- **Με την Προτασιακή Λογική η μελέτη τη συνέπειας ή μη συνόλων λογικών προτάσεων (και ισοδύναμα η μελέτη της εγκυρότητας ή μη των επιχειρημάτων) περιορίζεται στον τρόπο που οι λογικές προτάσεις μπορεί να συνδεθούν για να προκύψουν συνθετότερες λογικές προτάσεις.**
- **Η σύνδεση γίνεται με λογικούς συνδέσμους που μελετούν στην πιο γενική τους μορφή γραμματικούς συνδέσμους που απαιτούνται στους συμπερασμούς και ορίζονται αυστηρά ως αληθοσυναρτήσεις με τον ακόλουθο τρόπο.**
- **Η άρνηση μιας λογικής πρότασης p οδηγεί στην συνθετότερη λογική πρόταση $\neg p$, η οποία είναι ψευδής όταν η p είναι αληθής και είναι αληθής όταν η p είναι ψευδής.**

  Ο πίνακας αληθείας της άρνησης είναι ο ακόλουθος:

p	$\neg p$
Α	**Ψ**
Ψ	**Α**

Οι δύο παρακάτω στήλες τον αναπαριστούν «συντακτικά», δηλώνοντας ότι δεν είναι δυνατόν σε μία κατάσταση όπου ισχύει η p να ισχύει και η άρνησή της και ότι δεν είναι δυνατόν σε μία κατάσταση που δεν ισχύει η p να ισχύει και η p ταυτόχρονα.

p
|
$\neg p$
|
#

$\neg$**p**
|
p
|
#

- **Έστω δύο λογικές προτάσεις p, q. Είναι φανερό ότι σε κάποια κατάσταση Κ μπορεί να είναι και δύο αληθείς ή μόνο μία από αυτές ή καμία (οπότε είναι και οι δύο ψευδείς). Εν συντομία οι τέσσερεις δυνατές καταστάσεις για τις *p*, *q* είναι οι τέσσερις τελευταίες γραμμές του πρώτου από αριστερά πίνακα που ακολουθεί, ενώ αν οι προτάσεις είναι τρεις όλες οι δυνατές καταστάσεις είναι οι οκτώ που αναπαριστάνονται στον δεύτερο από αριστερά πίνακα.**

p	q
Α	Α
Α	Ψ
Ψ	Α
Ψ	Ψ

p	q	r
Α	Α	Α
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Α	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

- **Ο λογικοί σύνδεσμοι**

Ας ονομάσουμε p την πρόταση *Ο Βασίλης Κ. είναι στο γραφείο του* και q την πρόταση *Ο Κώστας Χ. είναι στο γραφείο του*. Φαντάσου τώρα ότι φτάνεις στο πανεπιστήμιο για να δεις τον Βασίλη Κ. και τον Κώστα Χ.

- **Η Σύζευξη**

Ρωτάς τον θυρωρό αν αυτοί είναι στα γραφεία τους και ο θυρωρός σου απαντά (με την πρόταση $p \wedge q$, δηλαδή τη <u>σύζευξη</u> των p, q)

$p \wedge q$: *Ο Βασίλης είναι στο γραφείο του ΚΑΙ ο Κώστας είναι στο γραφείο του*.

Ανεβαίνεις στον τέταρτο όροφο. Είναι φανερό ότι αν τους βρεις και τους δύο εκεί ο θυρωρός σου είπε την αλήθεια, σε αυτήν την κατάσταση η πρότασή του $p \wedge q$ είναι αληθής. Αν βρεις μόνον έναν από τους δύο σου είπε ψέματα. Το ίδιο κι αν δεν βρεις κανέναν τους. Δηλαδή, στις άλλες τρεις καταστάσεις η πρόταση $p \wedge q$ είναι ψευδής.

Από τον παραπάνω πίνακα εξάλλου βλέπουμε ότι αν σε μία κατάσταση η λογική πρόταση $p \wedge q$ είναι αληθής, τότε στην κατάσταση αυτή τόσο η p όσο και η q είναι αληθής. Αν σε μία κατάσταση η $p \wedge q$ είναι ψευδής, τότε τουλάχιστον μία (μπορεί και οι δύο) από τις p, q είναι ψευδής.

p	q	$p \wedge q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ

$p \wedge q$
$\vert$
p
$\vert$
q

$\neg(p \wedge q)$
/\
$\neg p$ $\neg q$

- **Η διάζευξη (εγκλειστική)**

Ρωτάς τον θυρωρό αν αυτοί είναι στα γραφεία τους και ο θυρωρός σου απαντά (με την πρόταση $p \vee q$, δηλαδή την (εγκλειστική) <u>διάζευξη</u> των p, q)

$p \vee q$: *Ο Βασίλης είναι στο γραφείο του Ή ο Κώστας είναι στο γραφείο του*

(που σημαίνει: Τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι στο γραφείο του).

Ανεβαίνεις στον τέταρτο όροφο. Είναι φανερό ότι αν τους βρεις και τους δύο εκεί ο θυρωρός σου είπε την αλήθεια, όπως και αν βρεις έναν μόνον από αυτούς. Σε αυτές τις τρεις καταστάσεις η πρότασή του $p \vee q$ είναι αληθής. Αλλά αν δεν βρεις κανέναν τους, σου είπε ψέματα. Δηλαδή, τότε η πρόταση $p \vee q$ είναι ψευδής.

Από τον παρακάτω πίνακα εξάλλου βλέπουμε ότι αν σε μια κατάσταση η λογική πρόταση $p \vee q$ είναι αληθής, τότε στην κατάσταση αυτή τόσο η p όσο και η q είναι αληθής. Αν σε μία κατάσταση η $p \vee q$ είναι ψευδής, δηλ. η $\neg(p \vee q)$ είναι αληθής, τότε p, q είναι ψευδείς, δηλ. $\neg p, \neg q$ αληθείς.

p	q	$p \vee q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Α
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ

$p \vee q$
/\
p q

$\neg(p \vee q)$
|
$\neg p$
|
$\neg q$

- **Η συνεπαγωγή**

Ρωτάς τον θυρωρό αν αυτοί είναι στα γραφεία τους και ο θυρωρός σου απαντά (με την πρόταση $p \to q$, δηλαδή την συνεπαγωγή το *q έπεται του p*)

$p \to q$: Αν ο Βασίλης είναι στο γραφείο του, (τότε και) ο Κώστας είναι στο γραφείο του

Ανεβαίνεις στον τέταρτο όροφο. Είναι φανερό ότι αν βρεις τον Βασίλη στο γραφείο του και δεν βρεις τον Κώστα, ο θυρωρός σου είπε ψέματα. Είναι βασικό να κατανοήσεις ότι ο θυρωρός δεν σου είπε τίποτα για το τι συμβαίνει αν ο Βασίλης ΔΕΝ είναι στο γραφείο του, οπότε αν ο Βασίλης δεν είναι στο γραφείο του η πρόταση του θυρωρού δεν είναι ψευδής, άρα δεν μπορεί παρά να είναι αληθής.

Από τον παρακάτω πίνακα εξάλλου βλέπουμε ότι αν σε μια κατάσταση η λογική πρόταση $p \to q$ είναι αληθής, τότε στην κατάσταση αυτή, δεν ισχύει η p (3η και 4η γραμμή) ή η q είναι αληθής (1η και 3η γραμμή), δηλαδή τουλάχιστον μία από τις $\neg p$, q είναι αληθής. Υπάρχει μία μοναδική κατάσταση όπου η $p \to q$ είναι ψευδής, εκείνη όπου η p είναι αληθής και η q ψευδής. Παρατηρήστε και τον τέταρτο παρακάτω πίνακα. Τι παρατηρείτε;

p	q	$p \to q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α
Ψ	Ψ	Α

$p \to q$
/\
$\neg p \quad q$

$\neg(p \to q)$
|
p
|
$\neg q$

$(\neg p) \vee q$
/\
$\neg p \quad q$

- **Η ισοδυναμία**

Ρωτάς τον θυρωρό αν αυτοί είναι στα γραφεία τους και ο θυρωρός σου απαντά (με την πρόταση $p \leftrightarrow q$, δηλαδή την ισοδυναμία *p αν και μόνον αν q*)

$p \leftrightarrow q$: Ο Βασίλης είναι στο γραφείο του, αν και μόνον αν (ανν) ο Κώστας είναι στο γραφείο του

Ανεβαίνεις στον τέταρτο όροφο. Είναι φανερό ότι αν βρεις τον Βασίλη στο γραφείο του και δεν βρεις τον Κώστα, ή βρεις τον Κώστα στο γραφείο του και δεν βρεις τον Βασίλη, ο θυρωρός σου είπε ψέματα. Ενώ αν τους βρεις και τους δύο ή δεν βρεις κανέναν, τότε σου είπε αλήθεια.

Από τον παρακάτω πίνακα εξάλλου βλέπουμε ότι αν σε μια κατάσταση η λογική πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής, τότε στην κατάσταση αυτή, ή και η p και η q είναι αληθείς (1η και 4η γραμμή) ή και η p και η q είναι ψευδείς (2η και 3η γραμμή). Αν σε μία κατάσταση η $p \leftrightarrow q$ είναι ψευδής, τότε σε αυτήν η p είναι αληθής και η q ψευδής ή η p είναι ψευδής και η q αληθής.

p	q	$p \leftrightarrow q$
Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α

$p \leftrightarrow q$
/\
p $\neg p$
| |
q $\neg q$

$\neg(p \leftrightarrow q)$
/\
p $\neg p$
| |
$\neg q$ q

Ο παρακάτω πίνακας αληθείας είναι ο πίνακας αληθείας της λογικής πρότασης $((\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$. **Παρατηρείστε ότι η πρόταση αυτή είναι πάντα (σε όλες τις καταστάσεις) αληθής, επομένως είναι ταυτολογία. Επομένως η πρόταση «q έπεται της p» και η η πρόταση «q ή/και άρνηση της p» είναι ταυτόσημες.**

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$(\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$	$((\neg \boldsymbol{p}) \vee \boldsymbol{q}) \leftrightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$
Α	**Α**	**Ψ**	**Α**	**Α**	**Α**
Α	**Ψ**	**Ψ**	**Ψ**	**Ψ**	**Α**
Ψ	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**
Ψ	**Ψ**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**

Τι μπορούμε να κάνουμε με αυτό το εργαλείο; Να ένα επιχείρημα Ε. Είναι έγκυρο ή άκυρο;

$$\frac{p,\ p \to q}{q}$$

1ο βήμα. Σχηματίζω το Αντ-Ε = $\{\, p,\ p \to q, \neg q \}$

2ο βήμα. «Καλλιεργώ» το «δένδρο» που φύεται σε αυτήν την κατάσταση με τη βοήθεια των συντακτικών κανόνων ώσπου να φτάσω στα τελευταία «φύλλα» των «κλαδιών» του που μπορεί να είναι οι προτάσεις p, q ή οι αρνήσεις τους.

$p,\ p \to q, \neg q$	
|	
p	
|	
$\neg q$	
/\	
$\neg p$	q
#	#

3ο βήμα. Αν όλα τα κλαδιά «σπάνουν», το Αντ-Ε είναι μη συνεπές και άρα το επιχείρημα έγκυρο. Αν κάποια κλαδιά δεν σπάνουν, αυτό σημαίνει ότι το Αντ-Ε είναι συνεπές και άρα το επιχείρημα άκυρο. Σε κάθε κλαδί που δεν σπάνει μπορούμε να διαβάσουμε την περιγραφή μιας κατάστασης που δείχνει ότι το επιχείρημα είναι άκυρο. (βλ. το επόμενο παράδειγμα).

Να ένα επιχείρημα Ε. Είναι έγκυρο ή άκυρο;

$$\frac{\boldsymbol{p \to (q \vee r)}}{\boldsymbol{p \to (q \to r)}}$$

Αντ-Ε = { $\boldsymbol{p \to (q \vee r), \neg (p \to (q \to r))\}}$

p		
$\neg(q \to r)$		
q		
$\neg r$		
$\neg p$	$q \vee r$	
#	q	r
		#

Ε άκυρο. Το μαρτυρεί η κατάσταση Κ στην οποία *p*: Α, *q*: Α, *r*: Ψ, στην οποία έχουμε $\boldsymbol{p \to (q \vee r)}$ **: Α ,** $\boldsymbol{p \to (q \to r)}$ **: Ψ.**