Παράδειγμα

Η σχέση *R* λέγεται σχέση αυστηρής διάταξης σε ένα σύνολο Χ ανν

Για όλα τα Α ∈ *X* , ισχύει ¬*R*(Α,Α) (μη ανακλαστική),
Για όλα τα Α, Β ∈ *X*, αν R(A,B), τότε ¬*R*(B, A) (ασύμμετρη)
Για όλα τα Α, Β, Γ ∈ *X*, αν R(A,B) και R(B, Γ) τότε R(A, Γ) (μεταβατική)
Π.χ. Α < Β ανν Β ψηλότερος από τον Α

$$\frac{\forall x \neg R(x,x),\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))}{\forall x \forall y (R(x,y) \to \neg R(y,x))}$$

<table>
<tr><td colspan="7">ΣΑΕ = $\{\forall x \neg R(x,x),\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)),$
$\neg(\forall x \forall y \big(R(x,y) \to \neg R(y,x)\big))\}.$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$=\{\forall x \neg R(x,x),\ \forall x \forall y \forall z (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z)),\ \exists x \exists y \big(R(x,y) \land R(y,x)\big))\}.$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\exists y \big(R(\alpha,y) \land R(y,\alpha)\big)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\neg R(\alpha,\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\forall y \forall z (R(\alpha,y) \land R(y,z) \to R(\alpha,z))$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\big(R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha)\big)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\neg R(\beta,\beta)$</td></tr>
<tr><td colspan="7">$\forall z (R(\alpha,\beta) \land R(\beta,z) \to R(\alpha,z))$ (*)</td></tr>
<tr><td colspan="7">$R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha) \to R(\alpha,\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg(R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha))$</td><td colspan="3">$R(\alpha,\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="4">#</td><td colspan="3">#</td></tr>
<tr><td colspan="7">ΣΑΕ μη συνεπές άρα επιχείρημα έγκυρο.</td></tr>
<tr><td colspan="7">Εναλλακτικά μπορούσε κάποιος ή κάποια να συνεχίσει από (*)</td></tr>
<tr><td colspan="7">$R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\beta) \to R(\alpha,\beta))$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\neg(R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\beta))$</td><td colspan="3">$R(\alpha,\beta)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\neg R(\alpha,\beta)$</td><td colspan="2">$\neg R(\beta,\beta)$</td><td colspan="3">$R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha) \to R(\alpha,\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha)$
$\to R(\alpha,\alpha)$</td><td colspan="2">$R(\alpha,\beta) \land R(\beta,\alpha)$
$\to R(\alpha,\alpha)$</td><td colspan="2">$\neg(R(\alpha,\beta)$
$\land R(\beta,\alpha))$</td><td>$R(\alpha,\alpha)$</td></tr>
<tr><td>$\neg\big(R(\alpha,\beta)$
$\land R\big(\beta,\alpha\big)\big)$</td><td>$R(\alpha,\alpha)$</td><td>$\neg\big(R(\alpha,\beta)$
$\land R\big(\beta,\alpha\big)\big)$</td><td>$R(\alpha,\alpha)$</td><td>#</td><td colspan="2">#</td></tr>
<tr><td>#</td><td>#</td><td>#</td><td>#</td><td></td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="7">Θα κατέληγε όπως βλέπουμε στο ίδιο αποτέλεσμα με ψηλότερο (βαθύτερο αν θέλετε) και πιο φουντωτό δέντρο. Η εμπειρία μετράει.</td></tr>
</table>

Παράδειγμα (από παλαιότερη εξέταση)

1. α. Να εξετάσεις την εγκυρότητα του παρακάτω επιχειρήματος

$$\frac{\exists x(M(x) \wedge \neg K(x)), \quad \forall x(M(x) \rightarrow Y(x))}{\exists x(Y(x) \wedge \neg K(x))}$$

β. Είναι φανερό ότι το παραπάνω επιχείρημα είναι η μεταγραφή στην πρωτοβάθμια λογική των σχέσεων κάποιου αριστοτελικού συλλογισμού. Να ταυτίσεις το *σχήμα* και τον *τρόπο* του.

<table>
<tr><td colspan="3">ΣΑΕ $=\{\exists x(M(x) \wedge \neg K(x)), \quad \forall x\big(M(x) \rightarrow Y(x)\big), \neg(\exists x\big(Y(x) \wedge \neg K(x)\big))$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$=\{\exists x(M(x) \wedge \neg K(x)), \quad \forall x\big(M(x) \rightarrow Y(x)\big), \neg(\exists x\big(Y(x) \wedge \neg K(x)\big))$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$=\{\exists x(M(x) \wedge \neg K(x)), \quad \forall x\big(M(x) \rightarrow Y(x)\big), \forall x\big(Y(x) \rightarrow K(x)\big)$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$M(\alpha) \wedge \neg K(\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$M(\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$\neg K(\alpha)$</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">$M(\alpha) \rightarrow Y(\alpha)$</td></tr>
<tr><td align="center">$\neg M(\alpha)$</td><td colspan="2" align="center">$Y(\alpha)$</td></tr>
<tr><td align="center">#</td><td colspan="2" align="center">$Y(\alpha) \rightarrow K(\alpha)$</td></tr>
<tr><td></td><td align="center">$\neg Y(\alpha)$</td><td align="center">$K(\alpha)$</td></tr>
<tr><td></td><td align="center">#</td><td align="center">#</td></tr>
<tr><td colspan="3" align="center">ΣΑΕ μη συνεπές, άρα επιχείρημα έγκυρο.</td></tr>
</table>