# ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΛΟΓΙΚΗΣ

**για το μάθημα**

**ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΤΗΝ ΚΡΙΤΙΚΗ ΣΚΕΨΗ**

**(ακ. έτος 2012-13)**

**Κώστας Χατζηκυριάκου**

**Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης**

**Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας**

**1. Τι είναι η Λογική;**

**Στο ερώτημα τι είναι η Λογική μπορούμε να δώσουμε δύο απαντήσεις:**

**(1) Λογική είναι ο γνωστικός κλάδος που μελετά συνεπή σύνολα δηλωτικών προτάσεων, ή**
**(2) Λογική είναι ο γνωστικός κλάδος που μελετά την εγκυρότητα των επιχειρημάτων.**

**Ας δούμε τι ακριβώς σημαίνουν οι υπογραμμισμένες λέξεις των παραπάνω προτάσεων. Κατ' αρχήν λέγοντας προτάσεις εννοούμε γραμματικά ορθές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Ειδικότερα,**

**Δηλωτικές (αποφαντικές) είναι οι προτάσεις που εκφράζουν αληθή ή ψευδή κρίση.**

**Παράδειγμα. Οι προτάσεις «Την Κυριακή δεν γίνονται μαθήματα», «Ο π είναι ρητός αριθμός» είναι δηλωτικές προτάσεις. Οι προτάσεις «Ανοίγεις, σε παρακαλώ, το παράθυρο;» και «Τι νόστιμο γλυκό!» δεν είναι. Η πρώτη είναι προστακτική πρόταση και η δεύτερη θαυμαστική.**

**Στο εξής όταν αναφερόμαστε σε προτάσεις θα εννοούμε μόνον τις δηλωτικές προτάσεις, τις αποκαλούμενες και αποφαντικές προτάσεις ή απλά αποφάνσεις.**

**Ένα σύνολο προτάσεων είναι συνεπές αν οι προτάσεις του δεν αλληλοαναιρούνται δηλαδή, αν υπάρχει τουλάχιστον μια κατάσταση στην οποία όλες αυτές οι προτάσεις αληθεύουν, ισχύουν. Σύνολα προτάσεων που δεν είναι συνεπή θα λέγονται μη συνεπή ή ασυνεπή σύνολα.**

**Παράδειγμα. Α) Η ανεμοβλογιά θεραπεύεται. Η ανεμοβλογιά είναι ανίατη αρρώστια. (Ασυνεπές σύνολο)**

**Β) Αν το απόγευμα είναι βροχερό, τότε ο κ. Γιώργος δεν βγαίνει βόλτα στην παραλία. Ο κ. Γιώργος δεν βγήκε βόλτα σήμερα το απόγευμα. Σήμερα το απόγευμα είχε λιακάδα. (Συνεπές σύνολο)**

**<u>Επιχείρημα</u> είναι μια ακολουθία προτάσεων $p_1$, $p_2$ . . . $p_n$, q από τις οποίες η τελευταία που λέγεται <u>συμπέρασμα</u> του επιχειρήματος στηρίζεται–κατά την κρίση αυτού ή αυτής που το διατυπώνει- στις υπόλοιπες που λέγονται <u>προκείμενες</u> του επιχειρήματος.**

**Επομένως είναι δυνατόν –σε αντίθεση με ό,τι πιστεύει αυτός ή αυτή που διατυπώνει ένα επιχείρημα- οι προκείμενες να μην υποστηρίζουν το συμπέρασμα. Οδηγούμαστε έτσι στη διάκριση μεταξύ <u>έγκυρων</u> και <u>άκυρων</u> επιχειρημάτων.**

**Ένα επιχείρημα είναι <u>έγκυρο</u> αν κάθε κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προκείμενες είναι κατάσταση στην οποία αληθεύει κατ' ανάγκη και το συμπέρασμα.**
**Ισοδύναμα, ένα επιχείρημα είναι <u>έγκυρο</u> αν δεν είναι δυνατό να υπάρχει κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προκείμενες, αλλά το συμπέρασμα δεν αληθεύει σε αυτήν. Τα μη έγκυρα επιχειρήματα λέγονται <u>άκυρα</u>.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Έστω το επιχείρημα με <u>προκείμενες</u> τις προτάσεις:**

1) **Όλοι οι ρητοί αριθμοί γράφονται υπό τη μορφή p/r, όπου p, r ακέραιοι αριθμοί και ο r μη μηδενικός.**

2) **Ο π δεν μπορεί να γραφεί υπό τη μορφή p/r, όπου p, r ακέραιοι αριθμοί και ο r μη μηδενικός αριθμός,**

**του οποίου <u>συμπέρασμα</u> είναι η πρόταση:**

**Ο π δεν είναι ρητός αριθμός.**

**Προφανώς (γιατί;) το επιχείρημα αυτό είναι έγκυρο. Στη συνέχεια θα δούμε πολλά άκυρα επιχειρήματα.**

**<u>Ιστορική σημείωση</u>: Ο Αριστοτέλης –που θεωρείται ο «πατέρας» της Λογικής- ορίζει ως εξής τον <u>διαλογισμό</u>: «λόγος εν ω τεθέντων τινών έτερον τι των τεθέντων εξ ανάγκης συμβαίνει τω ταύτα είναι». Ποια από τις παραπάνω έννοιες σας θυμίζει ο ορισμός αυτός;**

**Υπάρχει σχέση μεταξύ των δύο διαφορετικών ορισμών της Λογικής που δώσαμε στην αρχή; Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό ας ορίσουμε πρώτα το <u>σύνολο αντεπιχειρήματος Σ(Ε)</u> ενός επιχειρήματος Ε: Εάν Ε είναι το επιχείρημα $p_1, p_2 \ldots p_n, q$, τότε Σ(Ε) είναι το σύνολο των προτάσεων $p_1, p_2 \ldots p_n, \neg q$, δηλαδή οι προκείμενες του επιχειρήματος μαζί με την άρνηση του συμπεράσματός του, την πρόταση ¬q που εκφράζει την άρνηση της πρότασης q.**

**<u>1.1.Θεώρημα</u> Το επιχείρημα Ε είναι έγκυρο αν και μόνον αν το σύνολο αντεπιχειρήματός του Σ(Ε) είναι μη συνεπές σύνολο.**

**<u>Απόδειξη</u>: Έστω ότι το επιχείρημα Ε με προκείμενες τις προτάσεις $p_1, p_2 \ldots p_n$ και συμπέρασμα q είναι έγκυρο. Τότε δεν υπάρχει κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προκείμενες, αλλά το συμπέρασμα είναι ψευδές. Επομένως δεν υπάρχει κατάσταση στην οποία όλες οι προτάσεις του συνόλου αντεπιχειρήματος του Ε αληθεύουν. (Αν υπήρχε αυτή θα ήταν κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προκείμενες του Ε και το συμπέρασμα δεν αληθεύει: άτοπο). Άρα το Σ(Ε) είναι μη συνεπές σύνολο. Αντίστροφα, έστω ότι το σύνολο αντεπιχειρήματος Σ(Ε) ενός επιχειρήματος Ε είναι μη συνεπές. Τότε δεν υπάρχει κατάσταση στην οποία συναληθεύουν όλες οι προτάσεις του Σ(Ε). Επομένως οποιαδήποτε κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προτάσεις του Σ(Ε) είναι κατάσταση στην οποία αληθεύει και το συμπέρασμα (διαφορετικά θα υπήρχε μία τουλάχιστον κατάσταση στην οποία θα αλήθευαν όλες οι προκείμενες αλλά και η άρνηση του συμπεράσματος, δηλαδή όλες οι προτάσεις του Σ(Ε), πράγμα άτοπο). Άρα το επιχείρημα είναι έγκυρο.**

**Γεννιέται λοιπόν το ερώτημα: Υπάρχει μήπως γενική μέθοδος με την εφαρμογή της οποίας να μπορούμε να αποφανθούμε αν ένα σύνολο προτάσεων είναι συνεπές ή ειδικότερα αν ένα επιχείρημα είναι έγκυρο;**

**<u>Παράδειγμα</u>. Είναι το παρακάτω σύνολο προτάσεων Σ συνεπές;**

**(1) Εάν υπάρχει κοβάλτιο, αλλά δεν υπάρχει νικέλιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή γίνεται καφέ. (2) Δεν υπάρχει ούτε νικέλιο, ούτε μαγγάνιο.**
**(3) Υπάρχει κοβάλτιο, αλλά το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**

**Σύμφωνα με όσα είπαμε για να είναι το παραπάνω σύνολο συνεπές πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία κατάσταση στην οποία να αληθεύουν όλες οι προτάσεις του. Ας δούμε τι είδους καταστάσεις περιγράφονται από τις προτάσεις αυτές.**

**Προφανώς, λόγω της (2), σε κάθε κατάσταση που μας ενδιαφέρει δεν υπάρχει νικέλιο και δεν υπάρχει μαγγάνιο. Λόγω της (3), υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο. Προσέξτε τώρα ότι η πρώτη πρόταση είναι τέτοια που θέτει κάποιες συνθήκες για να συμβαίνουν κάποια πράγματα. Ειδικότερα, μας λέει ότι αν η κατάστασή μας είναι τέτοια που υπάρχει κοβάλτιο και δεν υπάρχει νικέλιο, τότε έχουμε αναγκαστικά μια κατάσταση στην οποία το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ. Ωστόσο, δεν μας λέει τίποτε για το τι συμβαίνει στις καταστάσεις που η υπόθεση της υποθετικής πρότασης δεν αληθεύει, που δεν ισχύουν δηλαδή οι συνθήκες που τίθενται από την υπόθεση. Μπορούμε επομένως να χωρίσουμε τις καταστάσεις σε δύο βασικές κατηγορίες: σε εκείνες στις οποίες υπάρχει κοβάλτιο και δεν υπάρχει νικέλιο (που είναι αναγκαστικά καταστάσεις στις οποίες το χρώμα του ανιχνευτή γίνεται καφέ, αφού θέλουμε η πρώτη πρόταση να αληθεύει σε αυτές) και σε εκείνες που δεν υπάρχει κοβάλτιο ή υπάρχει νικέλιο (που είναι ακριβώς οι καταστάσεις στις οποίες η συνθήκη που θέτει η υπόθεση της πρώτης πρότασης δεν ισχύει). Προσέξτε ότι τέτοιου είδους είναι οι καταστάσεις στις οποίες δεν υπάρχει κοβάλτιο (ανεξάρτητα από το αν υπάρχει ή όχι νικέλιο) και εκείνες στις οποίες υπάρχει νικέλιο (ανεξάρτητα από το αν υπάρχει ή όχι κοβάλτιο). Διαπιστώνουμε ότι μέσω της ανάλυσης που προηγήθηκε διαιρέσαμε το σύνολο όλων των δυνατών καταστάσεων που περιγράφονται από τις παραπάνω προτάσεις στις εξής κατηγορίες:**

**α. Σε καταστάσεις στις οποίες δεν υπάρχει νικέλιο, δεν υπάρχει μαγγάνιο, υπάρχει κοβάλτιο, το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο και δεν υπάρχει κοβάλτιο!**

**β. Σε καταστάσεις στις οποίες δεν υπάρχει νικέλιο, δεν υπάρχει μαγγάνιο, υπάρχει κοβάλτιο, το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο και υπάρχει νικέλιο!**

**γ. Σε καταστάσεις στις οποίες δεν υπάρχει νικέλιο, δεν υπάρχει μαγγάνιο, υπάρχει κοβάλτιο, το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ.**

**Προφανώς όμως δεν υπάρχουν κανενός τέτοιου τύπου καταστάσεις και επομένως το αρχικό σύνολο προτάσεων δεν είναι συνεπές.**

**Όλα τα παραπάνω μπορούμε να τα γράψουμε συντομότερα ως εξής:**

**Σ**

**Δεν υπάρχει νικέλιο**

**Δεν υπάρχει μαγγάνιο**

**Υπάρχει κοβάλτιο**

**Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο**

**Υπάρχει νικέλιο ή δεν υπάρχει κοβάλτιο** **Το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ**

#

**Υπάρχει νικέλιο** **Δεν υπάρχει κοβάλτιο**

# #

**Να και άλλα οκτώ παραδείγματα:**

**Άσκηση. Ι) Είναι τα ακόλουθα επιχειρήματα έγκυρα;**

**1 Εάν υπάρχει κοβάλτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Υπάρχει κοβάλτιο.**
**Άρα το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**

**2. Εάν υπάρχει κοβάλτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Δεν υπάρχει κοβάλτιο.**
**Άρα το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο.**

**3. Εάν υπάρχει κοβάλτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο.**
**Άρα δεν υπάρχει κοβάλτιο.**

**4. Εάν υπάρχει κοβάλτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Άρα υπάρχει κοβάλτιο.**

5. Εάν το Α είναι μικρότερο από το Β, τότε το Α είναι μικρότερο από το Γ.
   Το Α είναι μικρότερο από το Β.
   Άρα το Α είναι μικρότερο από το Γ

6. Εάν το Α είναι μικρότερο από το Β, τότε το Α είναι μικρότερο από το Γ.
   Το Α δεν είναι μικρότερο από το Β.
   Άρα το Α δεν είναι μικρότερο από το Γ.

7. Εάν το Α είναι μικρότερο από το Β, τότε το Α είναι μικρότερο από το Γ.
   Το Α δεν είναι μικρότερο από το Γ.
   Άρα το Α δεν είναι μικρότερο από το Β.

8. Εάν το Α είναι μικρότερο από το Β, τότε το Α είναι μικρότερο από το Γ.
   Το Α είναι μικρότερο από το Γ.
   Άρα το Α είναι μικρότερο από το Β.

(Λύση του 8): Σύνολο αντεπιχειρήματος Σ(Ε) :
Εάν το Α είναι μικρότερο από το Β, τότε το Α είναι μικρότερο από το Γ. Το Α είναι μικρότερο από το Γ. Το Α δεν είναι μικρότερο από το Β.
Έχουμε:

Σ(Ε)

Το Α είναι μικρότερο από το Γ

Το Α δεν είναι μικρότερο από το Β

Το Α δεν είναι μικρότερο από το Β      Το Α είναι μικρότερο από το Γ

Παρατηρούμε ότι κανένα κλαδί δεν σπάζει. Διαβάζοντας μάλιστα οποιοδήποτε από τα μη σπασμένα κλαδιά βλέπουμε ότι αυτό περιγράφει μια κατάσταση στην οποία οι προκείμενες του αρχικού επιχειρήματος ισχύουν, αλλά το συμπέρασμα δεν ισχύει και επομένως το επιχείρημα είναι άκυρο.
II) Έστω ότι p: Υπάρχει κοβάλτιο, q: Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο, r: Το Α είναι μικρότερο από το Β, s: Το Α είναι μικρότερο από το Γ. Επίσης έστω

**ότι η πρόθεση του ¬ μπροστά από ένα γράμμα δηλώνει την άρνηση αυτού που δηλώνει η πρόταση που συμβολίζεται με αυτό το γράμμα, λόγου χάρη, ¬p: Δεν υπάρχει κοβάλτιο.**
**Γράψτε τα παραπάνω επιχειρήματα με τη βοήθεια των p, q, r, s, ¬. Τι παρατηρείτε;**

**Το παραπάνω δένδρο έχει τη ρίζα του στο σύνολο των προτάσεων που θέλουμε να ελέγξουμε ως προς τη συνέπεια. Οι κόμβοι του δένδρου είναι προτάσεις του Σ ή προτάσεις που προκύπτουν από τις προτάσεις του Σ βάσει ορισμένων κανόνων που θα δούμε στη συνέχεια. Διαβάζοντας τους κόμβους των κλαδιών διαβάζουμε καταστάσεις που αφορούν άμεσα το σύνολο Σ. Τα κλαδιά τα οποία δεν σπάζουν κάτω από το βάρος μιας προφανούς αντίφασης περιγράφουν καταστάσεις στις οποίες αληθεύουν όλες οι προτάσεις του συνόλου από το οποίο ξεκινήσαμε. Εάν υπάρχει έστω και ένα κλαδί που δεν έχει σπάσει, το αρχικό σύνολο είναι συνεπές και μάλιστα η κατάσταση που περιγράφεται από τις προτάσεις στους κόμβους του μαρτυρεί τη συνέπεια του αρχικού συνόλου. Εάν όλα τα κλαδιά σπάζουν, τότε δεν υπάρχει κατάσταση στην οποία να αληθεύουν όλες οι προτάσεις του αρχικού συνόλου και άρα αυτό είναι ασυνεπές.**

**<u>Παράδειγμα</u>: (άσκηση) Είναι το παρακάτω σύνολο αποφάνσεων συνεπές ή ασυνεπές;**

**Η Ρέα ή η Ρίκα μου έδωσε το βιβλίο αυτό την περασμένη Τρίτη. Εάν μου το έδωσε η Ρέα, τότε το μεσημέρι της περασμένης Τρίτης ήμουν στο Ηράκλειο. Ήμουν πολλά χιλιόμετρα μακριά από το Ηράκλειο όλη την περασμένη εβδομάδα και η Ρίκα δεν μου έδωσε τίποτε (απάντηση: Α).**

**Βασικό εργαλείο μας στην παραπάνω μέθοδο ήταν η ανάλυση προτάσεων σε απλούστερες κατά τρόπο που να μας δίνει άμεσα την περιγραφή των καταστάσεων στις οποίες αληθεύουν οι αρχικές η να μας αποκαλύπτει την ανυπαρξία τους. Τι είδους ήταν αυτές οι σύνθετες προτάσεις;**

**Ας δούμε μερικά παραδείγματα:**

1. **Η πρόταση «Υπάρχει κοβάλτιο αλλά το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» απαρτίζεται από τις δύο προτάσεις «Υπάρχει κοβάλτιο», «Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» οι οποίες συνδέονται συζευκτικά. (Το *αλλά* είναι παρατακτική σύνδεση). Η λογική μορφή επομένως της παραπάνω πρότασης είναι η φ και χ (συμβολικά $\varphi \wedge \chi$). Είναι δυνατόν η παραπάνω περιγραφή να είναι ακριβής εάν περιγράφει μια κατάσταση στην οποία δεν υπάρχει κοβάλτιο; Ή μια στην οποία το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ; Ή μια στην οποία δεν υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι κόκκινο; Προφανώς όχι. Επομένως είναι λογικό να πούμε ότι η σύζευξη δύο προτάσεων είναι αληθής εάν και μόνον εάν και οι δύο συνιστώσες της αληθεύουν, ενώ είναι ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση.**

2. **Η πρόταση «Υπάρχει κοβάλτιο ή το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» απαρτίζεται από τις δύο προτάσεις «Υπάρχει κοβάλτιο», «Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» οι οποίες συνδέονται διαζευκτικά. Η λογική μορφή της παραπάνω πρότασης είναι η φ ή χ (συμβολικά $\varphi \vee \chi$). Είναι δυνατόν η παραπάνω περιγραφή να είναι ακριβής εάν περιγράφει μια κατάσταση στην οποία δεν υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ; Προφανώς όχι. Η περιγραφής είναι εύλογο να είναι αληθής όταν περιγράφει κατάσταση στην οποία υπάρχει κοβάλτιο (ανεξάρτητα από το χρώμα του ανιχνευτή) ή κατάσταση στην οποία το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο (ανεξάρτητα από την ύπαρξη η μη κοβαλτίου). Προσέξτε ότι ερμηνεύουμε τη διάζευξη εγκλειστικά (το ένα ή το άλλο ή και τα δύο!).**

3. **Η υποθετική πρόταση «Εάν υπάρχει κοβάλτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» απαρτίζεται πάλι από τις προτάσεις «Υπάρχει κοβάλτιο»(υπόθεση της υποθετικής πρότασης) και «Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» (απόδοση της υποθετικής πρότασης). Η λογική μορφή της είναι η εάν φ τότε χ (ή αλλιώς φ συνεπάγεται χ και συμβολικά $\varphi \rightarrow \chi$). Εάν όντως σε μια κατάσταση υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο η παραπάνω υποθετική πρόταση δεν διαψεύδεται, είναι αληθής. Εάν σε μια κατάσταση υπάρχει κοβάλτιο**

**αλλά το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο (είναι ας πούμε καφέ) τότε η παραπάνω υποθετική πρόταση περιγράφει κάτι μη ακριβές και άρα είναι ψευδής. Τι συμβαίνει αν βρισκόμαστε σε μια κατάσταση όπου δεν υπάρχει κοβάλτιο. Αυτό που μπορούμε να πούμε αμέσως είναι ότι η παραπάνω πρόταση δεν έχει σχέση με την κατάσταση αυτή (αφού αυτή ουσιαστικά λέει τι συμβαίνει *αν υπάρχει* κοβάλτιο) και επομένως η εν λόγω κατάσταση δεν διαψεύδει αυτό που η πρότασή μας δηλώνει. Ωστόσο εμείς θέλουμε η πρότασή μας να είναι δηλωτική (δηλαδή να έχει τιμή αληθείας) και αφού σίγουρα δεν είναι ψευδής σε μια τέτοια κατάσταση είναι εύλογο να τη θεωρήσουμε αληθή. Η συνεπαγωγή που μόλις ορίσαμε λέγεται υλική συνεπαγωγή και είναι πολύ χρήσιμη στα μαθηματικά και στις επιστήμες. Η υπόθεση της υλικής συνεπαγωγής $\varphi \to \chi$ είναι ικανή συνθήκη-αρκεί- για να συμβαίνει αυτό που δηλώνει η απόδοση της υποθετικής πρότασης.**

4. **Η πρόταση «υπάρχει κοβάλτιο αν και μόνον αν το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο» απαρτίζεται πάλι από τις προτάσεις «Υπάρχει κοβάλτιο» και «Το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο». Η λογική μορφή της είναι η φ αν και μόνον αν χ (απλούστερα φ ανν χ, συμβολικά $\varphi \leftrightarrow \chi$). Προφανώς η πρόταση αυτή είναι ψευδής αν αναφέρεται όταν αναφέρεται σε μια κατάσταση στην οποία δεν υπάρχει κοβάλτιο αλλά το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο όπως και όταν αναφέρεται σε μια κατάσταση στην οποία υπάρχει κοβάλτιο αλλά το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο. Αν αναφέρεται σε κατάσταση στην οποία υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο ή σε κατάσταση στην οποία δεν υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο τότε είναι αληθής. Η ύπαρξη του κοβαλτίου είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για το πράσινο χρώμα του ανιχνευτή και ισοδύναμα το πράσινο χρώμα του ανιχνευτή είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη του κοβαλτίου.**

5. **Τέλος, η πρόταση «Δεν υπάρχει κοβάλτιο» δηλώνει ότι δεν ισχύει αυτό που δηλώνει η «Υπάρχει κοβάλτιο» και άρα αληθεύει ακριβώς στις καταστάσεις που η «Υπάρχει κοβάλτιο» είναι ψευδής. Η λογική μορφή**

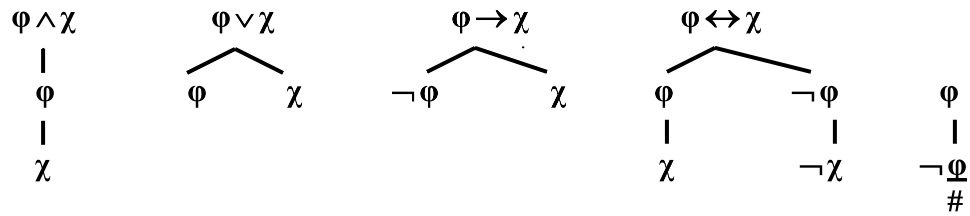
της είναι η όχι-φ, (συμβολικά $\neg\varphi$) όπου φ η πρόταση της οποίας τη δήλωση αρνείται.

Όλα τα παραπάνω μπορούμε να τα εκφράσουμε με συντομία μέσω των πινάκων αληθείας των λογικών μορφών:

| $\varphi$ | $\chi$ | $\varphi\wedge\chi$ | $\varphi\vee\chi$ | $\varphi\rightarrow\chi$ | $\varphi\leftrightarrow\chi$ | $\neg\varphi$ | $\neg\chi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α | Α | Α | Ψ | Ψ |
| Α | Ψ | Ψ | Α | Ψ | Ψ | Ψ | Α |
| Ψ | Α | Ψ | Α | Α | Ψ | Α | Ψ |
| Ψ | Ψ | Ψ | Ψ | Α | Α | Α | Α |

Δηλαδή, η $\varphi\wedge\chi$ αληθεύει μόνον στις καταστάσεις που αληθεύουν και οι δύο συνιστώσες της σύζευξης, η $\varphi\vee\chi$ είναι ψευδής μόνον στις καταστάσεις που και οι δύο συνιστώσες της είναι ψευδείς, η $\varphi\rightarrow\chi$ είναι ψευδής μόνον όταν η φ (υπόθεση) είναι αληθής και η απόδοση χ είναι ψευδής, η $\varphi\leftrightarrow\chi$ είναι αληθής όταν και οι δύο συνιστώσες της είναι αληθείς ή και οι δύο συνιστώσες της είναι ψευδείς, και η $\neg\varphi$ αληθεύει ακριβώς όταν η φ είναι ψευδής.

Από τους πίνακες αληθείας φαίνεται αμέσως και ο σωστός τρόπος ανάπτυξης των δένδρων με τα οποία ελέγχουμε τη συνέπεια ή μη ενός συνόλου προτάσεων.




<u>Άσκηση</u>. 1. Γράψτε τους πίνακες αληθείας των λογικών μορφών $\neg(\varphi\wedge\chi)$, $\neg(\varphi\vee\chi)$ $\neg(\varphi\rightarrow\chi)$, $\neg(\varphi\leftrightarrow\chi)$, $\neg\neg\varphi$.

2. Πώς συνεχίζεται ένα κλαδί σε κόμβο του οποίου εμφανίζεται μια από τις παραπάνω λογικές μορφές;

**<u>Άσκηση</u>. Συγκρίνετε τους πίνακες αληθείας των λογικών μορφών $\neg(\varphi\wedge\chi)$, $\neg(\varphi\vee\chi)$ $\neg(\varphi\rightarrow\chi)$, $\neg\neg\varphi$, $\varphi$, $\neg\varphi\vee\neg\chi$, $\neg\varphi\wedge\neg\chi$, $\varphi\wedge\neg\chi$. Τι παρατηρείτε;**

**<u>Άσκηση</u>. Ποια από τα ακόλουθα επιχειρήματα είναι έγκυρα;**

**α) Αν υπάρχει μαγνήσιο, τότε υπάρχει μόλυβδος.**
**Αν υπάρχει μόλυβδος, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Άρα αν το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο, τότε υπάρχει μαγνήσιο.**

**β) Εάν υπάρχει μαγνήσιο, τότε υπάρχει κοβάλτιο**
**Υπάρχει πυρίτιο ή υπάρχει κοβάλτιο.**
**Εάν υπάρχει μόλυβδος, τότε υπάρχει μαγνήσιο ή πυρίτιο.**
**Υπάρχει μόλυβδος.**
**Άρα υπάρχει κοβάλτιο.**

**γ) Εάν υπάρχει μαγνήσιο, τότε αν υπάρχει μαγνήσιο θα υπάρχει χρώμιο.**
**Ή δεν υπάρχει μόλυβδος ή υπάρχει πυρίτιο.**
**Υπάρχει μαγνήσιο.**
**Άρα εάν υπάρχει μόλυβδος, τότε υπάρχει χρώμιο.**

**δ) Εάν το χρώμα του ανιχνευτή δεν είναι πράσινο, τότε δεν υπάρχει πυρίτιο ή υπάρχει μαγγάνιο.**
**Υπάρχει πυρίτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Άρα υπάρχει μαγγάνιο.**

**ε) Εάν δεν υπάρχει πυρίτιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι πράσινο.**
**Εάν υπάρχει μαγγάνιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ.**
**Εάν δεν υπάρχει μαγγάνιο, τότε δεν υπάρχει πυρίτιο.**
**Άρα υπάρχει μαγγάνιο αν και μόνον αν υπάρχει πυρίτιο.**

**στ) Δεν είναι δυνατόν να μην υπάρχει κοβάλτιο και να υπάρχει νικέλιο.**
**Άρα εάν δεν υπάρχει νικέλιο, τότε δεν υπάρχει κοβάλτιο.**

**ζ) Εάν υπάρχει κοβάλτιο και δεν υπάρχει νικέλιο, τότε το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ.**
**Υπάρχει κοβάλτιο και το χρώμα του ανιχνευτή είναι καφέ.**
**Άρα υπάρχει μαγνήσιο ή νικέλιο.**

**Άσκηση. Το ακόλουθο επιχείρημα είναι μια λίγο απλοποιημένη μορφή ενός επιχειρήματος που ο Αριστοτέλης αναπτύσσει στο έργο του Μετά τα φυσικά, XII, ix:**

**Το Θείο σκέπτεται ή δεν σκέπτεται. Εάν δεν σκέπτεται, τότε βρίσκεται σε κατάσταση που μοιάζει με ύπνο, αλλά αυτό δεν συμβαίνει (καθώς αντιβαίνει στη θεία φύση του). Επίσης, αν σκέπτεται, τότε αντικείμενο της σκέψης του είναι η νόησή του ή κάτι άλλο. Αλλά δεν είναι δυνατόν το Θείο να σκέπτεται κάτι άλλο από τη νόησή του. Άρα το Θείο σκέπτεται και αντικείμενο της σκέψης του είναι η νόησή του.**

**Είναι έγκυρο ή άκυρο το επιχείρημα αυτό του Αριστοτέλη;**

**2. Λογικά ισοδύναμες προτάσεις, ταυτολογίες, αντινομίες**

**Ας επανέλθουμε στην άσκηση όπου σας ζητείται να γράψετε τους πίνακες αληθείας των $\neg(\varphi\wedge\chi)$, $\neg(\varphi\vee\chi)$ $\neg(\varphi\to\chi)$, $\neg\neg\varphi$, φ, $\neg\varphi\vee\neg\chi$, $\neg\varphi\wedge\neg\chi$, $\varphi\wedge\neg\chi$. Εφόσον εργαστήκατε σωστά θα βρήκατε ότι τα ζεύγη των λογικών μορφών $\neg(\varphi\wedge\chi)$ και $\neg\varphi\vee\neg\chi$, $\neg(\varphi\vee\chi)$ και $\neg\varphi\wedge\neg\chi$, $\neg(\varphi\to\chi)$ και $\varphi\wedge\neg\chi$, $\neg\neg\varphi$ και φ έχουν ίδιους πίνακες αληθείας. Δηλαδή, αυτές οι λογικές μορφές δεν διακρίνονται με τη βοήθεια κάποιας κατάστασης στην οποία η μία αληθεύει και η άλλη είναι ψευδής: λέμε ότι είναι λογικά ισοδύναμες.**

**<u>Άσκηση</u>. Δείξτε ότι τα παρακάτω ζεύγη είναι ζεύγη λογικά ισοδύναμων προτασιακών μορφών:**

**i)** $\varphi\to\chi$ **και** $\neg\varphi\vee\chi$

**ii)** $\varphi\leftrightarrow\chi$ **και** $(\varphi\to\chi)\wedge(\chi\to\varphi)$

**iii)** $\neg(\varphi\leftrightarrow\chi)$ **και** $(\varphi\wedge\neg\chi)\vee(\chi\wedge\neg\varphi)$

**Προφανώς τα φ, χ στις παραπάνω λογικές μορφές είναι προτασιακές μεταβλητές δηλαδή στη θέση τους μπορούμε να βάλουμε οποιαδήποτε άλλη πρόταση. Έτσι γνωρίζουμε, λόγου χάρη ότι αν P και Q είναι δύο οποιεσδήποτε προτάσεις τότε οι προτάσεις $P\to Q$ και $\neg P\vee Q$ δεν διακρίνονται, έχουν το ίδιο λογικό νόημα, είναι λογικά ισοδύναμες.**

**<u>Άσκηση.</u> Έστω οι τρεις προτάσεις p, q, r. Δείξτε ότι οι σύνθετες προτάσεις**

**i)** $p\vee(q\wedge r)$ **και** $(p\vee q)\wedge(p\vee r)$ **είναι λογικά ισοδύναμες.**

**ii)** $p\wedge(q\vee r)$ **και** $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ **είναι λογικά ισοδύναμες.**

**Τι μπορείτε να πείτε για τον πίνακα αληθείας των προτάσεων**

$(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$ **και** $(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$**;**

**Εάν εργαστήκατε σωστά θα βρήκατε ότι ο πίνακας αληθείας τόσο της $(p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q)\wedge(p\vee r))$ όσο και της $(p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$ έχουν στην τελευταία στήλη μόνον Α, δηλαδή σε όλες τις δυνατές καταστάσεις είναι αληθείς. Οι προτάσεις που αληθεύουν σε όλες τις δυνατές καταστάσεις**

**λέγονται ταυτολογίες. Προφανώς εάν τις μεταβλητές μιας λογικής μορφής που αντιστοιχεί σε μια ταυτολογία τις αντικαταστήσουμε με άλλες προτάσεις, η πρόταση που προκύπτει είναι πάλι ταυτολογία. Από την άλλη προτάσεις που είναι σε όλες τις δυνατές καταστάσεις ψευδείς λέγονται αντινομίες. Προφανώς η άρνηση μιας ταυτολογίας είναι αντινομία και η άρνηση μιας αντινομίας είναι ταυτολογία.**

**Άσκηση. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι όλες ταυτολογίες:**

$$\left.\begin{array}{l} p\leftrightarrow p \\ p\rightarrow p \end{array}\right\}$$ **νόμοι της ταυτότητας**

$p\leftrightarrow(p\wedge p)$ **νόμος του ταυτοδύναμου της σύζευξης**

$p\leftrightarrow(p\vee p)$ **νόμος του ταυτοδύναμου της διάζευξης**

$\neg(p \wedge \neg p)$ **νόμος της μη αντίφασης**

$p\vee\neg p$ **νόμος του αποκλειόμενου τρίτου**

$(\neg\neg p)\leftrightarrow p$ **νόμος της διπλής άρνησης**

$(p\wedge q) \leftrightarrow (q\wedge p)$ **αντιμεταθετικότητα της σύζευξης**

$(p\vee q) \leftrightarrow (q\vee p)$ **αντιμεταθετικότητα της διάζευξης**

$((p\wedge q)\wedge r) \leftrightarrow ((p\wedge (q\wedge r))$ **προσεταιριστικότητα της σύζευξης**

$((p\vee q)\vee r) \leftrightarrow ((p\vee (q\vee r))$ **προσεταιριστικότητα της διάζευξης**

$p\vee (q\wedge r)\leftrightarrow((p\vee q)\wedge (p\vee r))$ **επιμερισμός της διάζευξης ως προς τη σύζευξη**

$p\wedge(q\vee r)\leftrightarrow((p\wedge q)\vee (p\wedge r))$ **επιμερισμός της διάζευξης ως προς τη σύζευξη**

$$\left.\begin{array}{l} p\wedge (p\vee q) \leftrightarrow p \\ p\vee (p\wedge q) \leftrightarrow p \end{array}\right\}$$ **νόμος της απορρόφησης**

$$\left.\begin{array}{l}\neg(p\wedge q)\leftrightarrow\neg p\vee\neg q\\ \neg(p\vee q)\leftrightarrow\neg p\wedge\neg q\end{array}\right\}$$ **δυικότητα**

$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\neg q\rightarrow\neg p)$ **νόμος της αντιθετοαντιστροφής**

$((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$ **νόμος της μεταβατικότητας**

$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow\neg q)\rightarrow\neg p$ **απαγωγή εις άτοπον**

$(\neg p\rightarrow p)\rightarrow p$ **νόμος του Κλάβιου**

$((p\rightarrow q)\rightarrow p)\rightarrow p$ **νόμος του Pierce**

$(p\rightarrow(q\rightarrow p)$ **Verum sequitur ad quolibet**

$\neg p\rightarrow(p\rightarrow q)$ **Ex falso sequitur quolibet**

$((p\rightarrow q)\wedge p)\rightarrow q$ **Modus ponens**

$((p\rightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$ **Modus tollens**

$(p\rightarrow(q\rightarrow r))\leftrightarrow((p\wedge q)\rightarrow r)$ **νόμος εισαγωγής-εξαγωγής**

**3. Η πληρότητα των λογικών συνδέσμων και οι κανονικές μορφές**

**Οι επόμενες λογικές μορφές ξέρουμε ότι είναι ταυτολογίες**

$$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee \neg q))$$

**Επομένως βλέπουμε ότι μέσω των $\neg$, $\vee$, είναι δυνατόν να εκφράσουμε όλους τους λογικούς συνδέσμους. Λέμε ότι το σύνολο των λογικών συνδέσμων $\{\neg, \vee\}$ είναι πλήρες.**

**Άσκηση. Ποια από τα παρακάτω σύνολα λογικών συνδέσμων είναι πλήρη;**

**α. $\{\neg, \wedge\}$ β. $\{\neg, \rightarrow\}$ γ. $\{\rightarrow, \vee\}$**
**(Απάντηση: Τα α και β είναι, το γ δεν είναι).**

**Έστω τώρα ότι μας δίνουν μια λογική μορφή που περιέχει, ας πούμε, τρία γράμματα p, q και r. Και έστω ότι δεν γνωρίζουμε την ακριβή συντακτική μορφή της, αλλά γνωρίζουμε τον πίνακα αληθείας της. Μπορούμε να τη βρούμε; Η απάντηση είναι μέχρι λογικής ισοδυναμίας, δηλαδή μπορούμε να βρούμε μια λογική μορφή που είναι λογικά ισοδύναμη με αυτήν. Υπάρχει μάλιστα και συστηματική μέθοδος για να το επιτύχουμε αυτό:**

**Βρίσκουμε όλα τα Α στην τελική στήλη του πίνακα της λογικής μορφής. Για κάθε τέτοιο Α σχηματίζουμε μια σύζευξη που οι συνιστώσες της είναι τα γράμματα p, q r ή οι αρνήσεις τους ανάλογα με το αν στη γραμμή (κατάσταση) στην οποία βρισκόμαστε το γράμμα αυτό αληθεύει ή όχι. Η λογική μορφή που αναζητούμε δεν είναι παρά η διάζευξη όλων των συζεύξεων που σχηματίσαμε για όλες τις γραμμές με Α στη τελική στήλη (άσκηση: γιατί;)**

**Ας δούμε ένα παράδειγμα.**

**<u>Παράδειγμα</u>.**

| p | q | r | @ |
|---|---|---|---|
| Α | Α | Α | Α |
| Α | Ψ | Α | Α |
| Ψ | Α | Α | Α |
| Ψ | Ψ | Α | Ψ |
| Α | Α | Ψ | Α |
| Α | Ψ | Ψ | Ψ |
| Ψ | Α | Ψ | Ψ |
| Ψ | Ψ | Ψ | Ψ |

**Έχουμε: <u>πρώτη γραμμή</u>: $p\wedge q\wedge r$, <u>δεύτερη γραμμή</u>: $p\wedge\neg q\wedge r$, <u>τρίτη γραμμή</u>: $\neg p\wedge q\wedge r$, <u>τέταρτη γραμμή</u>: $\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$**

**Σχηματίζουμε τη διάζευξή τους**

**$(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(\neg p\wedge q\wedge r)\vee(\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r)$**

**και αυτή είναι η λογική μορφή που αναζητούμε. (<u>Άσκηση</u>: Γράψτε τον πίνακα αληθείας της για να πειστείτε ότι όντως αυτή η μορφή αντιστοιχεί στον παραπάνω πίνακα).**

**4. Η σημασιακή και συντακτική προσέγγιση της προτασιακής λογικής**

**Ένα σύνολο προτάσεων Χ λέγεται σημασιακά συνεπές αν και μόνον αν υπάρχει κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προτάσεις του. Αλλιώς θα λέγεται σημασιακά ασυνεπές, οπόταν και θα γράφουμε $X \models$.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Το σύνολο $\{p, p \rightarrow q, \neg q\}$ είναι σημασιακά ασυνεπές. Πράγματι αν υπήρχε κατάσταση στην οποία αλήθευαν όλες οι προτάσεις του τότε σε αυτή θα αλήθευε τόσο η q όσο και η $\neg q$. Άτοπο.**

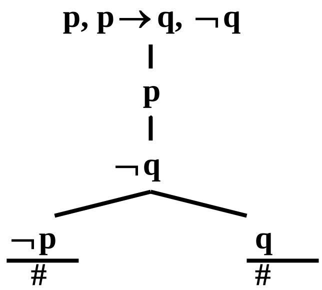
**Έστω Χ ένα σύνολο προτάσεων και έστω φ πρόταση. Θα λέμε ότι η φ είναι λογικό επακόλουθο του Χ αν και μόνον αν κάθε κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προτάσεις του Χ είναι κατάσταση στην οποία αληθεύει και η φ, ή ισοδύναμα αν δεν υπάρχει κατάσταση στην οποία αληθεύουν όλες οι προτάσεις του Χ και η φ είναι ψευδής σε αυτήν. Εάν η φ είναι λογικό επακόλουθο του Χ γράφουμε $X \models \varphi$.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Το συμπέρασμα ενός έγκυρου επιχειρήματος είναι λογικό επακόλουθο των προκειμένων του.**

**Προφανώς (γιατί;): 1. $X \models \varphi$ αν και μόνον αν $X, \neg\varphi \models$ και 2. $\models \varphi$ αν και μόνον αν η φ είναι ταυτολογία.**

**Έστω Χ σύνολο προτάσεων. Θα λέμε ότι το σύνολο αυτό είναι συντακτικά ασυνεπές (μη συνεπές) αν και μόνον αν με βάση το σύνολο Χ και μέσω των κανόνων ανάπτυξης των δένδρων που ξέρουμε είναι δυνατόν να σχηματίσουμε ένα δένδρο που όλα τα κλαδιά σπάζουν. Θα λέμε ότι η φ είναι συντακτικό επακόλουθο του Χ ($X \vdash \varphi$) εάν και μόνον εάν το σύνολο των προτάσεων $X, \neg\varphi$ είναι συντακτικά ασυνεπές. Ειδικότερα αν $\vdash \varphi$ (Χ κενό), τότε ο φ λέγεται συντακτικό θεώρημα.**

**<u>Παράδειγμα</u>. $p, p \rightarrow q \vdash q$ (modus ponens). Πράγματι,**

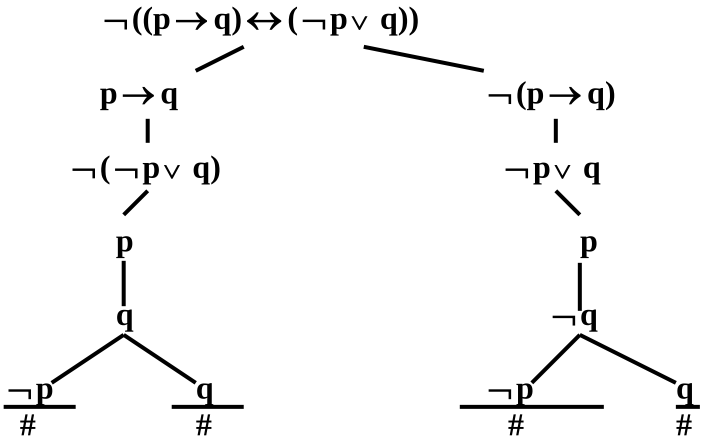



**<u>Παράδειγμα</u>. Το συμπέρασμα ενός έγκυρου επιχειρήματος είναι συντακτικό επακόλουθο του X βάσει της μεθόδου των δένδρων με την οποία μάθαμε την εγκυρότητα των επιχειρημάτων.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Η ταυτολογία**

$$(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$$

**είναι και συντακτικό θεώρημα. Πράγματι,**




**Είναι τυχαίο αυτό; Όχι. Ισχύει το εξής βασικό θεώρημα πληρότητας**

**<u>Θεώρημα</u>. Έστω X σύνολο προτάσεων και έστω φ πρόταση. Τότε,**

$$X\models\varphi \text{ αν και μόνον αν } X\vdash\varphi.$$

**5. Συλλογισμοί**

<u>Παράδειγμα</u>. **Όλοι οι άνθρωποι κατανοούν την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού. Όλες οι φοιτήτριες του Π.Τ.Δ.Ε είναι άνθρωποι. Άρα όλες οι φοιτήτριες του Π.Τ.Δ.Ε κατανοούν την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού.**

**Είναι το επιχείρημα αυτό έγκυρο; Φυσικά και είναι (γιατί;).**
**Μπορείτε να το μελετήσετε με τη βοήθεια της τεχνικής των δένδρων που έχουμε δει;**
**(Όχι).**

**Πράγματι η εγκυρότητα του παραπάνω επιχειρήματος εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίον το υποκείμενο και το κατηγόρημα σχετίζονται *μέσα* στις προκείμενες και το συμπέρασμα. Εμείς ως τώρα δεν προχωρούσαμε την ανάλυσή μας πιο κάτω από το επίπεδο της πρότασης. Είναι επομένως ανάγκη να μελετήσουμε από λογική σκοπιά και τον τρόπο που συγκροτούνται οι προτάσεις από απλούστερους γραμματικούς όρους.**

**Το επιχείρημα του παραπάνω παραδείγματος ανήκει σε μια ιδιαίτερη κατηγορία επιχειρημάτων που λέγονται <u>συλλογισμοί</u>. Τους συλλογισμούς πρωτομελέτησε συστηματικά ο Αριστοτέλης (384-322).**

**<u>Συλλογισμός</u> είναι ένα είδος επιχειρήματος που**

**α) έχει μόνον δύο προκείμενες**
**β) τόσο αυτές όσο και το συμπέρασμα ανήκουν σε μια από τις παρακάτω μορφές:**

**ΥΑΚ (Όλα τα Υ έχουν την ιδιότητα/είναι Κ): γενικές καταφατικές**
**ΥΙΚ (Μερικά Υ έχουν την ιδιότητα/είναι Κ): μερικές καταφατικές**
**ΥΕΚ (Όλα τα Υ δεν έχουν την ιδιότητα/δεν είναι Κ): γενικές αποφατικές**
**ΥΟΚ (Μερικά Υ δεν έχουν την ιδιότητα/δεν είναι Κ): μερικές αποφατικές**

**Στο παράδειγμά μας όλες οι προτάσεις είναι της μορφής ΥΑΚ.**

Άσκηση. Δώστε ένα παράδειγμα για καθεμία από τις παραπάνω μορφές.

Βάσει της παραπάνω ταξινόμησης κάθε συλλογισμός ανήκει σε έναν τρόπο, λ.χ αυτός του παραδείγματος ανήκει στον τρόπο Α, Α, Α (προκείμενες και συμπέρασμα είναι γενικές καταφατικές προτάσεις). Προφανώς υπάρχουν συνολικά 64 τρόποι.

γ) στις δύο προκείμενες υπάρχει ένα κοινός όρος Μ που λέγεται μέσος και μπορεί να είναι υποκείμενο της πρώτης προκείμενης και κατηγόρημα της δεύτερης (πρώτο σχήμα) ή κατηγόρημα τόσο της πρώτης όσο και της δεύτερης προκείμενης (δεύτερο σχήμα) ή υποκείμενο τόσο της πρώτης όσο και της δεύτερης προκείμενης (τρίτο σχήμα) ή κατηγόρημα της πρώτης και υποκείμενο της δεύτερης προκείμενης (τέταρτο σχήμα). Ο μέσος όρος δεν εμφανίζεται στο συμπέρασμα, η προκείμενη που περιέχει το κατηγόρημα του συμπεράσματος λέγεται μείζων (και στη συνέχεια γράφεται πρώτη), ενώ η προκείμενη που περιέχει το υποκείμενο του συμπεράσματος λέγεται ελάσσων (και στη συνέχεια γράφεται δεύτερη). Όλοι οι όροι εμφανίζονται ακριβώς δύο φορές. Άρα έχουμε τα εξής σχήματα:

| 1ο σχήμα | | 2ο σχήμα | | 3ο σχήμα | | 4ο σχήμα | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Μ | Κ | Κ | Μ | Μ | Κ | Κ | Μ |
| Υ | Μ | Υ | Μ | Μ | Υ | Μ | Υ |
| Υ | Κ | Υ | Κ | Υ | Κ | Υ | Κ |

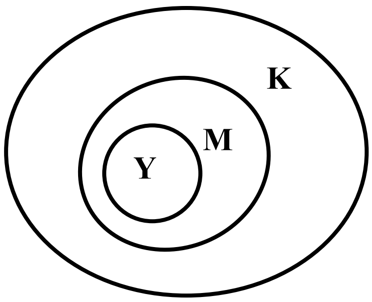
Άρα ο συνολικός αριθμός των συλλογισμών είναι 256 (4 επί 16). Ωστόσο δεν είναι όλοι έγκυροι. Στο πρώτο σχήμα λόγου χάρη υπάρχουν τέσσερεις έγκυροι τρόποι.

Οι Α, Α, Α (γράμματα)· Ε,Α,Ε (έγραψε)· Α, Ι, Ι (γραφίδι)· Ε, Ι, Ο(τεχνικός).

Μια τεχνική για να δείξουμε την εγκυρότητα ή την ακυρότητα ενός συλλογισμού είναι αυτή των διαγραμμάτων του Venn ενός μαθηματικού που έζησε τον $19^o$ αιώνα.

Παράδειγμα. Ας δούμε γιατί ο τρόπος Α, Α, Α στο πρώτο σχήμα είναι έγκυρος.

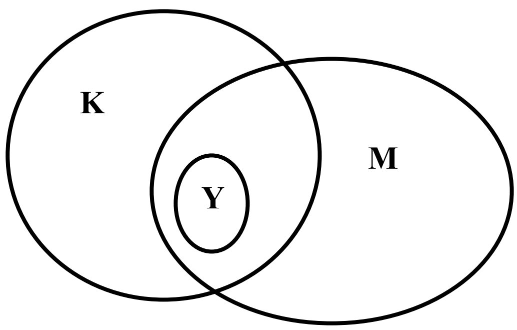
**Η μείζων προκείμενη είναι της μορφής: Όλα τα Μ είναι Κ. Η ελάσσων είναι της μορφής Όλα τα Υ είναι Μ. Συμβολικά μπορούμε να αναπαραστήσουμε τη σχέση μεταξύ των Υ, Μ και Κ με τρεις κύκλους που ο ένας είναι μέσα στον άλλον (αφού σε συνολθεωρητική γλώσσα το σύνολο των Μ είναι υποσύνολο του συνόλου των Κ και το σύνολο των Υ είναι υποσύνολο του συνόλου των Μ).**




**Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι όντως Όλα τα Υ είναι Κ, και άρα το επιχείρημα είναι έγκυρο.**

**Άσκηση. Δείξτε ότι και οι άλλοι τρεις τρόποι στο πρώτο σχήμα έγραψε, γραφίδι, τεχνικός είναι έγκυροι.**

**Παράδειγμα. Ας δούμε γιατί ο τρόπος Ο, Α, Ο στο πρώτο σχήμα δεν είναι έγκυρος.**
**Η μείζων προκείμενη είναι της μορφής Μερικά Μ δεν είναι Κ. Η ελάσσων είναι της μορφής Όλα τα Υ είναι Μ. Ισχύει αναγκαστικά το συμπέρασμα, ότι δηλαδή Μερικά Υ δεν είναι Κ; Όχι. Να ένα διάγραμμα του Venn στο οποίο ικανοποιούνται οι δύο προκείμενες, αλλά όχι και το συμπέρασμα, οπότε ο συλλογισμός αυτός είναι άκυρος.**




**Άσκηση. Βρείτε έναν έγκυρο και έναν άκυρο συλλογισμό σε κάθε σχήμα.**

## 6. Η λογική των σχέσεων

Ας γυρίσουμε στο αρχικό παράδειγμα του προηγούμενου μέρους και ας αναλύσουμε συντακτικά την πρώτη πρόταση Όλοι οι άνθρωποι κατανοούν την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού. Το υποκείμενό της είναι Όλοι οι άνθρωποι και το κατηγόρημά της κατανοούν την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού. Στο κατηγόρημα διακρίνουμε το ρήμα –κατανοούν- και το αντικείμενο -την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού. Η ανάλυση αυτή είναι η κλασική συντακτική ανάλυση.

Ωστόσο η μοντέρνα λογική βλέπει την πρόταση αυτή και με άλλον τρόπο. Λόγου χάρη στην παραπάνω πρόταση είναι δυνατόν να διακρίνουμε τους παρακάτω τρεις σχεσιακούς τελεστές:
«. . .κατανοούν την αριστοτελική θεωρία του συλλογισμού» (μονομελής)
« Όλοι οι άνθρωποι κατανοούν . . .» (μονομελής)
«...κατανοούν . . .» (διμελής)

Παράδειγμα. Ο Γιώργος φοιτά στο Π.Τ.Δ.Ε.

Στην πρότασή αυτή αναγνωρίζουμε τους παρακάτω τρεις σχεσιακούς τελεστές.

«--- φοιτά στο Π.Τ.Δ.Ε.». «Ο Γιώργος φοιτά στο ----» ή «--- φοιτά στο ---» ή και «x φοιτά στο Π.Τ.Δ.Ε.» ή «Ο Γιώργος φοιτά στο x» ή «x φοιτά στο y» (αντίστοιχα).

Προφανώς οι δύο πρώτοι είναι μονομελείς τελεστές και ο τρίτος είναι διμελής.
Η παύλα (ή η μεταβλητή x) του πρώτου μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε όνομα, του δεύτερου με ονομασία οποιουδήποτε θεσμού που μπορεί να έχει φοιτητές ή φοιτήτριες. Οι παύλες (ή οι μεταβλητές x, y) του τρίτου είναι δυνατόν να αντικατασταθούν με οποιοδήποτε ζεύγος <όνομα, ονομασία ιδρύματος που μπορεί να έχει φοιτητές ή φοιτήτριες>. Δηλαδή οι σχεσιακοί αυτοί τελεστές «παίρνουν» τιμές από ένα σύνολο ονομασιών και «επιστρέφουν» προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. [Φυσικά τα σύνολα απ' όπου παίρνουν τιμές οι τελεστές μπορεί να είναι ακόμη ευρύτερα, λ.χ. οποιοδήποτε όνομα ανθρώπου ή

πράγματος, ή οποιαδήποτε ονομασία ιδρύματος κ.λπ. Συνήθως βέβαια μας ενδιαφέρει το εκάστοτε σύνολο να είναι σχετικό].
Η ανάλυση προτάσεων με αυτόν τον τρόπο προτάθηκε για πρώτη φορά από τον γερμανό μαθηματικό και φιλόσοφο Γκόντλομπ Φρέγκε (Gottlob Frege, 1848-1925) και υπήρξε καθοριστική στην ανάπτυξη της φιλοσοφίας της γλώσσας, της αναλυτικής φιλοσοφίας και της μαθηματικής λογικής.

## 6.1.Τελεστές και σχέσεις.

Τους τελεστές του παραπάνω παραδείγματος ας τους συμβολίσουμε εν συντομία Φ(x), Θ(x) και Ε(x, y), αντίστοιχα.

Αν στη θέση του x στον Φ(x) θέσουμε το όνομα «Γιώργος» (που αναφέρεται σε κάποιον συγκεκριμένο Γιώργο, φοιτητή του Π.Τ.Δ.Ε) η πρόταση που προκύπτει περιγράφει μια κατάσταση που ισχύει. Λέμε ότι ο Γιώργος ικανοποιεί τον τελεστή. Το ίδιο κι αν θέσουμε το όνομα «Όλγα» (που αναφέρεται σε κάποια συγκεκριμένη Όλγα, φοιτήτρια του Π.Τ.Δ.Ε) Αν θέσουμε το όνομα «Κώστας Χ.» και μ' αυτό εννοούμε εμένα, τον διδάσκοντα, τότε προφανώς ο τελεστής δεν ικανοποιείται. Στο πεδίο των ανδρών ή των ελλήνων φοιτητών ή των ανθρώπινων όντων ο σχεσιακός τελεστής Φ(x) ορίζει μια μονομελή σχέση, ένα υποσύνολο. Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε με τον τελεστή Θ(x). Επίσης ο τελεστής Ε(x, y) ορίζει μία διμελή σχέση στο υπό συζήτηση πεδίο. Στη διμελή αυτή σχέση βρίσκονται («ανήκουν») τα ζεύγη <Όλγα, Π.Τ.Δ.Ε>, <Γιώργος, Π.Τ.Δ.Ε>, αλλά όχι τα <Κώστας Χ., Π.Τ.Δ.Ε> ή <Όλγα, Τ.Ε.Ι. Λάρισας>.
<u>Τα υπό συζήτηση πεδία θεωρούμε πάντοτε ότι είναι μη κενά (έχουν δηλαδή τουλάχιστον ένα στοιχείο).</u>

## 6.2. Ποσοδείκτες

Οι σχεσιακοί τελεστές μπορούν να μας δώσουν προτάσεις της ελληνικής και με άλλους τρόπους. Ας δούμε πώς.

Μπροστά από τον σχεσιακό τελεστή Φ(x) μπορούμε να βάλουμε τη φράση «Για κάθε x». Παίρνουμε τότε την ελληνική φράση «Για κάθε x Φ(x)», δηλ. «Για κάθε x (x φοιτά στο Π.Τ.Δ.Ε.)», που δηλώνει ότι Όλοι/ες φοιτούν στο Π.Τ.Δ.Ε.

**Η συμβολική γραφή αυτής της νέας φράσης που (παρατηρήστε!) δεν είναι πια «ανοιχτή», αλλά μια κανονική πρόταση της νέας ελληνικής γλώσσας, είναι η $\forall x \Phi(x)$ Λέμε ότι δεσμεύσαμε την ελεύθερη μεταβλητή x με τον καθολικό ποσοδείκτη $\forall$.**

**Μπροστά από τον σχεσιακό τελεστή Φ(x) μπορούμε να βάλουμε τη φράση «Υπάρχει x». Παίρνουμε τότε την ελληνική φράση «Υπάρχει x Φ(x)», δηλ. «Υπάρχει x (x φοιτά στο Π.Τ.Δ.Ε.)», που δηλώνει ότι το Π.Τ.Δ.Ε. έχει τουλάχιστον έναν φοιτητή (ή φοιτήτρια).**

**Η συμβολική γραφή αυτής της νέας φράσης που επίσης (παρατηρήστε!) δεν είναι πια «ανοιχτή», αλλά μια κανονική πρόταση της νέας ελληνικής γλώσσας, είναι η $\exists x \Phi(x)$ Λέμε ότι δεσμεύσαμε την ελεύθερη μεταβλητή x με τον υπαρκτικό ποσοδείκτη $\exists$ .**

**Στην περίπτωση του τελεστή E(x,y) βέβαια απαιτούνται δύο ποσοδείκτες για να πάρουμε πρόταση της ελληνικής γλώσσας. Θέτοντας μόνον έναν μπροστά του παίρνουμε έναν νέο μονομελή τελεστή.**

**Οι τρεις παραπάνω τρόποι να κλείσουμε μιαν ανοικτή φράση είναι οι μόνοι που επιτρέπονται.**

**<u>Άσκηση</u> Γράψτε ελληνικές προτάσεις που να αντιστοιχούν στα $\forall x \exists y E(x,y)$, $\exists x \forall y E(x,y)$, $\forall x \forall y E(x,y)$, $\exists x \exists y E(x,y)$. Στο υπονοούμενο πεδίο όλα τα ζεύγη είναι της μορφής <φοιτητής ή φοιτήτρια, εκπαιδευτικό ίδρυμα> ποιες από τις παραπάνω προτάσεις περιγράφουν καταστάσεις που ισχύουν;**

**<u>Άσκηση</u> Είναι «ισοδύναμες» (δηλαδή δηλώνουν το ίδιο πράγμα σε όλα τα δυνατά πεδία) οι προτάσεις $\forall x \forall y E(x,y)$ και $\forall y \forall x E(x,y)$; Οι προτάσεις $\exists x \exists y E(x,y)$ και $\exists y \exists x E(x,y)$; Τι λέτε για τις $\exists x \forall y E(x,y)$ και $\forall y \exists x E(x,y)$;**

**Ο καθολικός και ο υπαρκτικός ποσοδείκτης σχετίζονται με έναν απλό αλλά βασικό τρόπο. Φανταστείτε ότι κάποια ισχυρίζεται ότι όλοι οι άνδρες είναι «γουρούνια». Δηλαδή, ισχυρίζεται ότι στο πεδίο των ανδρών ισχύει η πρόταση: $\forall x$ Γου(x). Πώς μπορεί να τη διαψεύσει κάποιος; Δείχνοντας απλά έναν άνδρα που δεν είναι «γουρούνι» και λέγοντας, να υπάρχει ένας άνδρας που**

**δεν είναι «γουρούνι», δηλ. $\exists x \neg$Γου(x). Επομένως η $\neg\forall x$Γου(x) ισοδυναμεί με την $\exists x \neg$Γου(x).**

**Αν όμως κάποιος ισχυριστεί ότι υπάρχουν πράσινα άλογα, για να τον πείσω ότι σφάλει –αν είναι ιδιαίτερα ισχυρογνώμων- πρέπει να του αποδείξω κάτι δύσκολο, ότι όλα τα άλογα δεν είναι πράσινα, δηλ. η $\neg\exists x$Πρ(x) ισοδυναμεί με την $\forall x \neg$Πρ(x).**

**Ένας βασικός διμελής τελεστής είναι η «ταυτότητα/ισότητα». Σύμβολο = . [Ειδικά γι' αυτόν γράφουμε x = y και όχι «= (x, y)».**

**Με τη βοήθεια των σχεσιακών τελεστών, των ποσοδεικτών και των λογικών συνδέσμων ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$)μπορούμε να γράψουμε συμβολικά πολλές προτάσεις της ελληνικής γλώσσας. Κατά τη μεταγραφή σε συμβολική γλώσσα και κατά την ανάστροφη ανάγνωση της αντίστοιχης ελληνικής φράσης, όταν δίνεται μια συμβολική φράση και μια ερμηνεία των εμπλεκόμενων σχεσιακών τελεστών, πρέπει να προσέχουμε ιδιαίτερα. Εδώ θα επιχειρήσουμε να μάθουμε να μεταγράφουμε ελληνικές φράσεις σε συμβολικές και αντίστροφα μέσω παραδειγμάτων.**

**<u>Παράδειγμα (Άσκηση)</u>. Έστω οι σχεσιακοί τελεστές Ε(x,y), Α(x), Γ(x), που στο πεδίο φοιτητών/φοιτητριών του Π.Τ.Δ.Ε ερμηνεύονται αντίστοιχα:**
**---γουστάρει--- , ---είναι άνδρας, ---είναι γυναίκα. (Επομένως, ο Ε(x,y) ικανοποιείται από το ζεύγη <Δήμος, Μαρία> ανν ο Δήμος γουστάρει τη Μαρία, ενώ δεν ικανοποιείται ανν και μόνον αν ο Γιάννης δεν γουστάρει τον Κώστα. Η Μαρία ικανοποιεί τον Γ(x) αλλά όχι τον Α(x) κ.ο.κ.).**
**Γράψτε συμβολικά τις φράσεις:**
**Ο Δήμος γουστάρει τη Μαρία, αλλά εκείνη γουστάρει μόνον τη Γιάννα.**
**(Λύση: Χρησιμοποιούμε και τον σχεσιακό τελεστή =. Η φράση *Ο Δήμος γουστάρει τη Μαρία* αποδίδεται εύκολα με τη συμβολική φράση Ε(Δήμος, Μαρία). Επίσης η φράση *Εκείνη* [δηλ. η Μαρία] *γουστάρει τη Γιάννα* αποδίδεται με την Ε(Μαρία, Γιάννα). Πώς θα δηλώσουμε όμως το *μόνον*; Η ιδέα είναι να περιγράψουμε το γεγονός ότι η Μαρία δεν επιθυμεί κανέναν άλλον φοιτητή και καμία άλλη φοιτήτρια. Επομένως:**

**Εάν η Μαρία επιθυμεί τον άνθρωπο x, τότε ο x είναι η Γιάννα, δηλ.,**

**Εάν Ε(Μαρία, x) τότε x = Γιάννα, δηλ.,**

**Ε(Μαρία, x) $\rightarrow$ x = Γιάννα. Αυτό συμβαίνει για όλους τους ανθρώπους άρα**

**$\forall$x (Ε(Μαρία, x) $\rightarrow$ x = Γιάννα).)**

**Η Γιάννα δεν γουστάρει γυναίκες.**

**Ο Δήμος έχει αποκλειστικά ετερόφυλα γούστα.**

**Η Μαρία έχει αποκλειστικά ομοφυλόφυλα γούστα.**

**Υπάρχουν δύο φοιτητές που αλληλογουστάρονται.**

**Μόνον ο Γιώργος γουστάρει τη Γιάννα.**

**Δεν υπάρχει φοιτήτρια που να γουστάρει τη Γιάννα.**

**Υπάρχουν τουλάχιστον τρεις φοιτήτριες τις οποίες γουστάρει ο Δημήτρης, αλλά υπάρχουν το πολύ δύο που να τον γουστάρουν.**

## 6.3. Εγκυρότητα/συνέπεια

**Θα θέλαμε να έχουμε κάποια μέθοδο παρόμοια με τη μέθοδο των για την προτασιακή λογική με την οποία να μπορούμε να ελέγξουμε τη συνέπεια ή μη οποιουδήποτε συνόλου προτάσεων και την εγκυρότητα ή μη οποιουδήποτε επιχειρήματος σε περιπτώσεις που η συνέπεια ή η εγκυρότητα εξαρτώνται από τον τρόπο που σχετίζονται κατηγορήματα και υποκείμενα μέσα στις προκείμενες και το συμπέρασμα. Δυστυχώς το 1936 ο Alonzo Church απέδειξε ότι μία τόσο γενική μέθοδος δεν μπορεί να υπάρξει. Ωστόσο χρησιμοποιώντας ανάλογη μέθοδο με τη μέθοδο των δένδρων μπορούμε να δείξουμε τη συνέπεια ή μη συνέπεια πολλών συνόλων προτάσεων και επομένως την εγκυρότητα ή μη πολλών επιχειρημάτων.**

**Για να κατανοήσουμε τη μέθοδο χωρίς να μπούμε σε πολλές τεχνικές λεπτομέρειες ας δούμε μερικά παραδείγματα.**

**<u>Παράδειγμα</u> Έστω το σύνολο Ε που αποτελείται από τις παρακάτω δύο προτάσεις:**

**Η Γερτρούδη μου αρέσει. $\forall$x(x δεν μου αρέσει)**

**Σχηματίζουμε το ακόλουθο δένδρο (πώς;)**

Η Γερτρούδη μου αρέσει. $\forall x$(x δεν μου αρέσει)

Η Γερτρούδη δεν μου αρέσει.

#

Άρα το σύνολο από το οποίο ξεκινήσαμε είναι μη συνεπές.

<u>Παράδειγμα</u> Κάποιος θα πληρώσει όλες τις ζημιές. Επομένως κάθε ζημιά θα πληρωθεί από κάποιον.

Βήμα 1ον : Γράψε σε συμβολική γλώσσα.

Π(x, y) : x πληρώνει y.

Α(x) : x είναι άνθρωπος

Ζ(x) : x είναι ζημιά

Τότε έχουμε: $\dfrac{\exists x(A(x) \wedge \forall y(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))}{\forall x(Z(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \Pi(y, x)))}$

Παίρνουμε το σύνολο αντιπαραδείγματος:

$$\exists x(A(x) \wedge \forall y(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y)),\ \neg(\forall x(Z(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \Pi(y, x))))$$

δηλ. το $\exists x\neg(Z(x) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \Pi(y, x)))$, $\exists x(A(x) \wedge \forall y(Z(y) \rightarrow \Pi(x,y))$

$\neg(Z(a) \rightarrow \exists y(A(y) \wedge \Pi(y, a)))$

$Z(a)$

$\forall y\neg(A(y) \wedge \Pi(y,a))$

$A(b)$

$\forall y(Z(y) \rightarrow \Pi(b, y))$

$Z(a) \rightarrow \Pi(b, a)$

$\neg \underline{Z(a)}$ $\quad$ $\Pi(b, a)$

\# $\quad$ $\neg(A(b) \wedge \Pi(b, a))$

$\neg \underline{A(b)}$ $\quad$ $\neg \underline{\Pi(b,a)}$

\# $\quad$ #

<u>Παράδειγμα</u> Είναι έγκυρο το επιχείρημα

$\dfrac{\forall x((F(x) \rightarrow G(x)) \quad \forall x G(x)}{F(a)}$ ;

Σύνολο αντεπιχειρήματος: $\forall x((F(x) \rightarrow G(x))$ $\quad \forall x G(x)$ $\quad \neg F(a)$

**G(a)**

**F(a) $\rightarrow$ G(a)**

**$\neg$<u>F(a)</u>** **<u>G(a)</u>**

**Δεν σπάζει κανένα κλαδί! Διαβάζοντας ένα άσπαστο κλαδί όμως δεν παίρνουμε αμέσως μία κατάσταση όπου οι προκείμενες αληθεύουν και το συμπέρασμα όχι, όπως γινόταν στον προτασιακό λογισμό. Ωστόσο πάλι με τη βοήθεια του δένδρου μπορούμε να βρούμε κατάσταση τέτοια. Λόγου χάρη, αν είμαστε σε ένα πεδίο με ένα μόνον στοιχείο το a για το οποίο G(a) και $\neg$F(a) τότε στο πλαίσιο αυτό οι προκείμενες αληθεύουν αλλά το συμπέρασμα όχι. Το επιχείρημα επομένως δεν είναι έγκυρο.**

**Από τα παραπάνω παραδείγματα κατανοούμε ότι για τον σχηματισμό των δένδρων διατηρούμε όλους τους κανόνες που είδαμε στον προτασιακό λογισμό. Ας διατυπώσουμε ρητά και τους κανόνες για τον υπαρκτικό και τον καθολικό ποσοδείκτη, καθώς και για την ισότητα:**

**Ο κανόνας για τον <u>υπαρκτικό ποσοδείκτη</u> είναι ο εξής:**

**Ένα κλαδί όπου υπάρχει η πρόταση $\exists x\varphi$ συνεχίζεται με την πρόταση φ(a) όπου a όνομα που δεν υπάρχει πουθενά στο κλαδί όπου εργαζόμαστε. Η $\exists x\varphi$ δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ξανά.**

**Ο κανόνας για τον <u>καθολικό ποσοδείκτη</u> είναι ο εξής:**

**Ένα κλαδί όπου υπάρχει η πρόταση $\forall y\varphi$ συνεχίζεται με την πρόταση φ(b), όπου b τυχόν όνομα που υπάρχει στο κλαδί που εργαζόμαστε. Αν στο κλαδί που εργαζόμαστε δεν αναφέρεται κανένα όνομα, τότε (και μόνον τότε) μπορούμε να συνεχίσουμε με την πρόταση φ(c) όπου c τελείως «φρέσκο» όνομα.**

**Κανόνας για την άρνηση του υπαρκτικού και την άρνηση του καθολικού ποσοδείκτη:**

**Κλαδί όπου υπάρχει η πρόταση $\neg\exists x\varphi$ συνεχίζεται με την πρόταση $\forall x\neg\varphi$ και κλαδί που περιέχει την $\neg\forall y\varphi$ συνεχίζεται με την $\exists y\neg\varphi$. (Ούτε η $\neg\exists x\varphi$ ούτε η $\neg\forall y\varphi$ χρησιμοποιούνται ξανά.)**

**Τέλος, είναι λογικό κλαδί που περιέχει την φ (που περιέχει το όνομα a) και την a = b να μπορεί να συνεχιστεί με την ψ που προκύπτει από τη φ με την αντικατάσταση ενός a ή όλων των a της φ με b.**

**<u>Άσκηση</u> Είναι συνεπές το ακόλουθο «σενάριο»;**

**Η Ακριβούλα Πλουτίδου γράφηκε στον φοιτητικό σύλλογο πρόπερσι. Πέρσι, στην ετήσια εκδρομή του συλλόγου, στην οποία και ή ίδια συμμετείχε, έκανε τα έξοδα όλων εκείνων των μελών του συλλόγου που δεν τα έκαναν μόνοι τους.**

**<u>Άσκηση</u> Τι μπορείτε να πείτε για την εγκυρότητα του επιχειρήματος**

$$\frac{\forall x \exists y L(x, y)}{L(a,a)} \qquad ;$$

**<u>Άσκηση</u> α. Δείξτε ότι το επιχείρημα** $\dfrac{\exists x \forall y E(x, y)}{\forall y \exists x E(x, y)}$ **είναι έγκυρο.**

**β. Δείξτε ότι το επιχείρημα** $\dfrac{\forall y \exists x E(x, y)}{\exists x \forall y E(x, y)}$ **δεν είναι έγκυρο.**

**<u>Άσκηση</u>**

**Δεν έχω αδελφό δεν έχω αδελφή**
**Μα κείνου του άντρα ο πατέρας είν' του πατέρα μου παιδί**
**Άρα κείνος εκεί ο άντρας ειν' το δικό μου το παιδί.**
**Είναι έγκυρο το επιχείρημα του παιδικού αυτού αινίγματος;**

**<u>Παράδειγμα (Άσκηση)</u> Όπως είδαμε οι προκείμενες και το συμπέρασμα ενός συλλογισμού έχουν μια από τις παρακάτω μορφές:**

**Όλα τα P είναι Q**
**Μερικά P είναι Q**
**Κανένα P δεν είναι Q**
**Μερικά P δεν είναι Q**

**Γράψτε τις προτάσεις αυτές συμβολικά εάν P(x) είναι τελεστής που ικανοποιείται ακριβώς από εκείνα τα x που έχουν την ιδιότητα P και Q(x) τελεστής που ικανοποιείται ακριβώς από εκείνα τα x που έχουν την ιδιότητα Q.**

**Εξετάστε με τη μέθοδο των δένδρων την εγκυρότητα των παρακάτω συλλογισμών:**

**Μερικοί παπαγάλοι μιλούν.**
**Οτιδήποτε ομιλεί είναι άνθρωπος.**
**Άρα μερικοί άνθρωποι δεν είναι παπαγάλοι.**

**Μερικοί παπαγάλοι μιλούν.**
**Οτιδήποτε ομιλεί είναι άνθρωπος.**
**Άρα μερικοί παπαγάλοι είναι άνθρωποι.**

## 7. Επαγωγική Λογική

**Η μορφή του λογικά έγκυρου επιχειρήματος με την οποία ασχοληθήκαμε ως τώρα είναι πολύ αυστηρή. Το συμπέρασμα ισχύει αναγκαστικά εφόσον ισχύουν οι προκείμενες, κατά κάποιο τρόπο παράγεται από αυτές. Η λογική που τα διέπει είναι παραγωγική. Στα περισσότερα επιχειρήματα που χρησιμοποιούμε το συμπέρασμα δεν είναι λογικά αναγκαίο αλλά πιθανό βάσει των προκείμενων. Τα επιχειρήματα τέτοιου τύπου ανήκουν στον χώρο της επαγωγικής λογικής και πολλοί ειδικοί της Λογικής επιχείρησαν να χαρακτηρίσουν την εγκυρότητα ενός επιχειρήματος μετρώντας την πιθανότητα του συμπεράσματος, δεδομένων των συνθηκών που περιγράφονται στις προκείμενες. Σε μια τέτοια οπτική, η πιθανότητα του συμπεράσματος ενός λογικά έγκυρου επιχειρήματος είναι 1.**

**Ας δούμε μερικά από τα είδη των μη παραγωγικών επιχειρημάτων που χρησιμοποιούμε συχνά.**

### 7.1. <u>Ο στατιστικός συλλογισμός</u>.

**Μετά τη συγκρότηση και την εξάπλωση της στατιστικής επιστήμης ένας πολύ χαρακτηριστικός τύπος επιχειρήματος είναι ο στατιστικός συλλογισμός. Σε αυτόν οι προκείμενες στηρίζουν το συμπέρασμα για στατιστικο-μαθηματικούς λόγους.**

**<u>Παράδειγμα.</u> Τα 95% των αθηναϊκών νοικοκυριών έχουν τηλεόραση. Η οικογένεια Χωραφά ζεί στην Αθήνα. Άρα η οικογένεια Χωραφά έχει τηλεόραση.**

**Φυσικά η οικογένεια Χωραφά μπορεί τελικά να ανήκει στο 5% που δεν έχει τηλεόραση, αλλά το ποσοστό 95% είναι τόσο υψηλό που μας επιτρέπει να διατυπώσουμε με σχετική βεβαιότητα το παραπάνω συμπέρασμα.**

**Γενικά η μορφή του στατιστικού συλλογισμού είναι η εξής:**
**Ν% των Υ είναι Κ.**
**Χ είναι Υ.**
**Άρα Χ είναι Κ.**
**Προφανώς το συμπέρασμα ενός στατιστικού συλλογισμού σαν τον παραπάνω είναι τόσο πιο ασφαλές όσο πιο μεγάλο είναι το ποσοστό Ν. Αν το Ν είναι μικρότερο από το 50, τότε το επιχείρημα παίρνει τη μορφή**

**Ν% των Υ είναι Κ.**

**Χ είναι Υ.**

**Άρα Χ δεν είναι Κ.**

**Τώρα, το συμπέρασμα γίνεται ασφαλέστερο καθώς το Ν μικραίνει.**

**Πολλές φορές ένας συλλογισμός είναι στατιστικός χωρίς να αναφέρεται άμεσα σε ποσοστά.**

**Παράδειγμα. Οι διαγνώσεις του παθολόγου μου είναι σχεδόν πάντα σωστές. Προχθές διέγνωσε ότι η Άννα έχει οισοφαγίτιδα. Άρα η Άννα έχει οισοφαγίτιδα.**

**Εφόσον με το σχεδόν πάντα εννοείται ένα όντως υψηλό ποσοστό, το συμπέρασμα είναι αρκούντως πιστευτό. Υπάρχει βέβαια ο κίνδυνος η πρώτη προκείμενη να εκφράζει απλώς μια φήμη που να μη στηρίζεται στον αριθμό των ορθών διαγνώσεων του παθολόγου, οπότε δεν δικαιολογείται καθόλου η βεβαιότητα του συμπεράσματος. Σε αυτήν την περίπτωση μάλιστα το επιχείρημά μας είναι ένα αρκετά συνηθισμένο ψευδοεπιχείρημα, *η επίκληση της αυθεντίας*.**

**7.2. Η στατιστική γενίκευση.**

**Ένα άλλο είδος στατιστικού επιχειρήματος είναι η στατιστική γενίκευση. Με αυτό βάσει του τι συμβαίνει σε ένα *τυχαίο δείγμα* ενός πληθυσμού καταλήγουμε σε ένα πιθανοκρατούμενο συμπέρασμα για το τι συμβαίνει σε όλο τον πληθυσμό.**

**Παράδειγμα. Από τους 1000 λαμπτήρες που ελέγχθηκαν πριν τη συσκευασία τους σε ένα εργοστάσιο τον περασμένο χρόνο λιγότεροι από 1% ήταν ελαττωματικοί. Άρα μόνον ένα μικρό ποσοστό των λαμπτήρων που κατασκευάστηκαν στο εργοστάσιο αυτό το ν περασμένο χρόνο ήταν ελαττωματικοί.**

**Η μορφή αυτών των επιχειρημάτων είναι η εξής:**

**Ν% από τυχαία επιλεγμένο δείγμα των Υ είναι Κ.**

**Περίπου Ν% των Υ είναι Κ.**

**Δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε ότι η ορθότητα του επιχειρήματός μας εδώ εξαρτάται από την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος. Προφανώς είναι καλά**

**το δείγμα να είναι μεγάλο και όντως τυχαίο. Λόγου χάρη, το επιχείρημα του επόμενου παραδείγματος είναι ασθενές.**

**Παράδειγμα. Μίλησα με τρεις φοιτήτριες που ξέρω και πήραν πέρυσι το μάθημα της Λογικής. Και οι τρεις πήραν δέκα. Άρα σχεδόν όλη η τάξη πήρε δέκα.**

**Προφανώς ένα δείγμα τριών φοιτητριών είναι πολύ μικρό για μια τάξη που έχει τουλάχιστον πενήντα άτομα. Βέβαια αν το μάθημα ήταν επιλογής και η τάξη είχε μόνον πέντε φοιτητές, τότε το συμπέρασμά μου θα ήταν ασφαλέστερο. Από την άλλη, ούτως οι άλλως, οι τρεις φοιτήτριες δεν είναι τυχαία επιλεγμένες, είναι τρεις φοιτήτριες *που ξέρω*.**

**Η επιστήμη της στατιστικής έχει αναπτύξει κριτήρια για να εξασφαλίσει την αντιπροσωπευτικότητα του δείγματος, αλλά όταν μας παρουσιάζεται μια στατιστική γενίκευση πρέπει να είμαστε προσεκτικοί. Μπορεί τα κριτήρια να μην έχουν ακολουθηθεί, συνειδητά ή από άγνοια.**

**7.3. Επαγωγική γενίκευση.**

**Τη στατιστική γενίκευση δεν πρέπει να τη συγχέουμε με την επαγωγική γενίκευση που είναι και η τεχνική επιχειρηματολογίας που συναντάμε συχνά στις φυσικές επιστήμες και γι' αυτό κατά καιρούς πολύ θεώρησαν (λανθασμένα) ότι συλλαμβάνει την επιστημονική μέθοδο.**

**Συνήθως έχει την εξής μορφή:**
**Ν% από τα s Υ που μελετήθηκαν ως τώρα είναι Κ.**
**Άρα περίπου Ν% όλων των Υ είναι Κ.**

**Η διαφορά εδώ είναι ότι εδώ η πρόβλεψη δεν στηρίζεται σε ένα τυχαίο δείγμα ενός δεδομένου πληθυσμού, καθώς αυτό δεν μπορεί να συγκροτηθεί, είναι υπό συγκρότηση.**

**Ορισμένες φορές η επαγωγική γενίκευση έχει την παρακάτω μορφή στην οποία αναγνωρίζουμε τους νόμους των φυσικών επιστημών.**
**Όλα τα Υ που μελετήθηκαν ως τώρα είναι Κ.**
**Άρα όλα τα Υ είναι Κ.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Όλα τα σώματα που μελετήθηκαν ως τώρα ασκούν βαρυτική έλξη ανάλογη με τη μάζα τους. Άρα όλα τα σώματα ασκούν βαρυτική έλξη ανάλογη με τη μάζα τους.**

**Μια ισχυρή μορφή επαγωγικής γενίκευσης είναι η απλή ή απαριθμητική επαγωγή:**

**N% από τα s Y που μελετήθηκαν ως τώρα είναι K.**

**Το επόμενο Y που θα παρατηρηθεί θα είναι K.**

**<u>Παράδειγμα.</u> Όλοι και όλες που πήραν το μάθημα της Λογικής ως τώρα το πέρασαν με βαθμό μεγαλύτερο του 7.**

**Και η Μαρία, που το παίρνει τώρα, θα το περάσει με τουλάχιστον 7.**

**Η επαγωγική γενίκευση διαφέρει από τον στατιστικό συλλογισμό και τη στατιστική γενίκευση ως προς το ότι η εξαγωγή του συμπεράσματος προϋποθέτει ότι το σύμπαν ή οι πτυχές του που μας ενδιαφέρουν είναι ομοιογενείς.**

**7.4. <u>Επιχείρημα κατ' αναλογία</u>.**

**Ένα συχνά χρησιμοποιούμενο είδος επιχειρήματος είναι το επιχείρημα κατ' αναλογία.. Αυτό συνήθως έχει την εξής μορφή:**

**Το αντικείμενο X μοιράζεται τις ιδιότητες $Φ_1$, $Φ_2$, . . ., $Φ_ν$ με το αντικείμενο Y. Το αντικείμενο Y έχει την επιπλέον ιδιότητα A. Άρα και το X έχει την ιδιότητα A.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Στην κεντρική πλατεία της πόλης A απ' όπου κατάγομαι υπάρχει γραμματοκιβώτιο. Στην κεντρική πλατεία της πόλης B που έχω επισκεφτεί υπάρχει γραμματοκιβώτιο. Άρα και σε αυτήν την άγνωστή μου πόλη Γ υπάρχει γραμματοκιβώτιο στην κεντρική πλατεία.**

**Τα επιχειρήματα αυτά θέλουν μεγάλη προσοχή, γιατί εξαρτώνται πολύ από τη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στις ιδιότητες Φ και την ιδιότητα A.**

**7.5. <u>Αιτιολογήσεις</u>.**

**Στην επιστήμη συχνά επιχειρούμε να βρούμε την αιτία ενός γεγονότος. Συνήθως συγκροτούμε ένα σώμα πιθανών αιτίων επαγωγικά και στη συνέχεια παραγωγικά απαλείφουμε κάποιες από αυτές για να καταλήξουμε στα πιθανότερα ή στο πιθανότερο αίτιο. Ο φιλόσοφος John Stuart Mill τον 19$^{o}$ αιώνα κωδικοποίησε τους τρόπους με τους οποίους καταλήγουμε σε πιθανά αίτια με πέντε μεθόδους, από τις οποίες θα συζητήσουμε τις τέσσερεις.**

**Λέμε ότι το αίτιο Α είναι αναγκαίο (αναγκαία συνθήκη) για το γεγονός Ε αν το Α απαιτείται για την εμφάνιση του Ε. Συνεπώς αν το Α είναι αναγκαίο αίτιο για το Ε, τότε το Ε δεν θα εμφανιστεί ποτέ χωρίς την παρουσία του Α, αν και το Α μπορεί να συμβαίνει και το Ε να μη γίνεται.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Δεν μπορεί να έχεις AIDS χωρίς να είσαι HIV θετικός, αλλά μπορεί να είσαι HIV θετικός και να μην είσαι άρρωστος από AIDS. Επομένως ο HIV ιός είναι αναγκαία συνθήκη.**

**Λέμε ότι το αίτιο Α είναι ικανό (ικανή συνθήκη) για το γεγονός Ε αν η παρουσία του Α συνοδεύεται πάντα από το γεγονός Ε. Συνεπώς αν το Α είναι ικανό αίτιο του Ε, τότε το Α ουδέποτε υπάρχει χωρίς να συμβαίνει το Ε, αλλά το Ε μπορεί να συμβαίνει χωρίς να είναι το Α παρών.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Ο αποκεφαλισμός είναι ικανό αίτιο θανάτου αφού αρκεί για να τον επιφέρει. Ωστόσο δεν οφείλονται όλοι οι θάνατοι σε αποκεφαλισμό. Λόγου χάρη, μπορεί ένας θάνατος να οφείλεται και σε ασφυξία.**

**Φυσικά υπάρχουν αίτια που είναι ικανά και αναγκαία για ένα γεγονός.**

**Τέλος, ένα γεγονός Ε μπορεί να είναι αιτιακά εξαρτημένα από κάποιο άλλο Α, υπό την έννοια ότι η μεταβολή του Α πάντα προκαλεί και μεταβολή του Ε.**

**<u>Παράδειγμα</u>. Η ένταση του ρεύματος είναι αιτιακά εξαρτημένη από την τάση.**

**Ο Mill πρότεινε τις ακόλουθες τέσσερεις μεθόδους με την χρήση των οποίων μπορούμε να απαλείψουμε όλα τα πιθανά αίτια πλην ενός και να καταλήξουμε ότι αυτό είναι το ζητούμενο αίτιο.**

1. **Η μέθοδος της συμφωνίας, απομονώνει τα αναγκαία αίτια.**
2. **Η μέθοδος της διαφοράς απομονώνει τα ικανά αίτια.**
3. **Η μέθοδος της συμφωνίας και της διαφοράς, απομονώνει τα ικανά και αναγκαία αίτια.**
4. **Η μέθοδος της συνακόλουθης μεταβολής, αναδεικνύει τις αιτιακές εξαρτήσεις.**

**<u>Παράδειγμα.</u> Αναζητούμε την αιτία μιας ασθένειας. Υποθέτουμε ότι προξενείται από έναν από τους ιούς $I_1$, ...., $I_5$. Εξετάζουμε έναν αριθμό ασθενών για να δούμε αν οι ύποπτοι ιοί είναι παρόντες. Στον πρώτο ασθενή βρίσκουμε τους ιούς $I_1$, $I_3$, $I_5$. Στον δεύτερο βρίσκουμε τους ιούς $I_1$, $I_4$, $I_5$. Στον τρίτο τους $I_1$, $I_2$ και στον τέταρτο τους $I_1$, $I_5$. Βλέπουμε ότι μόνον ο $I_1$ είναι παρών σε όλους τους ασθενείς, ενώ η ασθένεια μπορεί να εμφανιστεί χωρίς την παρουσία των υπολοίπων. Άρα πιθανό αναγκαίο αίτιο είναι ο $I_1$.**

**<u>Παράδειγμα.</u> Η Γιάννα και ο Γιάννης παραγγέλνουν τα φαγητά $Φ_1$, $Φ_2$, . . ., $Φ_5$. Ο Γιάννης τρώει από όλα και παθαίνει δηλητηρίαση, ενώ η Γιάννα τρώει από τα $Φ_2$, . . ., $Φ_5$ και δεν παθαίνει τίποτε. Υποθέτοντας ότι η ύποπτη αιτία δηλητηρίασης είναι ένα από τα φαγητά αυτά, καταλήγουμε ότι ικανό αίτιο για τη δηλητηρίαση του Γιάννη ήταν το $Φ_1$, αφού τα υπόλοιπα πιθανά αίτια υπάρχουν χωρίς να προξενούν δηλητηρίαση.**

**<u>Άσκηση.</u> Μια μέρα που ο Γιάννης βλέπει το αγαπημένο του σίριαλ η τηλεόραση αρχίζει να κάνει παράσιτα. Παρατηρεί ότι η Γιάννα στεγνώνει τα μαλλιά της με το πιστολάκι, στην κουζίνα λειτουργεί το πλυντήριο πιάτων και στο χωλ το πλυντήριο ρούχων. Την επομένη που η τηλεόραση ξανακάνει παράσιτα, λειτουργούν τα δύο πλυντήρια. Μια βδομάδα μετά, η τηλεόραση κάνει πάλι παράσιτα, και τώρα η Γιάννα στεγνώνει τα μαλλιά της με το πιστολάκι, μιλά στο κινητό της, στην κουζίνα λειτουργεί το πλυντήριο πιάτων και στο χωλ το πλυντήριο ρούχων. Ωστόσο όταν η Γιάννα μιλά στο κινητό της και ταυτόχρονα στεγνώνει τα μαλλιά της, η τηλεόραση δεν κάνει παράσιτα, και το ίδιο όταν η**

**Γιάννα μιλά στο κινητό της και λειτουργεί το πλυντήριο ρούχων. Ποιο μπορεί να είναι το αίτιο για τα παράσιτα, αν βέβαια το αίτιο σχετίζεται με τη λειτουργία των συσκευών αυτών;**

**<u>Παράδειγμα.</u> Το φυτό που καλλιεργώ στο μπαλκόνι μου αρχίζει να μεγαλώνει ξαφνικά. Υποψιάζομαι ως πιθανά αίτια το φως, το νερό, το λίπασμα και τη θερμοκρασία. Ωστόσο το μόνο που άλλαξε τις τελευταίες ημέρες είναι η ποσότητα του νερού που του ρίχνω. Άρα είναι λογικό να υποθέσω ότι η ταχεία αύξηση του φυτού είναι αιτιακά συνδεδεμένη με την ποσότητα του νερού που του ρίχνω. Προσέξτε ότι ο συλλογισμός αυτός δεν καταργεί ως γενικά πιθανά αίτια τα υπόλοιπα. Ωστόσο, αυτά δεν μεταβλήθηκαν και άρα δεν μπορεί να είναι υπεύθυνα. Μπορώ να βεβαιωθώ ακόμη περισσότερο για το συμπέρασμά μου σχετικά με το νερό, μειώνοντας την ποσότητα του νερού που το ρίχνω και να δω αν ο ρυθμός αύξησης μειώνεται.**

**Βιβλιογραφία**


1. **Wilfrid Hodges, *Logic*, Penguin, 1991.**

   **Στο βιβλίο αυτό στηρίζεται η προσέγγισή μου στα πρώτα τέσσερα μέρη καθώς και στο έκτο.**

2. **Jean Salem, *Introduction à la logique formelle et symbolique*, Nathan-Univeritaire, 1987.**
3. **François Rivenc, *Introduction à la logique*, Petite Biblioteque Payot, 1989.**
4. **Ομάδας Συγγραφέων, *Λογική, Θεωρία και Πρακτική*, Ο.Ε.Δ.Β. 1999.**
5. **John Nolt, Dennis Rohatyn, Achille Varzi, *Logic*, ed. Schaum's Outlines, 2nd edition,1998.**

   **Το έβδομο μέρος των σημειώσεων βασίζεται στο ένατο κεφάλαιο του βιβλίου αυτού.**

6. **Παπανούτσος Ευάγγελος, *Λογική*, εκδ. Δωδώνη, Αθήνα, 1970.**

   **Το ακολουθώ στην παρουσίαση της θεωρίας του αριστοτελικού συλλογισμού.**