος ισχύς με Q = 3,99VAR. Τέλος ο συντελεστής ισχύος θα είναι

$$\cos\phi = \frac{P}{S} = \frac{7{,}96}{8{,}96} = 0{,}89.$$

Ο συντελεστής ισχύος είναι επαγωγικός.

ΑΣΚΗΣΗ 5.2

Η ενεργός ισχύς στο φορτίο είναι 250kW και ο συντελεστής ισχύος 0,707 επαγωγικός. Προσδιορίστε την τιμή της χωρητικότητας C ώστε ο συντελεστής ισχύος να είναι α) 0,866 επαγωγικός, β) ίσος με 1, γ) 0,866 χωρητικός (ω = 314fad/s).



α) Είναι

$$\cos\phi_\alpha = 0{,}707 \Rightarrow \phi_\alpha = \cos^{-1}(0{,}707) = 45^o \Rightarrow \tan\varphi_\alpha = 1.$$
$$\cos\phi_\tau = 0{,}866 \Rightarrow \phi_\tau = \cos^{-1}(0{,}866) = 30^o \Rightarrow \tan\varphi_\tau = 0{,}577.$$

Με απευθείας αντικατάσταση στη σχέση διόρθωσης του cosφ έχουμε

$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\phi_\alpha - \tan\varphi_\tau) = \frac{250x10^3}{314x100^2}(1-0{,}577) = 33678\mu F.$$

β) Είναι

$$\cos\phi_\tau = 1 \Rightarrow \phi_\tau = \cos^{-1}(1) = 0^o \Rightarrow \tan\varphi_\tau = 0$$

Επομένως

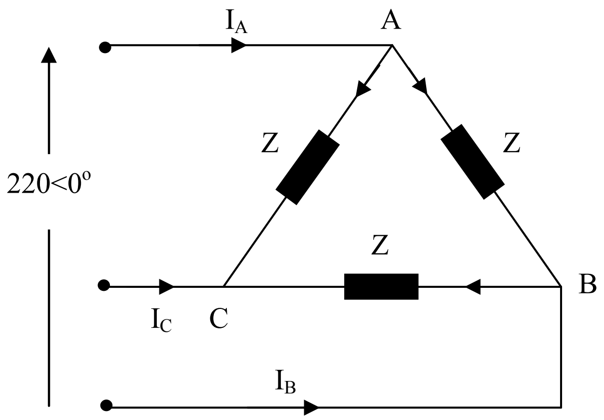
$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\phi_\alpha - \tan\varphi_\tau) = \frac{250x10^3}{314x100^2}(1-0) = 79618\mu F.$$

γ) Στην περίπτωση που ο συντελεστής ισχύος είναι χωρητικός το πρόσημο (-) στη σχέση διόρθωσης πρέπει να γίνει από (+), δηλαδή

$$C = \frac{P}{\omega V^2}(\tan\phi_\alpha + \tan\varphi_\tau) = \frac{250x10^3}{314x100^2}(1+0{,}577) = 0{,}126F.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.3

Κάθε μονοφασικό φορτίο του σχήματος είναι Z = 4 + j4 Ω. Να υπολογιστούν τα φασικά ρεύματα και τα ρεύματα γραμμής.



Η πολική έκφραση του φορτίου είναι Z = 5,66 < 45°Ω. Τα φασικά ρεύματα είναι

$$I_{AB} = \frac{220 < 0^o}{5{,}66 < 45^o} = 38{,}87 < -45^o\ A$$

$$I_{BC} = \frac{220 < -120^o}{5{,}66 < 45^o} = 38{,}87 < -165^o\ A$$

$$I_{CA} = \frac{220 < -240^o}{5{,}66 < 45^o} = 38{,}87 < -285^o\ A$$

Τα ρεύματα γραμμής είναι

$$I_A = \sqrt{3} \cdot 38{,}87 < -45^o - 30^o = 67{,}34 < -75^o\ A$$

$$I_B = 67{,}34 < -195^o\ A$$

$$I_C = 67{,}34 < -315^o\ A.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5.4
Ένα τριφασικό φορτίο σε τρίγωνο έχει σε κάθε φάση του αντίσταση 12Ω και χωρητικότητα 200μF. Οι τάση γραμμής είναι V_L= 220V_{rms} και η συχνότητα f = 50Hz. Να υπολογιστούν τα ρεύματα γραμμής, η ενεργός άεργος και φαινόμενη ισχύς.

Η αντίδραση του πυκνωτή είναι

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{6{,}28x50x200x10^{-6}} = 16\Omega.$$

Επομένως η σύνθετη αντίσταση κάθε φάσης θα είναι ίση με

$$Z = R - jX_C = 12 - j16 = 20 < -53{,}13^o\,\Omega.$$

Το ρεύμα φάσης θα έχει μέτρο

$$I_p = \frac{V_L}{Z} = \frac{220}{20} 11A.$$

οπότε το μέτρο του ρεύματος γραμμής προκύπτει ως

$$I_L = I_p\sqrt{3} = 19A.$$

Με βάση τα παραπάνω βρίσκουμε

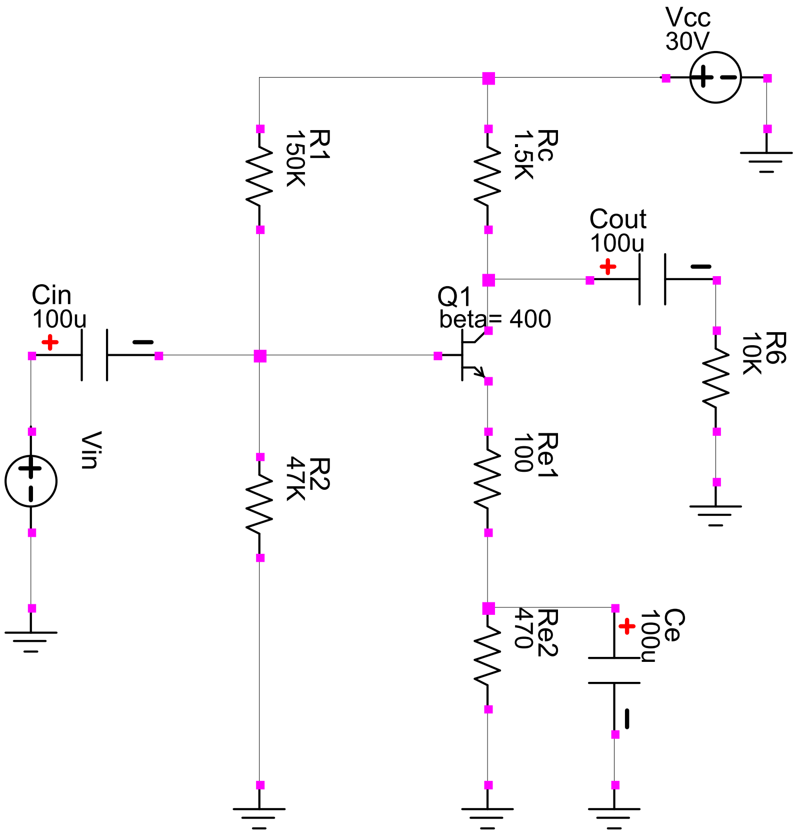
Ενεργός ισχύς: $P = \sqrt{3}V_L I_L \cos\phi = \sqrt{3}x220x19x\cos(53{,}13^o) = 4365W.$
Άεργος ισχύς: $Q = \sqrt{3}V_L I_L \sin\phi = \sqrt{3}x220x19x\sin(53{,}13^o) = 5808VAR.$
Φαινόμενη ισχύς: $S = \sqrt{3}V_L I_L = \sqrt{3}x220x19 = 7260VA.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ VI

ΑΣΚΗΣΗ 6.1

Στον ενισχυτή κοινού εκπομπού του σχήματος να προσδιοριστεί το ρεύμα και η τάση στο συλλέκτη (dc συνθήκες). Στη συνέχεια να υπολογιστούν η αντιστάσεις εισόδου εξόδου και το κέρδος. Θεωρείστε ότι $V_{BE} = 0,7V$ και $\beta = 400$.



<u>DC ανάλυση</u>

Στο συνεχές ρεύμα οι τρεις πυκνωτές του σχήματος παρουσιάζουν άπειρη αντίδραση και επομένως ισοδυναμούν με ανοιχτό κύκλωμα. Επειδή το ρεύμα βάσης σε ένα τρανζίστορ είναι σχετικά μικρό ισχύει $I_C = I_E$.

Η αντίσταση που «φαίνεται από τη βάση του τρανζίστορ στο DC ρεύμα είναι ίση με

$$Rbin = (\beta + 1)(r_e + R_{e1} + R_{e2}) = 401x570 = 229k\Omega.$$

όπου αγνοήθηκε η αντίσταση $r_e = 0.025/I_E$. Το δυναμικό στη βάση V_B υπολογίζεται από το διαιρέτη τάσης που σχηματίζεται από τις αντιστάσεις R_1 και R_2.

$$V_B = \frac{R_2 // R_{Bin}}{(R_2 // R_{Bin}) + R_1} V_{CC} = \frac{47k\Omega // 229k\Omega}{(47k\Omega // 229k\Omega) + 150k\Omega} 30 = 6{,}19 Volt.$$

Το ρεύμα εκπομπού, άρα και συλλέκτη υπολογίζεται από το βρόχο εισόδου ως

$$I_C = I_E = \frac{V_B - V_{BE}}{R_{e1} + R_{e2}} = \frac{6{,}19 - 0.7}{100 + 470} = 9{,}6 mA.$$

Επομένως η τάση στο συλλέκτη το υ τρανζίστορ θα είναι

$$V_C = V_{CC} - I_C R_C = 30 - 9{,}6x10^{-3} x1{,}5x10^3 = 15{,}6 Volt.$$

<u>AC ανάλυση</u>

Στην ανάλυση εναλλασσόμενου ρεύματος οι πυκνωτές θεωρείται ότι ισοδυναμούν με βραχυκύκλωμα. Η αντίσταση R_{e2} τίθεται λοιπόν εκτός και δε συμμετέχει ούτε στον υπολογισμό της αντίστασης εισόδου ούτε στον υπολογισμό του κέρδους. Η αντίσταση r_e θα έχει την τιμή

$$r_e = \frac{25mV}{9{,}6mA} = 2{,}6\Omega.$$

και επομένως κάναμε καλώς και την αγνοήσαμε στο προηγούμενο βήμα. Η αντίσταση εισόδου είναι ίση με

$$R_{in} = R_1 // R_2 //(\beta + 1)(r_e + R_{e1}) = 150k\Omega // 47k\Omega //(401)(2{,}6 + 100) = 19{,}2k\Omega.$$

Η αντίσταση εξόδου είναι

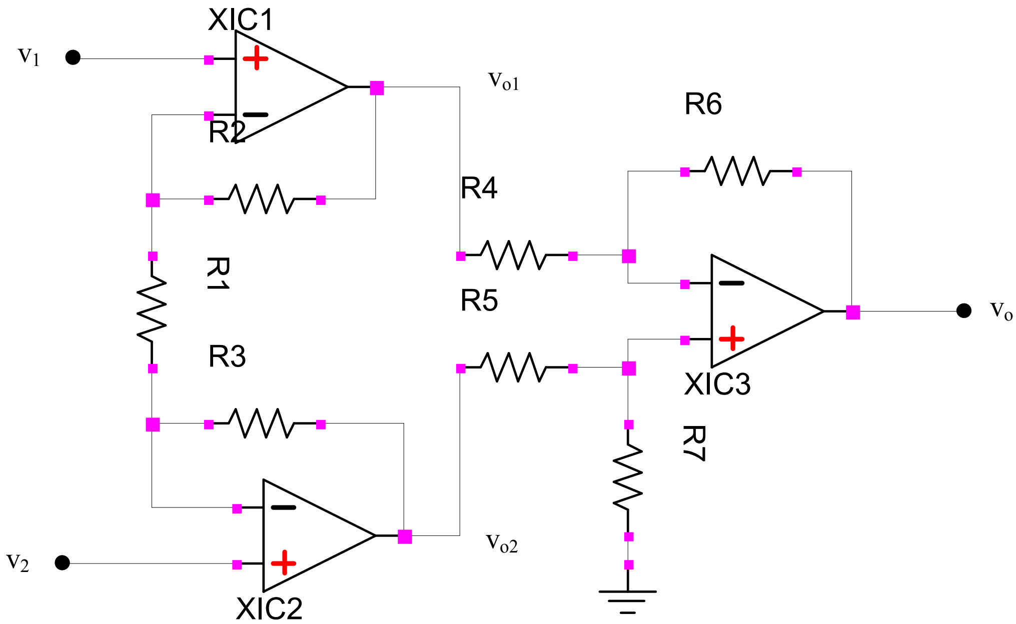
$$R_{out} = R_C // R_L = 1{,}5k\Omega // 10k\Omega = 1{,}3k\Omega.$$

Το κέρδος του κυκλώματος δίνεται από τη σχέση

$$A_V = -\frac{R_C // R_L}{r_e + R_{e1}} = -\frac{1300}{2{,}6 + 100} = -12{,}6.$$

ΑΣΚΗΣΗ 6.2

Το παρακάτω κύκλωμα χρησιμοποιεί τρεις τελεστικούς ενισχυτές για να επιτύχει ταυτόχρονα υψηλή αντίσταση εισόδου και μεγάλο κέρδος. Θεωρείστε ότι $R_2 = R_3$, $R_4 = R_5$ και $R_6 = R_7$. Να βρεθεί μια έκφραση για το κέρδος. Να υπολογιστεί το κέρδος αν $R_1 = 100\Omega$ και όλες οι υπόλοιπες αντιστάσεις είναι 10kΩ.



Επειδή ο τελεστικός ενισχυτής εμφανίζει άπειρη (πολύ μεγάλη) αντίσταση εισόδου η είσοδος δεν διαρρέεται από ρεύμα. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει πτώση τάσης στην είσοδο και οι τάσεις v_1 και v_2 εμφανίζονται στα άκρα της αντίστασης R_1. Το ρεύμα μέσω της R_1 είναι ίσο με

$$i_1 = \frac{v_1 - v_2}{R_1}.$$

Το ρεύμα i_1 διαρρέει και τις αντιστάσεις R_2 και R_3. Η διαφορική τάση εξόδου επομένως των δύο πρώτων τελεστικών θα είναι

$$v_{o1} - v_{o2} = i_1\left(R_1 + R_2 + R_3\right) = i_1\left(R_1 + 2R_2\right) = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)\left(v_1 - v_2\right).$$

Η τάση αυτή ενισχύεται στη συνέχεια από το διαφορικό ενισχυτή που ακολουθεί όπου για $R_4 = R_5$ και $R_6 = R_7$ η ενίσχυση είναι

$$v_o = -\frac{R_6}{R_4}(v_{o1} - v_{o2}) = \frac{R_6}{R_4}\left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)(v_2 - v_1).$$

Το κέρδος λοιπόν του κυκλώματος δίνεται από τη σχέση

$$A_V = \frac{v_o}{v_2 - v_1} = \left(1 + \frac{2R_2}{R_1}\right)\frac{R_6}{R_4}.$$

Με αντικατάσταση των τιμών προκύπτει

$$A_V = \left(1 + \frac{2x10k\Omega}{100\Omega}\right)\frac{10k\Omega}{10k\Omega} = 201.$$

Η αντίσταση εισόδου του κυκλώματος είναι ίση με την αντίσταση εισόδου των τελεστικών, δηλαδή θεωρητικά άπειρη. Στην πράξη η αντίσταση εισόδου καθορίζεται με αντιστάσεις από τις δύο εισόδους προς τη γη.