Τι μπορούμε να κάνουμε με αυτό το εργαλείο;

I. Να ένα επιχείρημα Ε. Είναι έγκυρο ή άκυρο;

$$\frac{p,\ p \to q}{q}$$

1ο βήμα. Σχηματίζω το Αντ-Ε = $\{\, p,\ p \to q, \neg q \}$

2ο βήμα. «Καλλιεργώ» το «δένδρο» που φύεται σε αυτήν την κατάσταση με τη βοήθεια των συντακτικών κανόνων ώσπου να φτάσω στα τελευταία «φύλλα» των «κλαδιών» του που μπορεί να είναι οι προτάσεις *p*, *q* ή οι αρνήσεις τους.

<table>
<tr><td colspan="2" align="center">$p,\ p \to q, \neg q$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">|</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">p</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">|</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">$\neg q$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">/\</td></tr>
<tr><td align="center">$\neg p$</td><td align="center">q</td></tr>
<tr><td align="center">#</td><td align="center">#</td></tr>
</table>

3ο βήμα. Αν όλα τα κλαδιά «σπάνουν», το Αντ-Ε είναι μη συνεπές και άρα το επιχείρημα έγκυρο. Αν κάποια κλαδιά δεν σπάνουν, αυτό σημαίνει ότι το Αντ-Ε είναι συνεπές και άρα το επιχείρημα άκυρο. Σε κάθε κλαδί που δεν σπάνει μπορούμε να διαβάσουμε την περιγραφή μιας κατάστασης που δείχνει ότι το επιχείρημα είναι άκυρο. (βλ. το επόμενο παράδειγμα).

II. Να ένα επιχείρημα Ε. Είναι έγκυρο ή άκυρο;

$$\frac{p \to (q \vee r)}{(p \to q) \to r}$$

Αντ-Ε = { $p \to (q \vee r)$**,** $\neg ((p \to q) \to r)$**}**

<table>
<tr><td colspan="5">$(p \to q)$</td></tr>
<tr><td colspan="5">|</td></tr>
<tr><td colspan="5">$\neg r$</td></tr>
<tr><td colspan="5">/\</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg$p</td><td colspan="3">$q \vee r$</td></tr>
<tr><td colspan="2">/\</td><td colspan="3">/\</td></tr>
<tr><td>$\neg$p</td><td>q</td><td colspan="2">q</td><td>r</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">/\</td><td>#</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>$\neg p$</td><td>q</td><td></td></tr>
</table>

Ε άκυρο. Το μαρτυρεί η κατάσταση Κ στην οποία p: Ψ, r: Ψ, ή η κατάσταση q : Α, p: Ψ, r: Ψ, ή η κατάσταση q: Α , r : Ψ στις οποίες έχουμε $p \to (q \vee r)$: Α , $(p \to q) \to r$: Ψ.

III. Έγκυρο ή άκυρο;

Ε $$\frac{(p \to q) \lor r}{p \to (q \lor r)}$$

Σύνολο Αντεπιχειρήματος : $\{(p \to q) \lor r, \neg (p \to (q \lor r))\}$		
p		
$\neg (q \lor r)$		
$\neg q$		
$\neg r$		
/\		
$(p \to q)$		r
/\		#
$\neg p$	q	
#	#	

Ε: $$\frac{p \to (q \lor r)}{(p \to q) \lor r}$$

Αντ-Ε: $\{p \to (q \lor r), \neg ((p \to q) \lor r)\}$		
$\neg (p \to q)$		
$\neg r$		
p		
$\neg q$		
$\neg p$	$q \lor r$	
#	q	r
	#	#

- Αποδείξαμε έτσι ότι η πρόταση φ: $((p \to q) \lor r) \leftrightarrow ((p \to (q \lor r))$ είναι ταυτολογία. Και αποδείξαμε ότι είναι ταυτολογία με τη βοήθεια της παρακάτω παρατήρησης.
- Παρατήρηση.

Το επιχείρημα Ε: $$\frac{p_1, p_2, \ldots, p_n}{q}$$

είναι έγκυρο ανν η πρόταση E_φ: $(p_1 \land p_2 \land \ldots \land p_n) \to q$ είναι ταυτολογία.

Πράγματι, αν Ε έγκυρο τότε όταν όλες οι προκείμενες είναι αληθείς, οπότε και η σύζευξή τους είναι, είναι αληθές και το συμπέρασμα q, οπότε η πρόταση $\mathbf{E}_{\varphi}$ είναι αληθής. Η $\mathbf{E}_{\varphi}$ είναι εξάλλου αληθής όταν $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ είναι ψευδής. Άρα, όταν Ε έγκυρο, $\mathbf{E}_{\varphi}$ ταυτολογία. Αντίστροφα, αν $\mathbf{E}_{\varphi}$ ταυτολογία, τότε είναι πάντα αληθής, και επομένως όταν $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$αληθής, οπότε και όλες οι προκείμενες του Ε είναι αληθείς, η q είναι αληθής, άρα το επιχείρημα Ε είναι έγκυρο.

- Θα μπορούσαμε να είχαμε δείξει ότι η φ είναι ταυτολογία σημασιακά, δηλαδή καταρτίζοντας τον πίνακα αλήθειας της φ και παρατηρώντας ότι είναι σε όλες τις καταστάσεις αληθής.

				5η		7η	
p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \vee r$	$q \vee r$	$p \to (q \vee r)$	$((p \to q) \vee r) \leftrightarrow ((p \to (q \vee r))$
Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α

Παρατηρούμε επίσης ότι με τον ίδιο πίνακα αληθείας (χωρίς την τελευταία στήλη), μπορούμε να εξετάσουμε την εγκυρότητα των δύο παραπάνω επιχειρημάτων: με προκείμενη την πρόταση στην $5^{η}$ στήλη και συμπέρασμα την πρόταση στην $7^{η}$ βλέπουμε ότι το επιχείρημα είναι έγκυρο και επίσης βλέπουμε ότι είναι έγκυρο το επιχείρημα με προκείμενη την πρόταση στην $7^{η}$ στήλη και συμπέρασμα την πρόταση στην $5^{η}$ στήλη.