1. ΣΥΝΟΛΑ-ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
2. Πότε κάτι είναι στοιχείο ενός συνόλου και πότε όχι;
3. Πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο (ή και γνήσιο) υποσύνολο ενός συνόλου;
4. Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός ενός συνόλου;
5. Ποιο είναι το δυναμοσύνολο ενός συνόλου, η τομή, η ένωση, η διαφορά δύο συνόλων, το συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς ένα καθολικό σύνολο, το καρτεσιανό γινόμενο δύο συνόλων; Νόμοι του De Morgan.
6. Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός της διαφοράς δύο συνόλων; Ποιος είναι ο πληθικός αριθμός του συμπληρώματος ενός συνόλου (ως προς δοσμένο καθολικό σύνολο);
7. Πώς συνδέεται ο πληθικός αριθμός της ένωσης δύο ή περισσότερων συνόλων με τους πληθικούς αριθμούς των συνόλων και τον πληθικό αριθμό της τομής (ή των τομών) τους;
8. Με τι ισούται ο πληθικός αριθμός του δυναμοσυνόλου ενός συνόλου, αν το σύνολο έχει ν στοιχεία;
9. Πόσα είναι τα μ-μελή υποσύνολα ενός ν-μελούς συνόλου ($μ\leq ν)$;
10. Τι είναι συνάρτηση f: A $\rightarrow B, $με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α και τιμές στο σύνολο Β; Πόσες τέτοιες συναρτήσεις υπάρχουν; Πόσες από αυτές είναι αμφί; Πόσες από αυτές είναι επί; Πόσες είναι 1-1;

**ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΟΛΟ;**

**Πλήθος** Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι (17) I I I I {I, I, I, I}

 Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι Ι (18)

**Φυσικός αριθμός** = πλήθος από ακέραιες μονάδες

α, ε, ι, η, υ, ο, ω : όλα **τα** φωνήεντα της ελληνικής γλώσσας είναι εφτά ( η πολλαπλότητα των φωνηέντων).

Φ = {α, ε, ι, η, υ, ο, ω} : **Το** σύνολο των ελληνικών φωνηέντων.

α$ \in $ Φ (α ανήκει ή είναι στοιχείο του Φ)

σ $\notin $ Φ (σ δεν ανήκει στο Φ ή δεν είναι στοιχείο του Φ)

* **Σύνολο** είναι μια οποιαδήποτε πολλαπλότητα καλά ορισμένων και διακεκριμένων μεταξύ τους πραγμάτων (υλικών ή νοητικών) που τη θεωρούμε ενότητα.

{α, α} είναι σύνολο; ΟΧΙ δεν ισχύει το διακριτό των αντικειμένων από τα οποία απαρτίζεται (αποτελείται).

«Περιγραφική» αναπαράσταση συνόλου. Π.χ.

Γ = {x : x είναι γράμμα του (νεο-) ελληνικού αλφαβήτου}

Σ ={x : x είναι σύμφωνο του (νεο-) ελληνικού αλφαβήτου}

Φ ={x : x είναι φωνήεν του (νεο-) ελληνικού αλφαβήτου}

* Το σύνολο Α είναι **υποσύνολο** του συνόλου Β ανν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β.

**Α** $⊆$ **Β** σημαίνει το Α είναι υποσύνολο του Β

Επομένως

Φ $⊆$ Γ Σ $⊆$ Γ

Το σύνολο Α είναι **γνήσιο υποσύνολο** του συνόλου Β ανν κάθε στοιχείο του Α είναι και στοιχείο του Β και το σύνολο Β έχει και άλλα στοιχεία περά από αυτά του Α.

**Α**$⊂$**Β** σημαίνει το Α είναι γνήσιο υποσύνολο του Β.

Επομένως

Φ $⊂$ Γ Σ$ ⊂$ Γ

Π = {x: x πρώτος φυσικός αριθμός $<$ 5}

 = {2, 3}

Ρ = {x: x ρίζα (λύση) της εξίσωσης x2 – 5x + 6 =0}

 = {2, 3}

Ποιο (α) από τα παρακάτω δύο είναι σωστό (ά);

1. Π $⊆$ Ρ ΣΩΣΤΟ (όπως και το Ρ $⊆$ Π)

2. Π $⊂$ Ρ ΛΑΘΟΣ (όπως και το Ρ $⊂$ Π)

* Ορισμός: Δύο σύνολα είναι **ίσα** (Α = Β) ανν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία (Π.χ. Π = Ρ)

Επομένως: Α = Β ανν Α $⊆$ Β και Β $⊆$ Α.

* Παράδειγμα:

Σωστό ή λάθος;

i. {1} $\in $ {{1}} **Σ** Λ

ii. {1} $\in $ {1} Σ **Λ**

iii. {1} $⊆$ {{1}} Σ **Λ**

iv. {1} $⊆$ {{1}, 1}  **Σ** Λ

v. {1} $⊂$ {{1}, 1} **Σ** Λ

vi. {1} $⊆$ {1} **Σ** Λ

vii. {1} $⊂$ {1} Σ **Λ**

viii. 1 $\in $ {1} **Σ** Λ

ix. 1 $⊆${1} Σ **Λ**

x. {1} $=$ {1} **Σ** Λ

* Υπάρχει ένα σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο που λέγεται το **Κενό Σύνολο**. Το γράφουμε $∅$ (= {}). (Γιατί υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο; Γιατί καταρχήν μπορώ να σκεφτώ ως ενότητα την «πολλαπλότητα» των πραγμάτων που καθένα τους δεν ταυτίζεται με τον εαυτό του. {Χ : Χ $≢$ Χ}.

**Παρατήρηση:**

 Το {∅} δεν είναι ίσο με το ∅. Αλλά ∅ = ∅ και {∅} = {∅}.

* Παράδειγμα:

Σωστό ή λάθος;

i. {∅} $\in $ {{∅}} Σ Λ

ii. {∅} $\in $ {∅} Σ Λ

iii. {∅} $⊆$ {{∅}} Σ Λ

iv. {∅} $⊆$ {{∅}, ∅} Σ Λ

v. {∅} $⊂$ {{∅}, ∅} Σ Λ

vi. {∅} $⊆$ {∅} Σ Λ

vii. {∅} $⊂$ {∅} Σ Λ

viii. ∅ $\in $ {∅} Σ Λ

ix. ∅ $⊆${∅} Σ Λ

x. ∅ $ ⊆$ ∅ Σ Λ

xi. ∅ $ ⊂$ {∅} Σ Λ

xii. ∅ $⊂$ ∅ Σ Λ

xiii. ∅ $\in $ ∅ Σ Λ

xiv. ∅ $\in $ {} Σ Λ

xv. ∅ $= ${∅} Σ Λ

* H σχέση του υποσυνόλου έχει κάποιες πολύ βασικές ιδιότητες:

∅ $⊆ $Α (Α οποιοδήποτε σύνολο)

∅ $⊂$ Α (Α οποιοδήποτε μη κενό σύνολο).

Α $⊆$ Α (ανακλαστική)

Αν Α $⊆$ Β και Β $⊆$ Α, τότε Α=Β (αντισυμμετρική)

Αν Α $⊆$ Β και Β $⊆$ Γ, τότε Α $⊆$ Γ (μεταβατική).

Δηλ. η σχέση του υποσυνόλου είναι σχέση **διάταξης** (όχι όμως ολική) .

Π.χ. με τη βοήθειά της τα σύνολα {1, 2} {1, 3} δεν «συγκρίνονται».

(Μ διαιρεί τέλεια τον Ν (Μ, Ν φ.α) Μ|Ν είναι επίσης σχέση διάταξης

Μ|Μ

Αν Μ|Ν και Ν|Μ, τότε Μ = Ν

Αν Μ|Ν και ο Ν|Ρ, τότε Μ|Ρ)

**Πράξεις** μεταξύ συνόλων

Α, Β σύνολα

Η **τομή** του Α **και** του Β = Α$∩$Β = το σύνολο των κοινών στοιχείων του Α και Β.

Παράδειγμα:

Α = {2, 3, 5, 8}

Β = {2, 4, 6, 7, 8}

Γ = {1, 4, 3, 6, 8}

Δ = {4, 7}

Α $∩ $Δ = ∅

Α$∩$Β = {2, 8}

(Α$∩$Β)$∩$Γ = {8}

Β$∩$Γ = {4, 6, 8}

Α$ ∩($Β$∩$Γ) = {8}

Δηλαδή, βλέπω ότι (Α$∩$Β)$∩$Γ = Α$∩($Β$∩$Γ). Τυχαίο; Όχι.

* Ορισμός: Α$∩$Β = {x: x $\in $A και x$ \in $B}
* Ιδιότητες

Α$∩$Β = Β$∩$Α (αντιμεταθετική)

(Α$∩$Β)$∩$Γ = Α$ ∩($Β$∩$Γ) (προσεταιριστική)

Α$∩$Α = Α (ανακλαστική)

Α$∩$∅ = ∅

Έστω Α, Β έτσι ώστε Α$∩$Β = Α. Τότε Α$ ⊆ $Β. Γιατί; Διότι:

Αν Α = ∅, το παραπάνω είναι προφανές. Αν Α μη κενό, παίρνω τυχόν στοιχείο α $\in $Α. Τότε α $\in $ Α$∩$Β. Δηλαδή, α $\in $Β. άρα ΟΚ.

Από την άλλη, αν Α$ ⊆ $Β, τότε Α$∩$Β = Α.

Επομένως Α$∩$Β = Α ανν Α$ ⊆ $Β.

Α$∩$Β$ ⊆$ Α , Α$∩$Β$ ⊆$ Β.

* Ορισμός: Η **ένωση** Α$∪$Β = {x: x $\in $A **ή (εγκλειστικό)** x$ \in $B} =

{x: x στοιχείο **τουλάχιστον** ενός από τα Α, Β}.

Α = {2, 3, 5, 8}

Β = {2, 4, 6, 7, 8}

Γ = {1, 4, 3, 6, 8}

Α$∪$Β = {2, 3, 5, 8, 4, 6, 7}

(Α$ ∪ $Β)$ ∪ $Γ = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

Β$ ∪ $Γ = {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8}

Α$ ∪($Β$ ∪ $Γ) = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

* Ιδιότητες

Α$∪$Β = Β$∪$Α (αντιμεταθετική)

(Α$ ∪ $Β)$ ∪ $Γ = Α$ ∪($Β$ ∪ $Γ) (προσεταιριστική)

Α$∪$Α = Α (ανακλαστική)

Α$∪$∅ = Α

Α$ ⊆$ Α$∪$Β, Β $⊆ $Α$∪$Β

Α$∪$Β = Β ανν Α$ ⊆ $Β.



Επομένως, η τομή Α$∩$Β είναι το «μεγαλύτερο» κοινό υποσύνολο των Α, Β (δηλ. οποιαδήποτε κοινό υποσύνολο των Α, Β είναι και υποσύνολο της τομής τους). Αντίστοιχα η ένωση Α$∪$Β είναι το «μικρότερο» κοινό υπερσύνολο των Α, Β (δηλαδή η ένωση είναι υποσύνολο οποιουδήποτε κοινού υπερσυνόλου των Α, Β).

* Ορισμός: **Διαφορά** Α ─ Β = {x: x $\in $A και x $\notin $ B}

Έστω Α = {2, 3, 5, 8} και Β = {2, 4, 6, 7, 8}

Α ─ Β = {x: x $\in $A και x $\notin $ B} = {3, 5}

B ─ A = {x: x $\in $B και x $\notin $ A} = {4, 6, 7}

* Ιδιότητες

Α ─ Β =Α ─ (Α$∩$Β)

Α ─ Α = $∅$. Α ─ $∅$ = Α. $∅ $─ Α = $∅.$

Αν Α $⊆$ Β, τότε Α ─ Β = $∅.$ Αν Α ─ Β = $∅$, τότε Α $⊆$ Β

Αν Α ─ Β = Β ─ Α, τότε Α ─ Β = Β ─ Α =$ ∅$, οπότε Α $⊆$ Β και Β$ ⊆$ Α και άρα Α = Β.

* Αν έχει οριστεί **καθολικό** σύνολο Ω (δηλ. σύνολο του οποίου όλα τα προς συζήτηση σύνολα είναι υποσύνολα), τότε Ω ─ Α = Αc = το συμπλήρωμα του Α. (**C**omplement = συμπλήρωμα)

Προφανώς Α $∪$ Αc = Ω , Α $∩ $Αc = $∅$. Και αν έχει οριστεί καθολικό σύνολο τότε Α ─ Β = Α $∩$ Βc .

