

ΠΡΩΤΟΙ & ΣΥΝΘΕΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

κατανομή του χρόνου διδασκαλίας των μαθηματικών στο δημοτικό

	A	B	Γ	Δ	Ε	ΣΤ
6/θέσιο και άνω	5	5	4	4	4	4
5/θέσιο	5	5	3	3	3,5	3,5
4/θέσιο	5	5	3	3	4	4
3/θέσιο	4/2	4/2	3	3	3	3
2/θέσιο	4/2	4/2	4/2	4/2	3/2	3/2
1/θέσιο	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2	3/2

αριθμοί και πράξεις

τάξη	στόχοι
Δ	<ul style="list-style-type: none">Να μπορούν να αναλύουν φυσικούς αριθμούς σε διαφορετικά γινόμενα πολλών παραγόντων, καθώς και να αναλύουν και να ανασυνθέτουν ένα γινόμενο, εφόσον είναι δυνατό, για να το υπολογίσουν ευκολότερα με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του πολλαπλασιασμού.

αριθμοί και πράξεις

τάξη	Στόχοι
ΣΤ	<ul style="list-style-type: none">• Να γνωρίζουν τους πρώτους και σύνθετους αριθμούς και να παραγοντοποιούν φυσικούς αριθμούς.• Να γνωρίζουν την ανάλυση φυσικών αριθμών σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και δυνάμεις αριθμών.

Ν.Π.Σ.-Αριθμοί και πράξεις (ΣΤ΄ τάξη)

- **Αναλύουν και εκφράζουν έναν αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων.**



Δραστηριότητα 1η

Στο Δημοτικό Σχολείο Σύμης, τα παιδιά της ΣΤ' τάξης, μετά το μάθημα για τους διαιρέτες των αριθμών και τα κριτήρια διαιρετότητας, αποφάσισαν να παίξουν ένα παιχνίδι. Το ονόμασαν «δεν μπαίνω σε σειρές» και αναρωτήθηκαν: «Πόσα παιδιά πρέπει να έχει μια τάξη ώστε να μην μπορούν να παραταχθούν σε σειρές χωρίς να περισσεύει έστω και ένα παιδί;»

Ποιο κριτήριο δεν πρέπει να ικανοποιεί ο αριθμός που ψάχνουν για να μην μπορούν να παραταχθούν σε:

● Διάδες:

● Τριάδες:

● Τετράδες:

● Πεντάδες:

● Μπορείς τώρα να βρεις τους πιθανούς αριθμούς μαθητών που φαντάστηκαν τα παιδιά; (Μια τάξη έχει μέχρι 30 μαθητές.)

.....

● Τι παρατηρείς για τους διαιρέτες αυτών των αριθμών;



Δραστηριότητα 2η

«Το κόσκινο του Ερατοσθένη»



Ο Ερατοσθένης, σπουδαίος Έλληνας μαθηματικός και φιλόσοφος, γεννήθηκε περίπου το 275 π.Χ. Ήταν ο πρώτος που υπολόγισε τη διάμετρο της Γης με ακρίβεια. Δυστυχώς σώζονται ελάχιστες από τις μελέτες του.

Ο διπλανός πίνακας είναι μία επινόησή του, για να ξεχωρίζει τους αριθμούς που έχουν μόνο 2 διαιρέτες από τους υπόλοιπους.

Για να τους ξεχωρίσεις κι εσύ, να διαγράψεις:

- τον αριθμό 1.
- τα πολλαπλάσια του 2, εκτός από το 2.
- τα πολλαπλάσια του 3, εκτός από το 3.
- τα πολλαπλάσια του 5, εκτός από το 5.
- τα πολλαπλάσια του 7, εκτός από το 7.
- Βάλε σε έναν κύκλο τους αριθμούς που απέμειναν.
- Πόσοι έμειναν;

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

ΟΙ... ΠΡΩΤΟΙ ΣΤΗΝ 100-ΔΑ

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Απόστολος Δοξιάδης
Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ
Εκδόσεις Καστανιώτη

κάθε άρτιος ακέραιος μεγαλύτερος του 2 μπορεί να
γραφεί ως άθροισμα δύο πρώτων

Από την αρχαιότητα ακόμη οι αριθμοί αποτελούσαν πρόκληση για μελέτη. Το 300 π.Χ. ο Ευκλείδης ήταν από τους πρώτους που μελέτησαν τους αριθμούς σε σχέση με τους διαιρέτες τους και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες.

Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί

Ένας αριθμός, μεγαλύτερος από το 1, που έχει μόνο δύο διαιρέτες (το 1 και τον εαυτό του) λέγεται **πρώτος**.

Ένας αριθμός που έχει τουλάχιστον τρεις διαιρέτες λέγεται **σύνθετος**.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 2, έχει για διαιρέτες μόνο το 1 και το 2.

Ο αριθμός 4, έχει για διαιρέτες το 1, το 2 και το 4.

Ο αριθμός 1 δεν είναι ούτε πρώτος ούτε σύνθετος (έχει μόνο έναν διαιρέτη, τον εαυτό του).



Εφαρμογή 1η

Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 101 έως 110 είναι πρώτοι αριθμοί.

Λύση

101 102 103 104 105 106 107 108 109 110

Πρώτα διαγράφω τους άρτιους αριθμούς (διαιρούνται με το 2). Μετά το 105 (που διαιρείται με το 3). Κανένας από τους υπόλοιπους αριθμούς δεν διαιρείται με το 5 σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας. Δοκιμάζω, όπως ο Ερατοσθένης, και με το 7 και διαπιστώνω ότι δεν διαιρούνται ούτε μ' αυτό.

Πρέπει να δοκιμάσω όμως αν διαιρούνται με κάποιον από τους υπόλοιπους πρώτους αριθμούς μέχρι το 100.

Απάντηση: Πρώτοι είναι οι αριθμοί 101, 103, 107 και 109.
Σύνθετοι είναι οι αριθμοί 102, 104, 105, 106, 108 και 110.

ΑΝ
ΕΙΧΑ ΝΑ
ΕΛΕΓΞΩ
ΜΕΧΡΙ ΤΟ
1.000;



Εφαρμογή 2η



Το Στ'1 έχει 23 μαθητές και το Στ'2 έχει 24. Ο γυμναστής θέλει να χωρίσει κάθε τμήμα σε ίσες ομάδες. Σε ποιο τμήμα θα δυσκολευτεί και γιατί; Στο άλλο τμήμα πόσοι είναι οι πιθανοί συνδυασμοί που μπορεί να κάνει;

Λύση- Απάντηση

Το Στ'1 δεν μπορεί να χωριστεί σε ομάδες χωρίς να περισσεύει κανένα παιδί, γιατί το 23 δεν έχει άλλους διαιρέτες εκτός από το 1 και το 23 (είναι πρώτος αριθμός). Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορούμε να το «παράγουμε» παρά μόνο με τον πολλαπλασιασμό $1 \cdot 23$.

Το Στ'2 μπορεί να χωριστεί με πολλούς τρόπους, γιατί το 24 έχει πολλούς διαιρέτες (είναι σύνθετος αριθμός).

Πιθανοί συνδυασμοί είναι:

12	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(12 \cdot 2 = 24)$
2	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(2 \cdot 12 = 24)$
3	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(3 \cdot 8 = 24)$
8	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(8 \cdot 3 = 24)$
4	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(4 \cdot 6 = 24)$
6	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(6 \cdot 4 = 24)$
24	ομάδες από	παιδιά	κάθε ομάδα	$(24 \cdot 1 = 24)$

Κεφάλαιο 15ο

Παραγοντοποίηση φυσικών αριθμών

Δέντρα με αριθμούς

Αναλύω έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Μαθαίνω τη διαδικασία ανάλυσης με δεντροδιάγραμμα και με διαδοχικές διαιρέσεις.

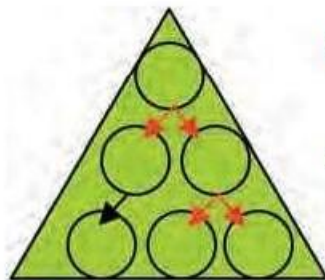


Δραστηριότητα 1η

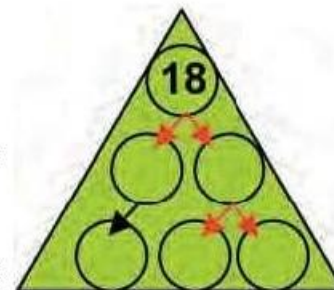
«Δεντροδιαγράμματα»

Τα παιδιά της Στ' τάξης αναρωτήθηκαν: «Μπορούμε οποιονδήποτε σύνθετο αριθμό να τον εκφράσουμε ως γινόμενο πρώτων αριθμών;» Ας πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό 18:

- Γράψε στο διπλανό «δέντρο» το 18 ως γινόμενο δύο παραγόντων :
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες:



- Θα μπορούσες να ξεκινήσεις (πάλι από το 18) με άλλους παράγοντες;
- Συνέχισε αναλύοντας κάθε σύνθετο παράγοντα του γινομένου σε πρώτους παράγοντες.
- Τι παρατηρείς για το τελικό γινόμενο στα δύο δέντρα;



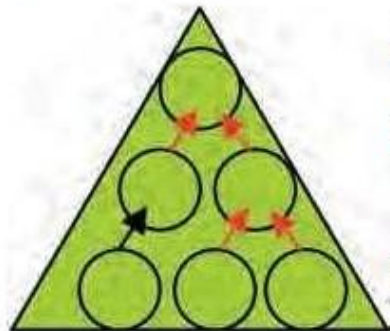
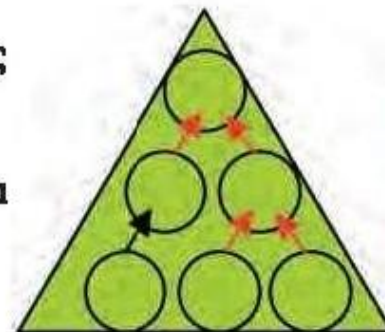
Δραστηριότητα 2η

Από την προηγούμενη δραστηριότητα τα παιδιά κατάλαβαν ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι το «κατασκευαστικό» υλικό για να φτιαχτούν όλοι οι σύνθετοι αριθμοί. Άρα κάθε σύνθετος αριθμός είναι φτιαγμένος από έναν μοναδικό συνδυασμό πρώτων αριθμών.

Σκέφτηκαν να τους παρομοιάσουν με τα παιδικά τουβλάκια και να δοκιμάσουν τώρα να παράγουν δέντρα με αριθμούς ξεκινώντας από τα κάτω κλαδιά προς τα πάνω.



- Γράψε στα κάτω κλαδιά του διπλανού «δέντρου» έναν συνδυασμό από 3 πρώτους παράγοντες (ίδιους ή διαφορετικούς).
- Ανεβαίνοντας στο πιο πάνω «κλαδί» να κάνεις τον πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο παράγοντες και να μεταφέρεις τον τρίτο όπως είναι.
- Στο τελευταίο κλαδί να κάνεις και τον άλλο πολλαπλασιασμό.



- Δοκίμασε τώρα με άλλους πρώτους παράγοντες.
- Συνέχισε κάνοντας τον πρώτο πολλαπλασιασμό ανάμεσα στους δύο και μετάφερε τον τρίτο.
- Κάνε τον τελευταίο πολλαπλασιασμό. Η διαδικασία παραγωγής του αριθμού ολοκληρώθηκε.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας οδηγούν στο συμπέρασμα:

Γινόμενο πρώτων παραγόντων

Ένας σύνθετος αριθμός μπορεί να εκφραστεί και ως γινόμενο πρώτων αριθμών (γινόμενο πρώτων παραγόντων).

Η σειρά των διαιρέσεων δεν παίζει κανένα ρόλο, γιατί κάθε σύνθετος αριθμός αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων μόνο κατά έναν τρόπο.

Για να αναλύσουμε έναν σύνθετο αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, μπορούμε να εργαστούμε με δέντροδιάγραμμα ή διαδοχικές διαιρέσεις.

Παραδείγματα

Ο αριθμός 10, μπορεί να εκφραστεί και ως $2 \cdot 5$.

$$12 = 2 \cdot 6 \\ = 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$12 = 3 \cdot 4 \\ = 3 \cdot 2 \cdot 2$$



Εφαρμογή 1η

Να εκφράσετε τον αριθμό 60 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με δεντροδιάγραμμα.

Λύση

α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 60. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Επομένως, γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 30$.

β. Από κάτω, αφού γράψουμε ξανά τον πρώτο παράγοντα (το 2), συνεχίζουμε αναλύοντας με τον ίδιο τρόπο το 30. Διαιρείται με το 2 και έτσι γράφουμε το γινόμενο $2 \cdot 15$.

γ. Γράφουμε ξανά τους πρώτους παράγοντες όπως είναι ($2 \cdot 2$) και συνεχίζουμε αναλύοντας το 15. Δεν διαιρείται με το 2 και έτσι εξετάζουμε αν διαιρείται με το 3. Διαιρείται και έτσι γράφουμε το γινόμενο $3 \cdot 5$.

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί όλοι οι παράγοντες είναι πρώτοι αριθμοί.

Απάντηση: Το 60 εκφράζεται ως $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.



Εφαρμογή 2η

Να εκφράσετε τον αριθμό 90 ως γινόμενο πρώτων παραγόντων με διαδοχικές διαιρέσεις.

Λύση

- α. Εξετάζουμε, σύμφωνα με τα κριτήρια διαιρετότητας, ποιος είναι ο μικρότερος πρώτος αριθμός με τον οποίο διαιρείται ο αριθμός 90. Βρίσκουμε ότι είναι το 2. Έτσι τον διαιρούμε και γράφουμε από κάτω το πηλίκο, που είναι 45.
- β. Συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία για το 45. Διαιρούμε με το 3 και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 15.
- γ. Διαιρούμε το 15 με το 3, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 5.
- δ. Διαιρούμε με το 5, και γράφουμε το πηλίκο, που είναι το 1.

Η ανάλυση τελειώνει, γιατί το τελευταίο πηλίκο είναι το 1.

Απάντηση: Ο αριθμός 90 εκφράζεται ως $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

90	2
45	3
15	3
5	5
1	



Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τον όρο **ανάλυση σύνθετου αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Εξήγησέ τον με ένα δικό σου παράδειγμα.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις: **Σωστό** **Λάθος**

- Όλοι οι σύνθετοι αριθμοί μπορούν να γραφούν ως γινόμενα των πρώτων παραγόντων 2 και 3.
- Πρέπει να βάζουμε τους παράγοντες με μια συγκεκριμένη σειρά.
- Είναι σωστή η ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$.