

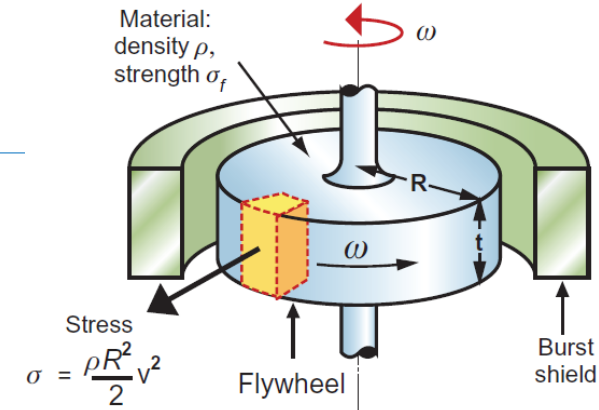


Επιλογή Υλικών στο Μηχανολογικό Σχεδιασμό



Διδάσκουσα: Δρ. Ε. Καμούτση

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους



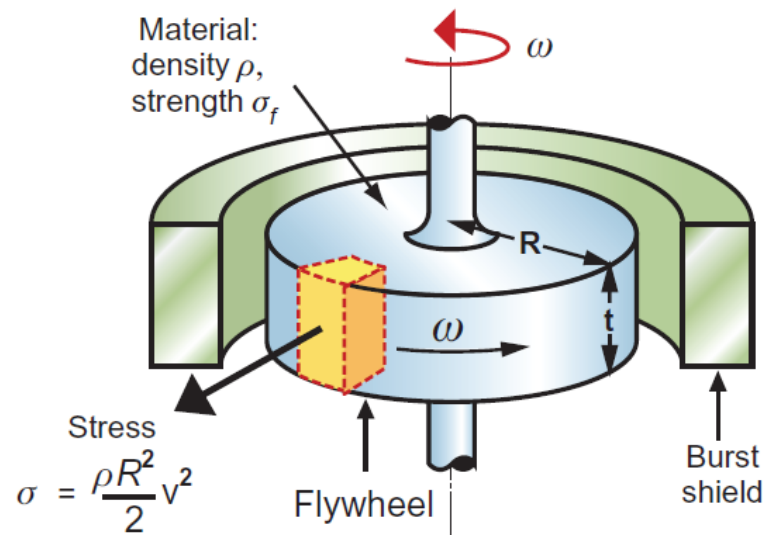
Οι σφόνδυλοι (βολάν) αποθηκεύουν κινητική ενέργεια.

- Οι μικροί σφόνδυλοι, που βρίσκονται στα παιδικά παιχνίδια, είναι κατασκευασμένοι από μολύβι.
- Οι παλιές ατμομηχανές έχουν σφόνδυλο από μαντέμι. Πρόσφατα προτάθηκε η χρήση σφονδύλων για αποθήκευση ενέργειας και για αναγεννητική πέδηση (regenerative braking) στα οχήματα.
- Μερικοί έχουν ήδη κατασκευαστεί από χάλυβα, χυτοσίδηρο, μολύβι αλλά και από σύνθετα υλικά.
- Ποια, είναι όμως η καλύτερη επιλογή υλικού για σφονδύλους; Θεωρείστε ότι ένας αποδοτικός σφόνδυλος πρέπει να αποθηκεύει όσο το δυνατόν περισσότερη ενέργεια ανά μονάδα μάζας, χωρίς να αστοχεί.
- Επίσης θεωρείστε ότι ο σφόνδυλος είναι δίσκος με ακτίνα R και πάχος t , που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω .

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους

Σχεδιασμός για Μέγιστη Ενέργεια

Λειτουργία	Αποθήκευση κινητικής ενέργειας
Περιορισμοί	• Συγκεκριμένη ακτίνα R (Εξωτερική) • Να μην αστοχεί, συγκεκριμένο σ_f • Αντοχή σε θραύση (μεγάλο K_{IC})
Στόχος	Μεγιστοποίηση κινητικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους

$$U = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad J = \frac{\pi}{2} \rho R^4 t$$

J: polar moment of inertia of the disk and
ρ: density

$$U = \frac{\pi}{4} \rho t R^4 \omega^2$$

$$m = \pi \cdot R^2 \cdot t \cdot \rho$$

$$\frac{U}{m} = \frac{1}{4} R^2 \omega^2$$

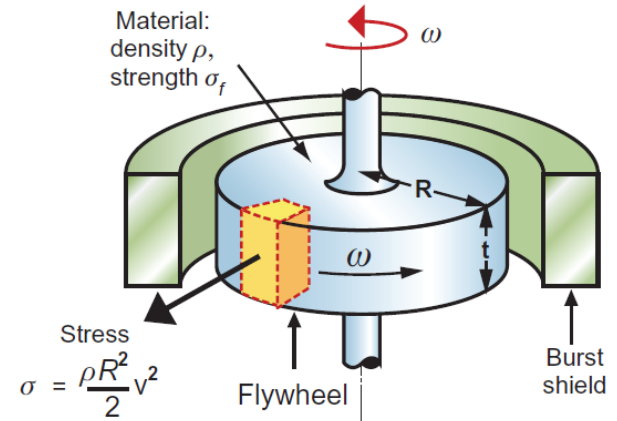
$$\sigma \leq \sigma_f$$

$$\sigma_{max} = \left(\frac{3 + \nu}{8} \right) \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2 \approx \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

$$\Rightarrow \frac{U}{m} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_f}{\rho} \quad \text{Αντικειμενική Συνάρτηση}$$

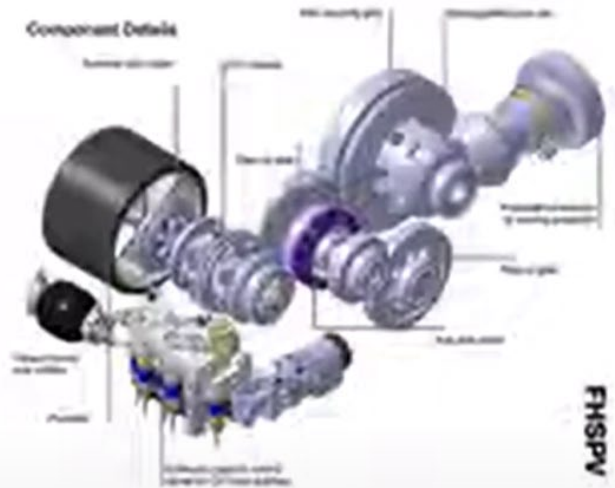
Kinetic energy/ unit mass

δείκτης απόδοσης: $M_1 = \frac{\sigma_f}{\rho}$



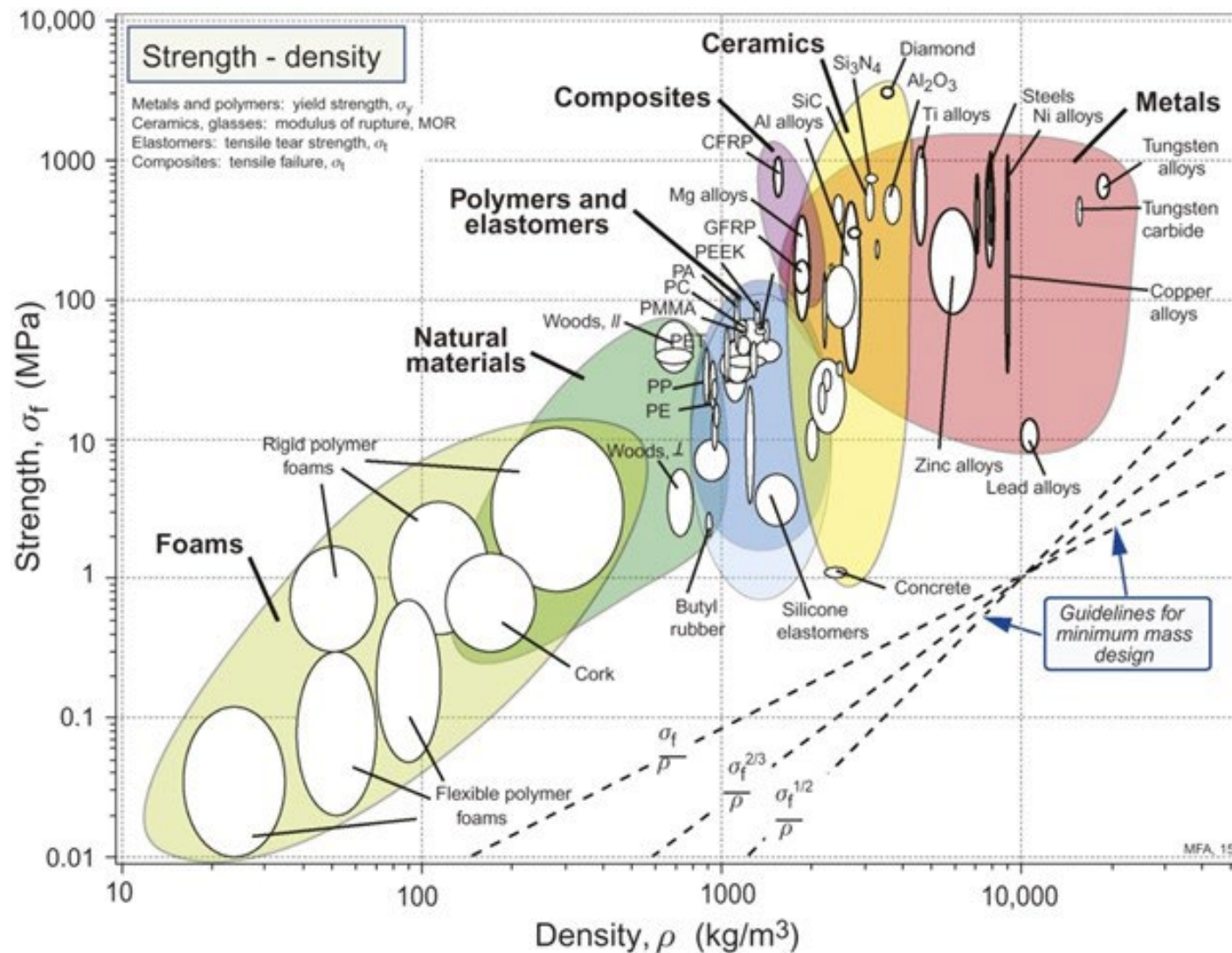
$$\sigma_f = \frac{1}{2} \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2 \sigma_f}{\rho R^2}$$

$$M_1 = \frac{\sigma_f}{\rho} \quad kj/kg$$

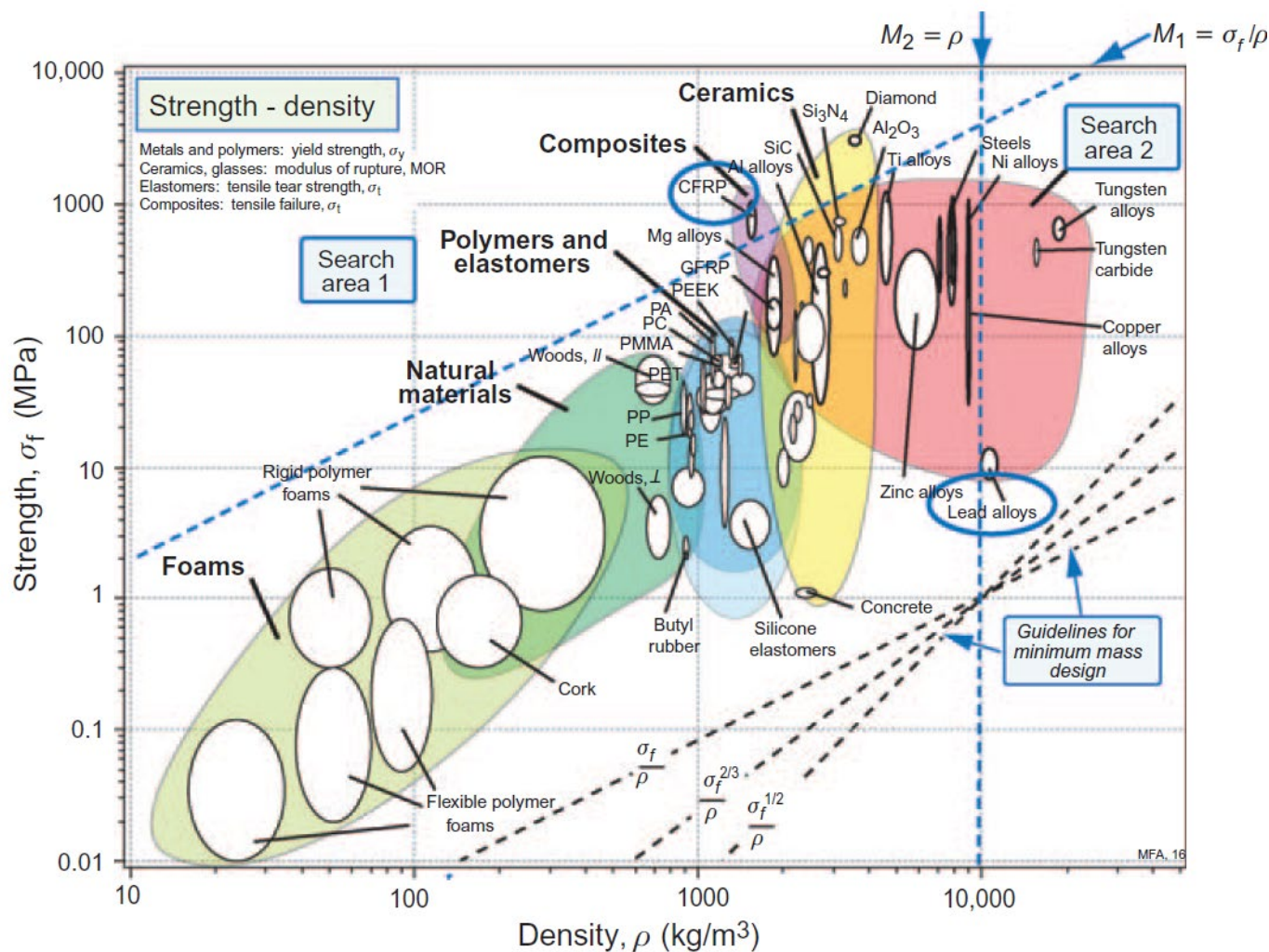


FHSPV

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους



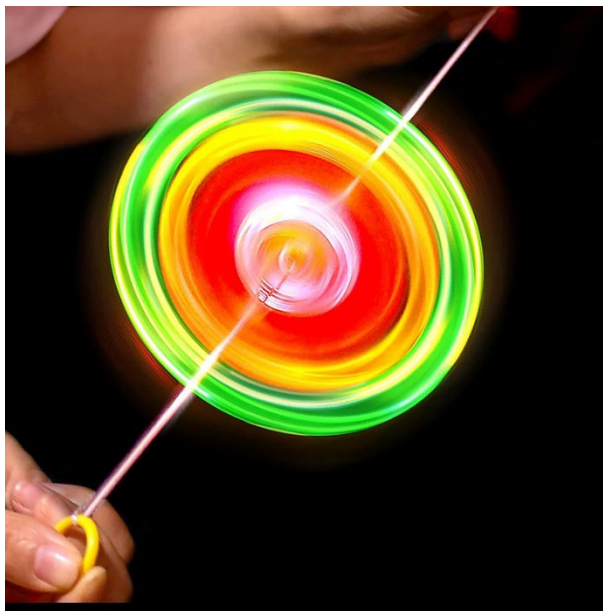
Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους

Σχεδιασμός για Σταθερή Ταχύτητα

Λειτουργία	Σφόνδυλό για παιχνίδι
Περιορισμοί	• Συγκεκριμένη ακτίνα R
Στόχος	• Μεγιστοποίηση κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου σε συγκεκριμένη γωνιακή ταχύτητα
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού



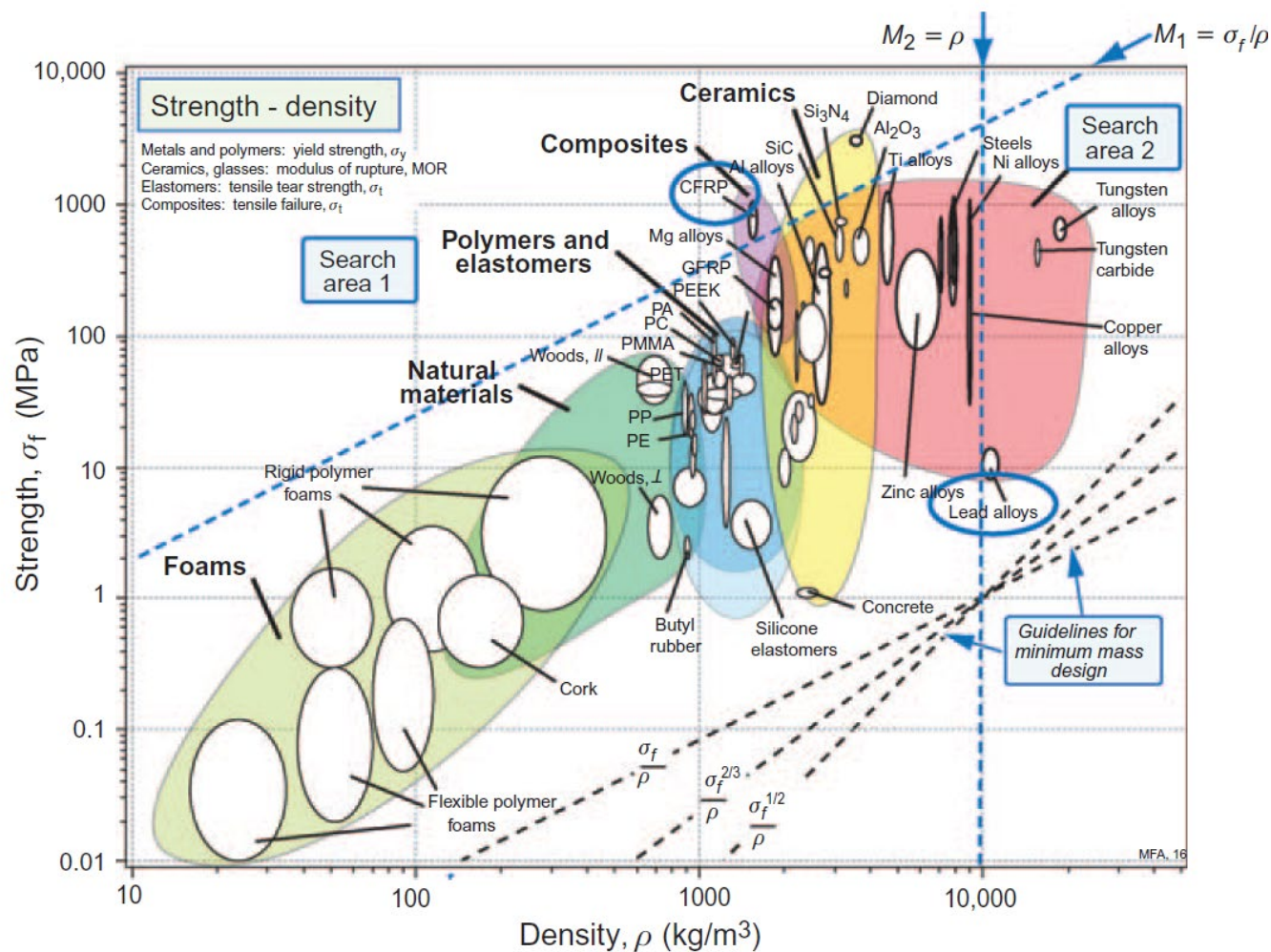
Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\pi}{4} \rho \cdot t \cdot \omega^2 \cdot R^4 \\ V &= \frac{m}{\rho} = \pi \cdot R^2 \cdot t \end{aligned} \right\} \frac{U}{V} = \frac{1}{4} \rho \cdot \omega^2 \cdot R^2$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

δείκτης απόδοσης: $M_2 = \rho$

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Σφονδύλους





Source	Energy Density kJ/kg	Comment
<i>Gasoline</i>	20,000	Oxidation of hydrocarbon – mass of oxygen not included
<i>Rocket fuel</i>	5000	Less than hydrocarbons because oxidizing agent forms part of fuel
<i>Flywheels</i>	Up to 200	Attractive, but not yet proven
<i>Lithium-ion battery</i>	Up to 350	Attractive but expensive and with limited
<i>Nickel-cadmium battery</i>	120–200	life
<i>Lead-acid battery</i>	50–80	Large weight for acceptable range
<i>Super capacitors</i>	10–20	Capacitors release energy very quickly – so power delivery is high
<i>Springs, rubber bands</i>	Up to 5	Much less efficient method of energy storage than flywheel

Table 1
Comparison of candidate flywheel materials [35–37].

Material	σ_{max}/MPa	Density/ (kg/m^3)	Strength allowable coefficient	Maximum energy storage density/ (Wh/kg)
High strength aluminum alloy	600	2850	0.9	52.6
Maraging steel	2400	7850	0.9	76.4
Titanium alloy	1200	5100	0.9	58.9
Glass fiber composite	1800	2150	0.6	70.0
T700 fiber composite	2100	1650	0.6	106.0
T1000 fiber composite	4200	1650	0.6	212.0

Table 2
A summary of FESS systems.

Groups/Manufacturer	Rotor type	Energy storage (kWh)	Power capacity(kW)
Active Power [102]	steel	2.83	675
Amber Kinetics [97]	steel	32	8
Calnetix/Vycon [99]	steel	0.52	125
Levistor Flywheel [103]	steel	5	100
Temporal Power [104]	steel	50	500
Piller Group [98]	steel	2.9	625
London University [105]	steel	5	10
Texas A&M University [106]	steel	100	100
Tsinghua University [107]	steel	16.7	1000
Qifeng Energy Technology [108]	steel	5	500
Honghui International Energy Technology [109]	steel	25	250
Huachikinetik Energy [110]	steel	125	500
Candela New Energy [111]	steel	20	100
Adaptive Balancing Power [112]	Composite	12	400
Beacon Power [78]	Composite	25	100
Boeing [74]	Composite	5	3
Kinetic Traction [113]	Composite	3.9	333
GKN Hybrid Power [114]	Composite	0.44	120
Helix Power [115]	Composite	25	1000
Powerthru [76]	Composite	0.53	101
Ricardo TorqStor [116]	Composite	0.056	101
Rotonix [117]	Composite	12	1100
Stornetic [118]	Composite	3.6	80
Railway Tech. Res. Ins.t. [77]	Composite	100	300

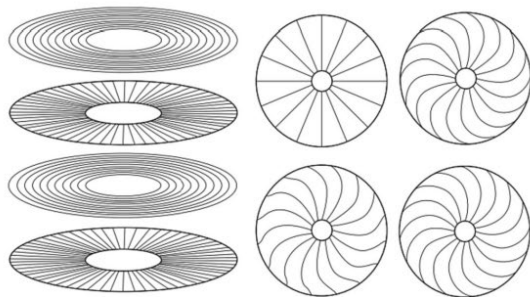


Fig. 3. Circular/radial fiber stacking [36].

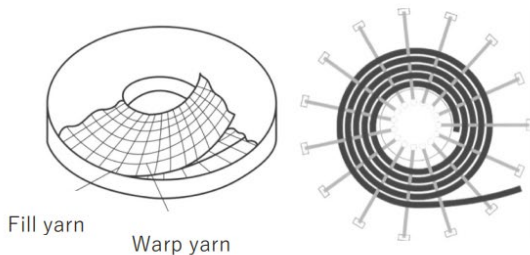


Fig. 4. Stacked fiber-woven rotor. Reprinted from [59].

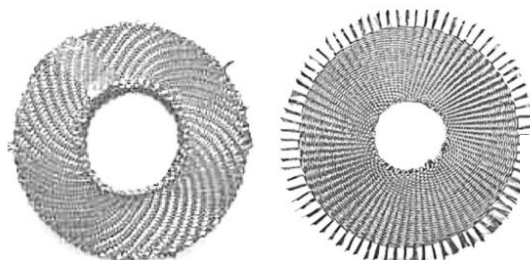


Fig. 5. Samples of woven composite flywheel [36].



ALPS Flywheel

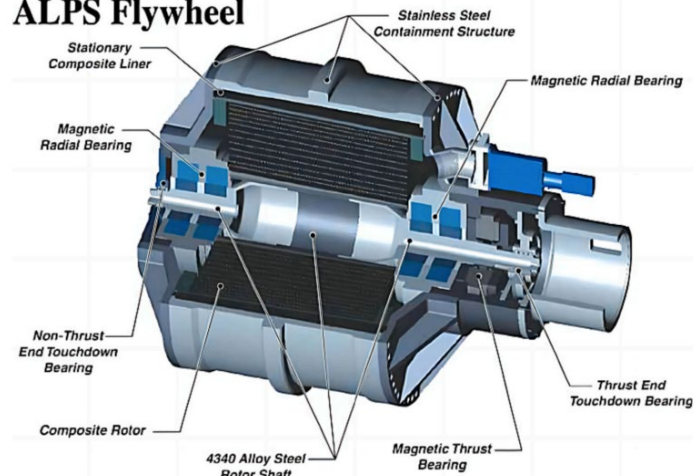


Fig. 6. Composite flywheel structure [71].

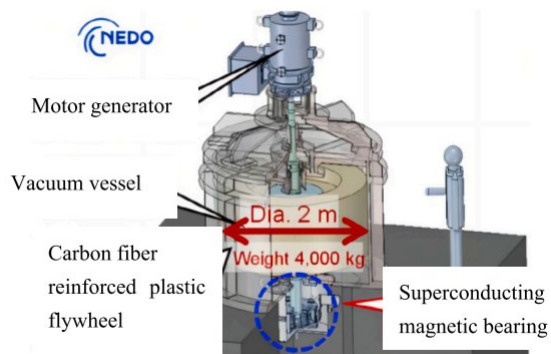


Fig. 9. 300 kW/100 kWh Flywheel System Design [77].

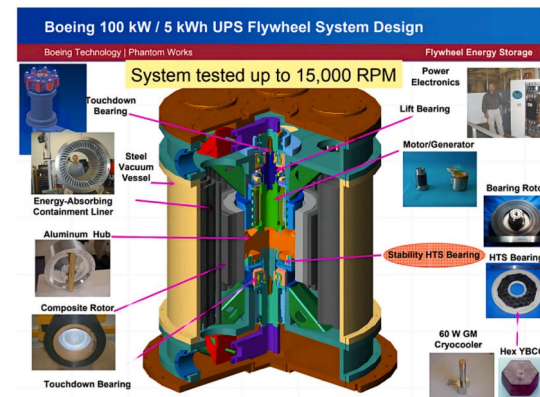


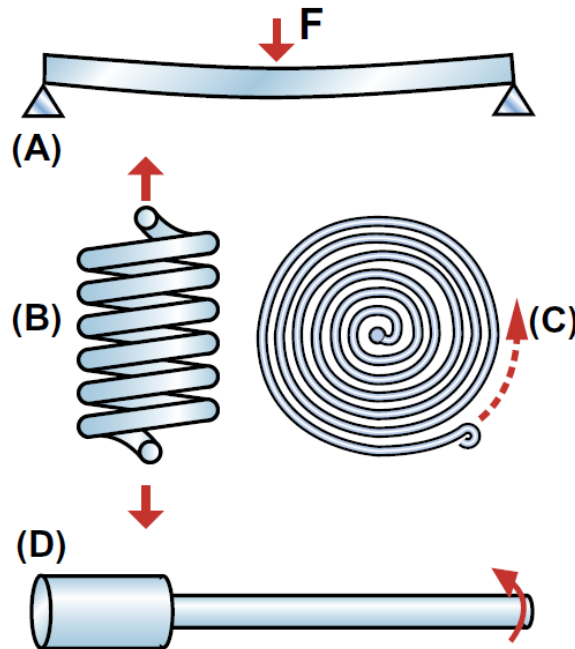
Fig. 7. Boeing 100 kW / 5 kWh UPS Flywheel System Design [74].

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια

Τα ελατήρια κατασκευάζονται σε πολλές μορφές και για διάφορους σκοπούς: αξονικά, φυλλοειδή και ελικοειδή ελατήρια ή αντιστρεπτικές ράβδοι κ.λ.π.

Όλα όμως πρέπει να αποθηκεύουν ελαστική ενέργεια χωρίς να αστοχούν. Ποια είναι όμως τα καταλληλότερα υλικά για την κατασκευή τους.

Χρησιμοποιείτε ως κριτήρια την ελαχιστοποίηση του βάρους ή του όγκου τους.



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια

Λειτουργία	Ελατήριο
Περιορισμοί	• Να μην αστοχεί, συγκεκριμένο σ_f
Στόχος	• Μεγιστοποίηση της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου • Μεγιστοποίηση της αποθηκευμένης ελαστικής ενέργειας ανά μονάδα μάζας
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια

- Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα όγκου

$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{E}$$

$$\sigma \leq \sigma_f \Rightarrow \sigma = \sigma_f$$



$$U = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_f^2}{E}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

δείκτης απόδοσης: $M_1 = \frac{\sigma_f^2}{E}$

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια

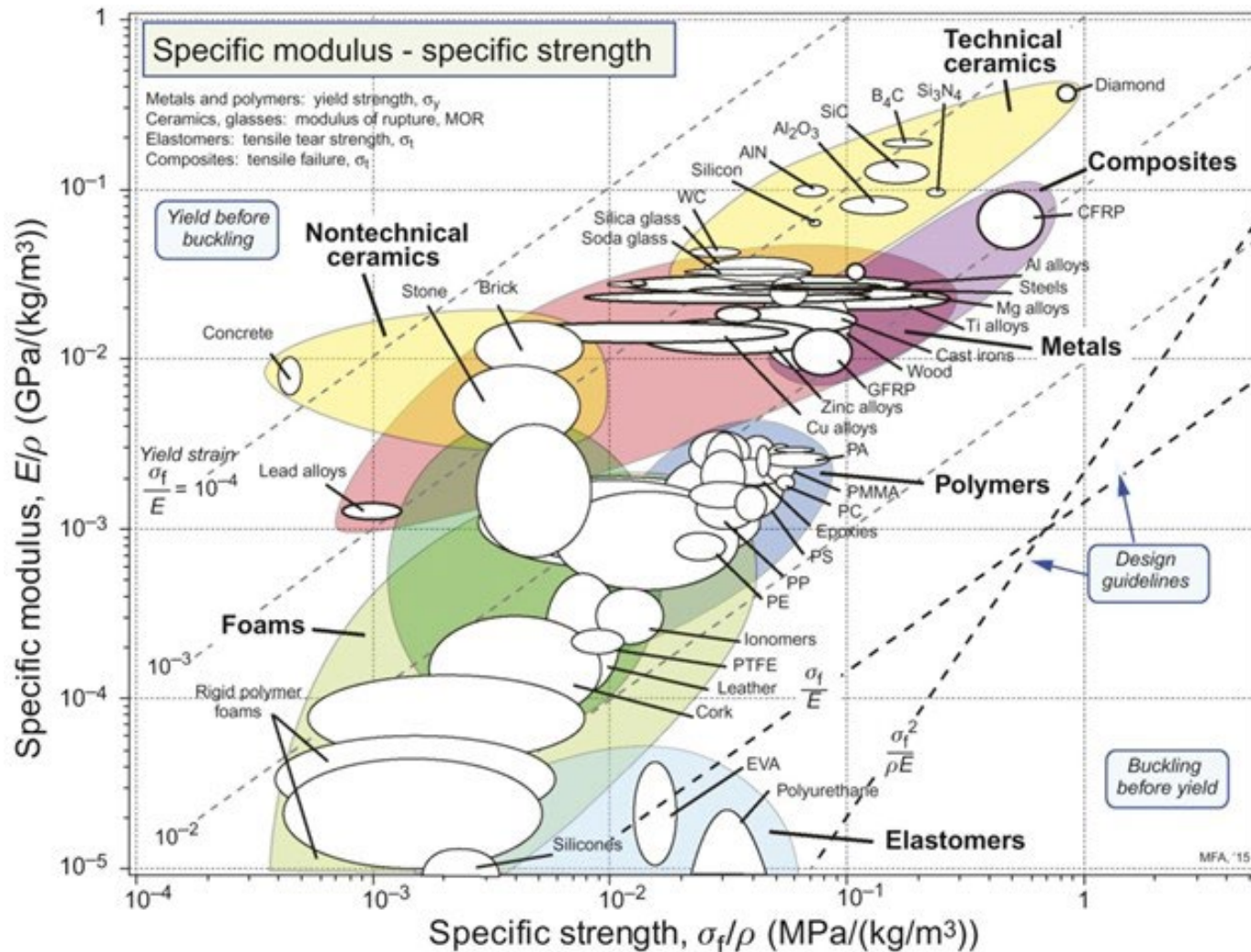
- Ελαστική ενέργεια ανά μονάδα μάζας

$$\left. \begin{array}{l} \frac{U}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\rho \cdot E} \\ \sigma \leq \sigma_f \Rightarrow \sigma = \sigma_f \end{array} \right\} \frac{U}{\rho} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_f^2}{\rho \cdot E}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

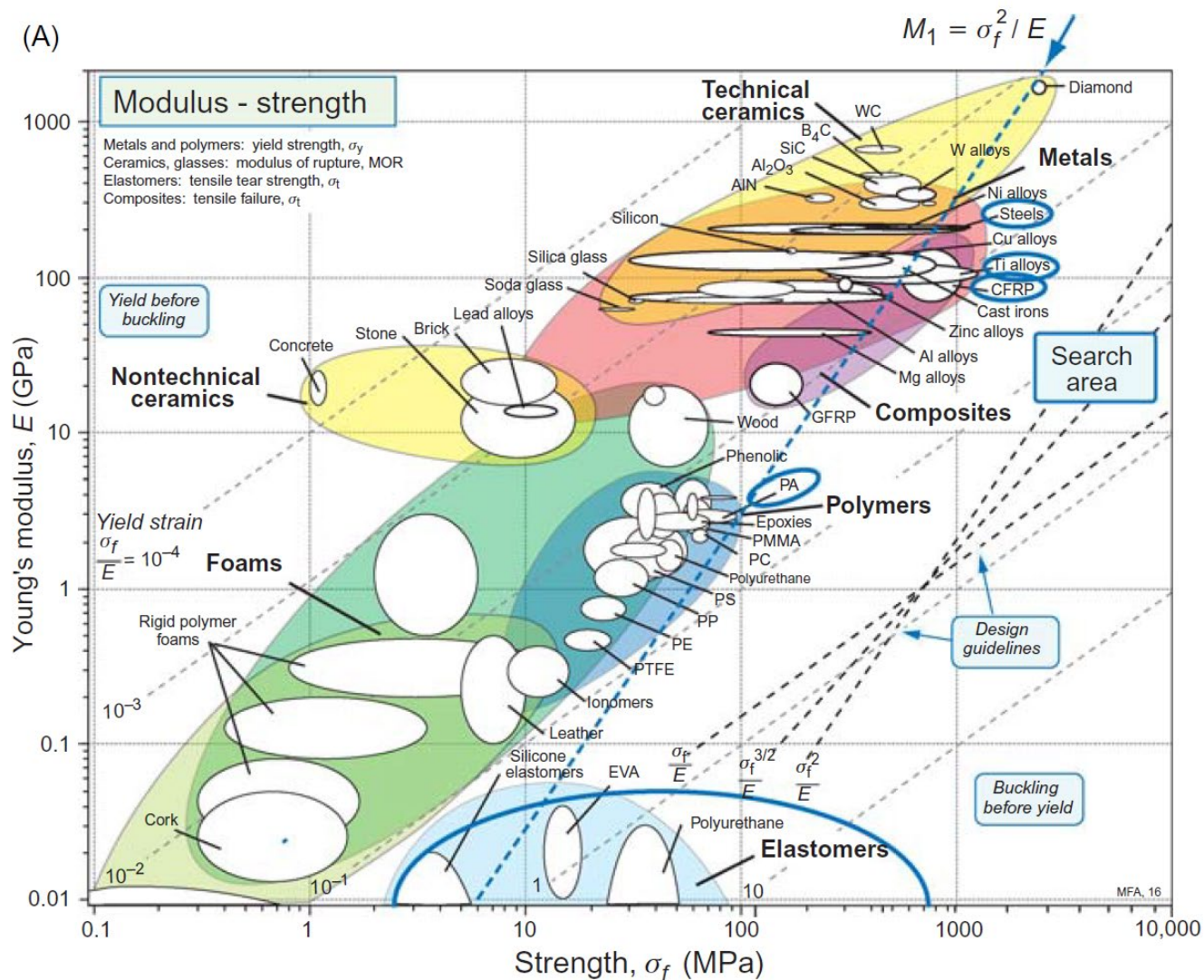
δείκτης απόδοσης: $M_2 = \frac{\sigma_f^2}{\rho \cdot E}$

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια

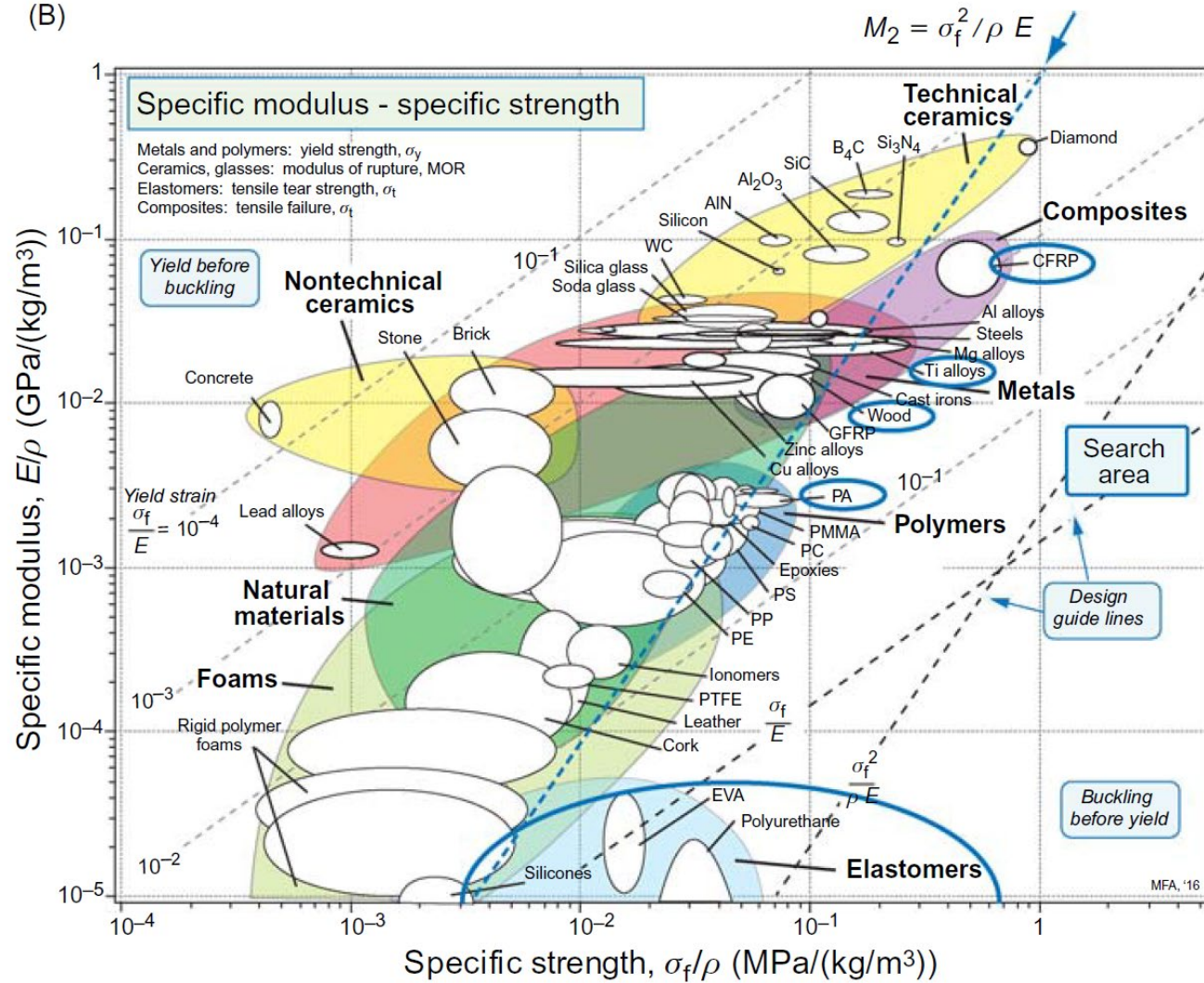


Materials for small springs. High-strength ('spring') steel, glass, CFRP and GFRP all, make good springs. Elastomers excel

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Ελατήρια



(B)



Materials for light springs. Metals are disadvantaged by their high densities. Composites and elastomers are excellent

Table 5.12 (a) Materials for Efficient Small Springs

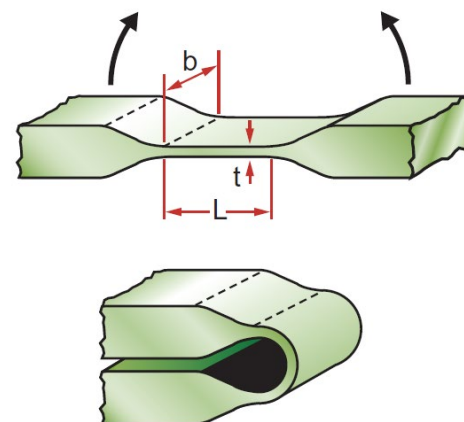
Material	$M_1 = \sigma_f^2 / E$ (MJ/m ³)	Comment
<i>Ti-alloys</i>	4–12	Expensive, corrosion resistant.
<i>CFRP</i>	6–10	Comparable in performance with steel; expensive.
<i>Spring steel</i>	3–7	The traditional choice: easily formed and heat treated.
<i>Nylon</i>	1.5–2.5	Cheap and easily shaped, but high loss factor.
<i>Rubber</i>	20–50	Better than spring steel; but high loss factor.

(b) Materials for Efficient Light Springs

Material	$M_1 = \sigma_f^2 / \rho E$ (kJ/kg)	Comment
<i>Ti-alloys</i>	0.9–2.6	Better than steel; corrosion resistant; expensive.
<i>CFRP</i>	3.9–6.5	Better than steel; expensive.
<i>GFRP</i>	1.0–1.8	Better than spring steel; less expensive than CFRP.
<i>Spring steel</i>	0.4–0.9	Poor, because of high density.
<i>Wood</i>	0.3–0.7	On a weight basis, wood makes good springs.
<i>Nylon</i>	1.3–2.1	As good as steel, but with a high loss factor.
<i>Rubber</i>	18–45	Outstanding; 20 times better than spring steel; but with high loss factor.

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Συνδέσμους

Λειτουργία	Ελαστικός Σύνδεσμος
Περιορισμοί	• Να μην αστοχεί, δηλαδή $\sigma < \sigma_f$ σε όλο το μήκος του συνδέσμου
Στόχος	• Μεγιστοποίηση της ελαστικής παραμόρφωσης
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Συνδέσμους

When a ligament of thickness t is bent elastically to a radius R , the surface strain is:

$$\varepsilon = \frac{t}{2R} \quad \text{the hinge is elastic-the maximum stress is:}$$

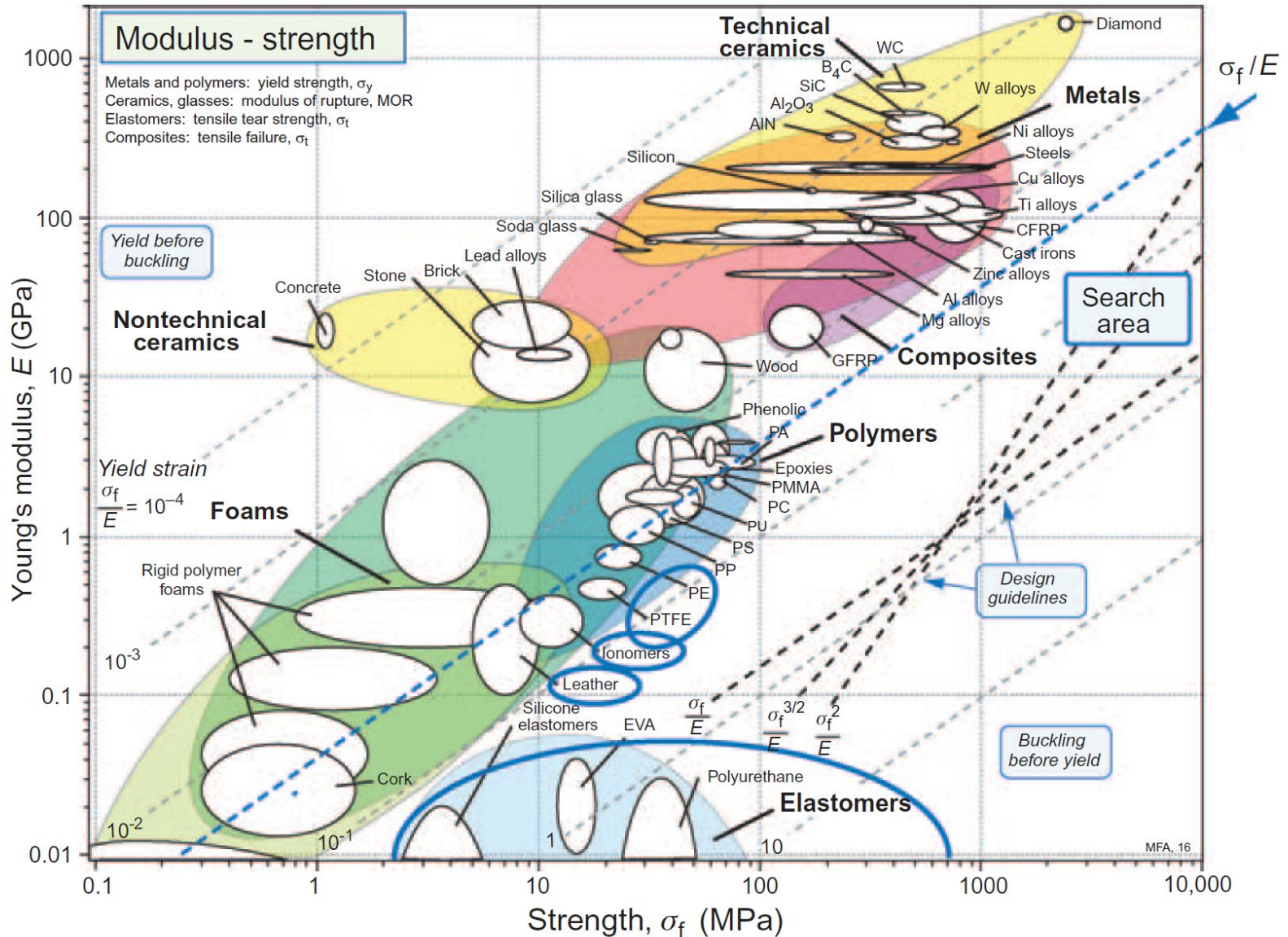
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{t}{2R} \quad \sigma < \sigma_f$$

the minimum radius to which the ligament can be bent without damage is

$$R \geq \frac{t}{2} \left[\frac{E}{\sigma_f} \right] \quad \textbf{Αντικειμενική Συνάρτηση}$$

δείκτης απόδοσης: $M = \frac{\sigma_f}{E} \quad \sigma < \sigma_f$

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Συνδέσμους



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Συνδέσμους

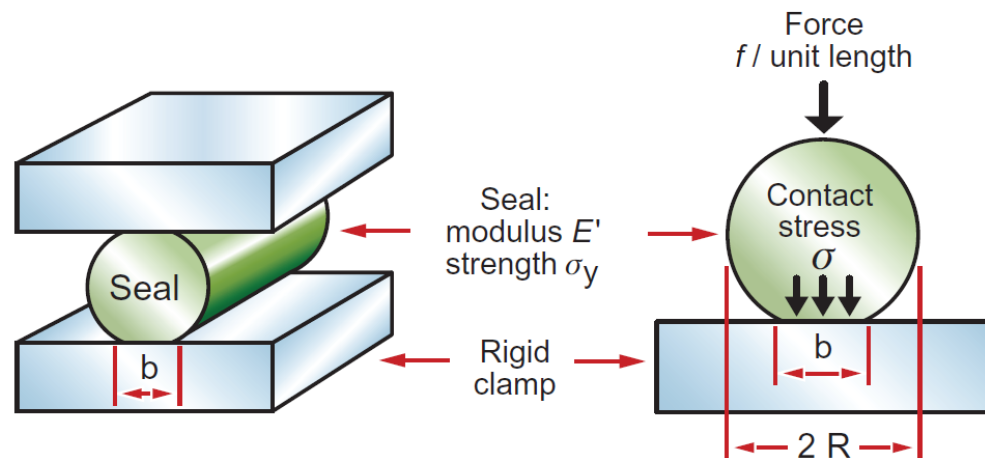
Material	M ($\times 10^{-3}$)	Comment
<i>Polyethylene</i>	32	Widely used for cheap hinged bottle caps, etc.
<i>Polypropylene</i>	30	Stiffer than polyethylene. Easily moulded
<i>Nylon</i>	30	Stiffer than polyethylene. Easily moulded
<i>PTFE</i>	35	Very durable; more expensive than PE, PP, etc.
<i>Elastomers</i>	100–1000	Outstanding, but low modulus
<i>High-strength copper alloys</i>	4	M not as good as polymers. Use when high tensile stiffness is required
<i>Spring steel</i>	6	

Case Studies - Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας

Ο δακτύλιος στεγανότητας είναι ένα κυλινδρικό στοιχείο που συμπιέζεται μεταξύ δύο επιπέδων επιφανειών.

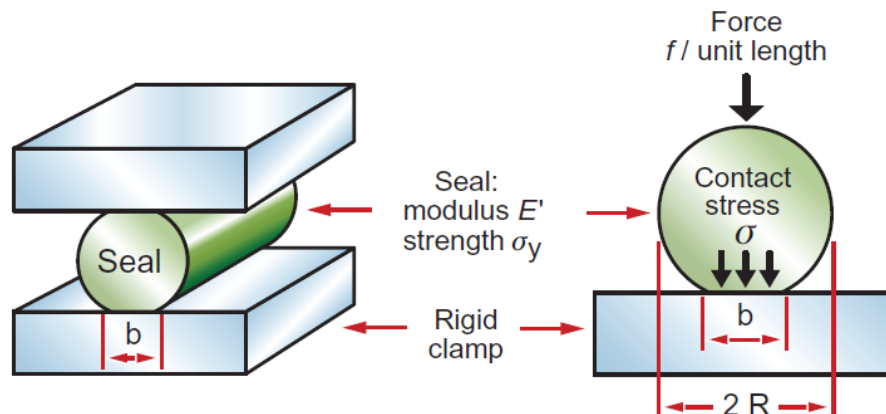
Ο δακτύλιος πρέπει να σχηματίζει το μεγαλύτερο δυνατόν πλάτος επαφής b , ενώ ταυτόχρονα πρέπει να διατηρεί την τάση επαφής σε χαμηλά επίπεδα, έτσι ώστε να μην αστοχήσει ο ίδιος ή οι επίπεδες επιφάνειές (έστω ότι αυτές έχουν $\sigma_f = 100 \text{ MPa}$).

Ταυτόχρονα ο δακτύλιος πρέπει να παραμένει ελαστικός ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολλές φορές. Να επιλεγεί υλικό για την εφαρμογή αυτή.



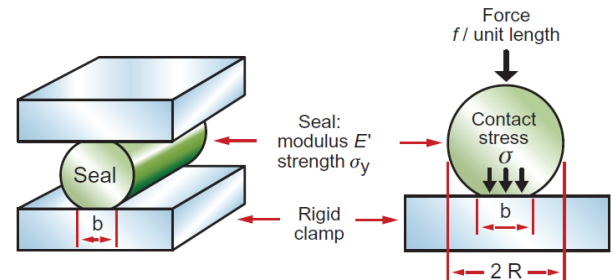
Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας

Λειτουργία	Ελαστικός δακτύλιος στεγανότητας
Περιορισμοί	• $\sigma_{\text{contact}} < \sigma_f$ • Συγκεκριμένη ακτίνα R • Χαμηλό κόστος
Στόχος	• Μεγιστοποίηση του πλάτους επαφής b
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας

$$b = 2 \cdot 0.7 \cdot \left(\frac{F \cdot R}{E} \right)^{1/2} \approx 2 \cdot \left(\frac{F \cdot R}{E} \right)^{1/2}$$



$$\sigma_{contact} \leq \sigma_f$$

$$\sigma_{contact} = \frac{3F}{2\pi a^2} = \frac{3}{2\pi} \frac{F}{(b/2)^2}$$

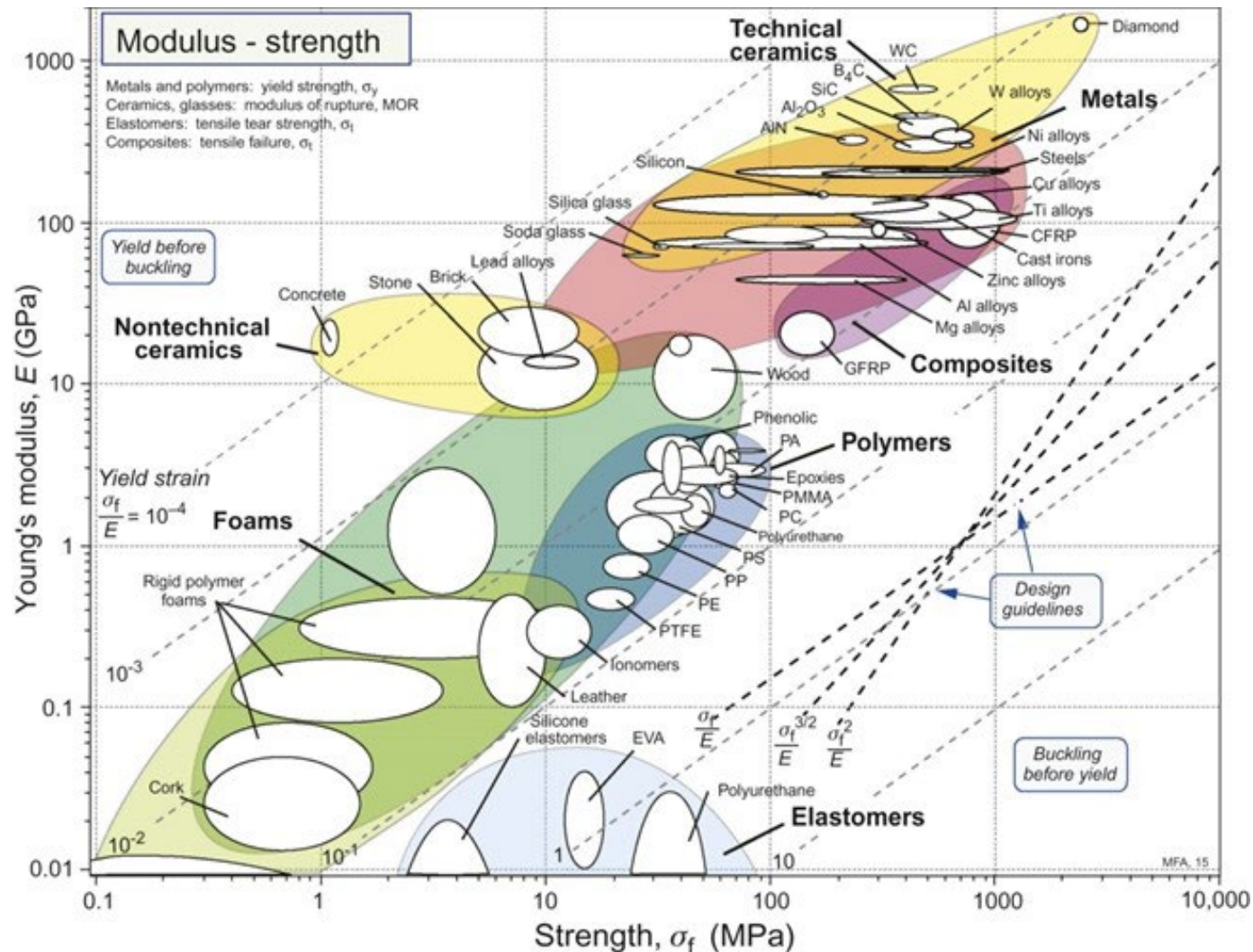
$$\sigma_f = \frac{6}{\pi} \frac{F}{b^2} \Rightarrow F = \frac{\sigma_f \pi b^2}{6}$$

$$\Rightarrow b = 8 \cdot \left(\frac{\sigma_f \cdot \pi \cdot R}{6 \cdot E} \right) = \frac{4\pi}{3} R \frac{\sigma_f}{E}$$

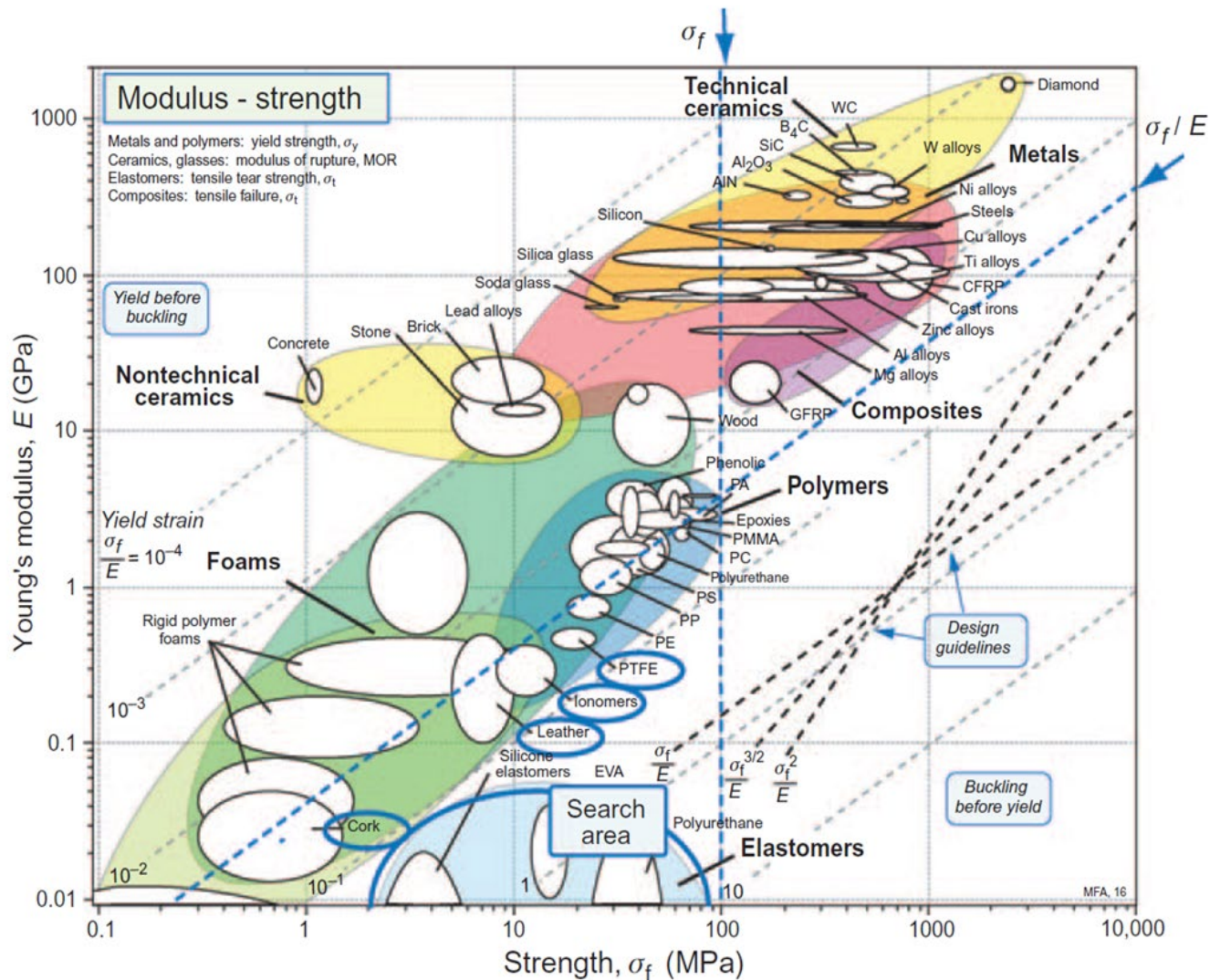
Αντικειμενική Συνάρτηση

δείκτης απόδοσης: $M_1 = \frac{\sigma_f}{E}$

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας



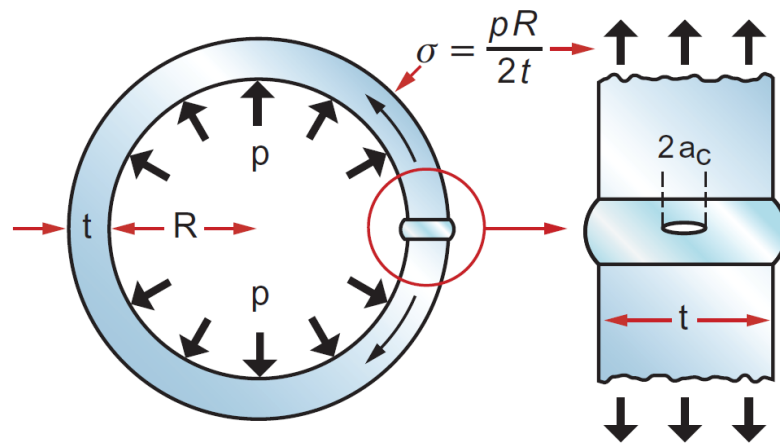
Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας



Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δακτύλιους Στεγανότητας

Material	$M_1 = \frac{\sigma_f}{E}$	Comment
<i>Elastomeric EVA</i>	0.7–1	The natural choice; poor resistance to heat and to some solvents.
<i>Polyurethanes</i>	2–5	Widely used for seals.
<i>Silicone rubbers</i>	0.2–0.5	Higher temperature capability than carbon-chain elastomers, chemically inert.
<i>PTFE</i>	0.05–0.1	Expensive but chemically stable and with high-temperature capability.
<i>Polyethylenes</i>	0.02–0.05	Cheap but liable to take a permanent set.
<i>Polypropylenes</i>	0.2–0.04	Cheap but liable to take a permanent set.
<i>Nylons</i>	0.02–0.03	Near upper limit on contact pressure.
<i>Cork</i>	0.03–0.06	Low contact stress, chemically stable.
<i>Polymer foams</i>	up to 0.03	Very low contact pressure; delicate seals.

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δοχεία Πίεσης



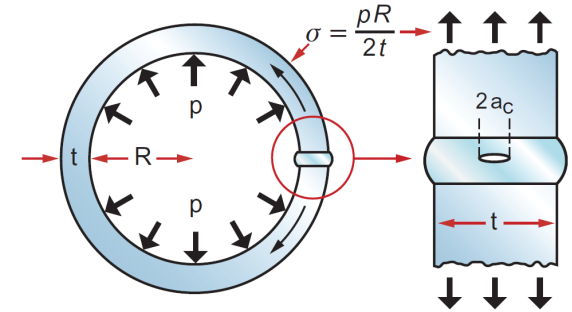
Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δοχεία Πίεσης

Λειτουργία	Να αντέχει σε εσωτερική πίεση p
Περιορισμοί	• Συγκεκριμένη ακτίνα R • Χαμηλό κόστος
Στόχος	• το πλάτους επαφής b • 1. Μεγιστοποίηση της ασφάλειας χρησιμοποιώντας το κριτήριο yield πριν από το σπάσιμο (yield-before-break criterion) • 2. Μεγιστοποίηση της ασφάλεια χρησιμοποιώντας το κριτήριο διαρροής πριν από το σπάσιμο (leak-before-break criterion)
Ελεύθερες μεταβλητές	• Επιλογή Υλικού

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δοχεία Πίεση

$$\sigma = \frac{pR}{2t}$$

$$\sigma < \sigma_f$$



X-ray methods to establish that it contains no crack or flaw of diameter greater than $2a_c^*$; then the stress required to make the crack propagate is

$$\sigma = \frac{CK_{1c}}{\sqrt{\pi a_c^*}}$$

$$p \leq \frac{2t}{R} \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi a_c^*}}$$

~

But this design is not fail-safe.

$$M_1 = K_{1c}$$

If the inspection is faulty, or if, for some other reason a crack of length greater than a_c appears, catastrophe follows.

Case Studies-Επιλογή Υλικού για Δοχεία Πίεσης

Greater security is obtained by requiring that the crack will not propagate even if the stress reaches the general yield stress for then the vessel will deform stably in a way that can be detected.

This condition is expressed by setting σ equal to the yield stress σ_y giving

$$\sigma = \frac{CK_{lc}}{\sqrt{\pi a_c^*}} \quad \sigma = \sigma_y$$

$$\pi a_c \leq C^2 \left[\frac{K_{lc}}{\sigma_y} \right]^2 \quad M_2 = \frac{K_{lc}}{\sigma_y}$$

Large pressure vessels cannot always be X-rayed or sonically tested; and proof testing them may be impractical. Further, cracks can grow slowly because of corrosion or cyclic loading, so that a single examination at the beginning of service life is not sufficient. Then safety can be ensured by arranged that a crack just large enough to penetrate both the inner and the outer surface of the vessel is still stable, because the leak caused by the crack can be detected.

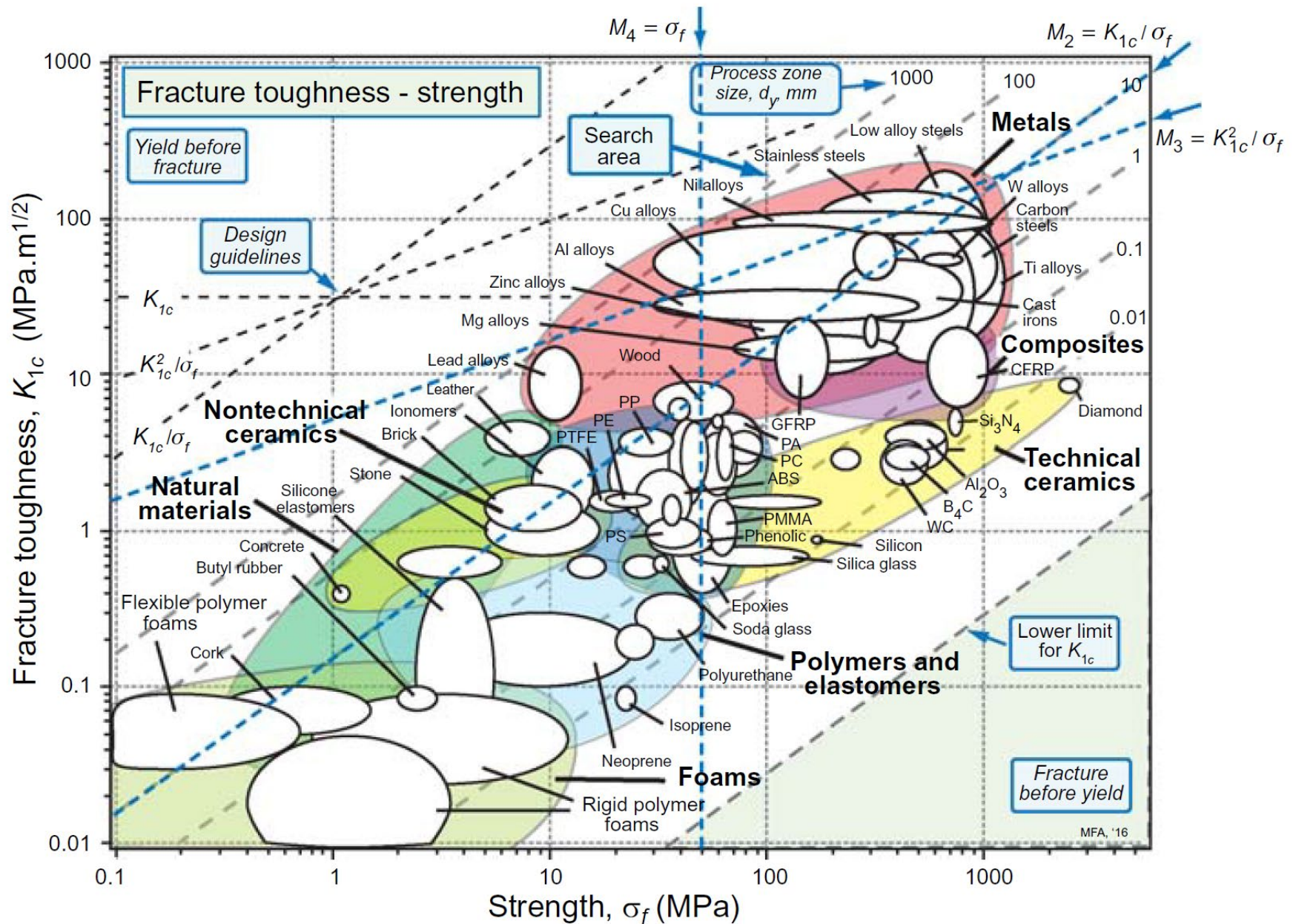
This is achieved by setting $a_c^* = t/2$. Safety is ensured if the stress is always less than or equal to

$$\sigma = \frac{CK_{lc}}{\sqrt{\pi a_c^*}} \quad a_c^* = t/2$$

$$\sigma = \frac{CK_{lc}}{\sqrt{\pi t/2}} \quad \sigma = \sigma_f$$

$$t \geq \frac{pR}{2\sigma_y} \quad p \leq \frac{4C^2}{\pi R} \left(\frac{K_{lc}^2}{\sigma_y} \right) \quad M_3 = \frac{K_{lc}^2}{\sigma_y}$$

$$M_4 = \sigma_y$$

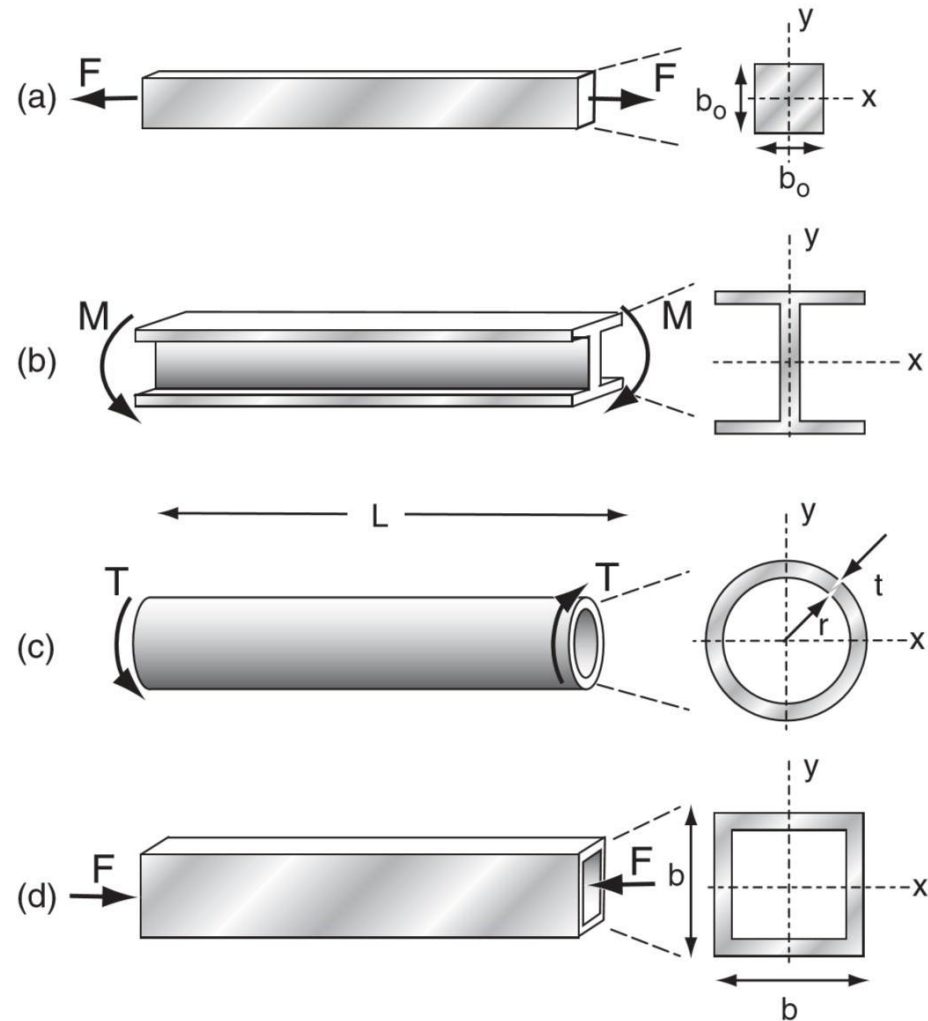


Material	$M_2 = K_{Ic} / \sigma_y$ (m ^{1/2})	$M_4 = \sigma_y$ (MPa)	Comment
<i>Stainless steels</i>	0.35	300	Nuclear pressure vessels are made of grade 316 stainless steel.
<i>Low alloys steels</i>	0.2	800	These are standard in this application.
<i>Copper</i>	0.5	200	Hard drawn copper is used for small boilers and pressure vessels.
<i>Aluminium alloys</i>	0.15	200	Pressure tanks of rockets are aluminium.
<i>Titanium alloys</i>	0.13	800	Good for light pressure vessels, but expensive.

Μεθοδολογία Επιλογής Υλικού και Σχήματος

- Στις περιπτώσεις που είδαμε μέχρι τώρα, το σχήμα του εξαρτήματος που θέλαμε να σχεδιάσουμε δεν επηρέαζε την επιλογή του υλικού.
- Υπάρχουν όμως περιπτώσεις, όπου τα υλικά από τα οποία θα γίνει η επιλογή διατίθενται σε συγκεκριμένα σχήματα και ο σχεδιασμός είναι τέτοιος, ώστε: το σχήμα να παίζει σημαντικό ρόλο στη, απόδοση του εξαρτήματος.
- πώς γίνεται η επιλογή του κατάλληλου συνδυασμού υλικού και σχήματος σε μια τέτοια περίπτωση, έτσι ώστε: να έχουμε μεγιστοποιήσει της απόδοσης;
- Υπάρχει μία μεθοδολογία, που ουσιαστικά βασίζεται στη μεθοδολογία με τους δείκτες απόδοσης που αναπτύξαμε μέχρι τώρα, με την προσθήκη όμως μίας ποσότητας που ονομάζεται παράγοντας σχήματος.
- Ο παράγοντας σχήματος είναι μία αδιάστατη ποσότητα, **η** οποία εξαρτάται από το σχήμα τις διατομείς και όχι από το μέγεθος του εξαρτήματος.

Μεθοδολογία Επιλογής Υλικού και Σχήματος



Μεθοδολογία Επιλογής Υλικού και Σχήματος

■ Παραδείγματα όπου και το σχήμα της διατομής, εκτός από το υλικό, παίζει ρόλο στην απόδοση:

- α) Στον μονοαξονικό εφελκυσμό δεν παίζει ρόλο το σχήμα της διατομής, αλλά το εμβαδόν της επιφάνειάς της.
- β) Αντίθετα, στη κάμψη η καλύτερη απόδοση επιτυγχάνεται με διατομές σχήματος I.
- γ) Στη στρέψη, η διατομή που συμπεριφέρεται καλύτερα είναι η σωληνοειδής.
- δ) Στη θλίψη (αντοχή σε λυγισμό) τη καλύτερη απόδοση έχει η “κούφια” τετραγωνική διατομή.

Παράγοντες Σχήματος

- Παράγοντας σχήματος σε ελαστική κάμψη Φ_B^e
- Παράγοντας σχήματος σε ελαστική στρέψη Φ_T^e
- Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση (ή θραύση) κατά την κάμψη Φ_B^f
- Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση (ή θραύση) κατά την στρέψη Φ_T^f

Παράγοντας σχήματος σε ελαστική κάμψη

- Παράγοντας σχήματος σε ελαστική κάμψη Φ_B^e

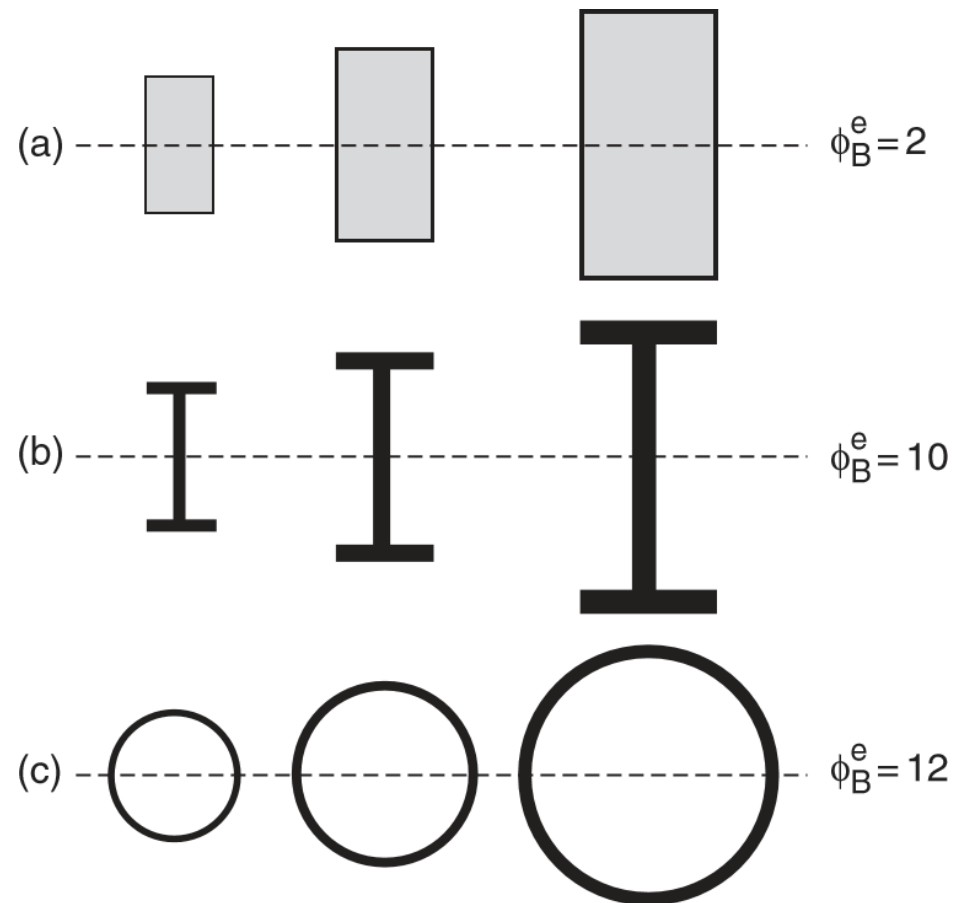
$$\Phi_B^e = \frac{4 \cdot \pi \cdot I_{xx}}{A^2}$$

I_{xx} : Ροπή αδρανείας

A : εμβαδόν διατομής

Παράγοντας σχήματος σε ελαστική κάμψη

- Εξαρτάται μόνο από το **σχήμα** της διατομής και όχι από το μέγεθος



Παράγοντας σχήματος σε ελαστική στρέψη

- Παράγοντας σχήματος σε ελαστική στρέψη Φ_T^e

$$\Phi_T^e = \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{A^2}$$

K : Πολική ροπή αδρανείας

A : εμβαδόν διατομής

Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση κατά την κάμψη

- Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση κατά την κάμψη Φ_B^f

$$\Phi_B^f = \frac{16 \cdot \pi \cdot I_{xx}^2}{y_m^2 \cdot A^3}$$

I_{xx} / y_m : ακαμψία της διατομής

A : εμβαδόν διατομής

Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση κατά την στρέψη

- Παράγοντας σχήματος για αντοχή σε πλαστική παραμόρφωση κατά την στρέψη Φ_T^f

$$\Phi_T^f = \frac{4 \cdot \pi \cdot Q^2}{A^3}$$

Q : στρεπτική ακαμψία της διατομής

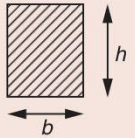
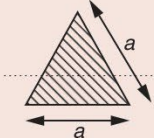
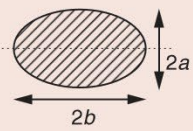
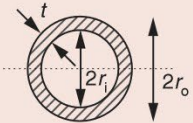
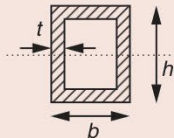
A : εμβαδόν διατομής

- Για αντοχή σε λυγισμό (κατά τη φόρτιση σε θλίψη) ο παράγοντας σχήματος που ισχύει είναι ο Φ_B^e , δηλαδή σα να έχουμε ελαστική κάμψη.

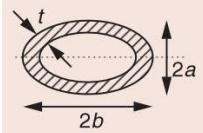
Παράγοντες Σχήματος

- Για αντοχή σε λυγισμό (κατά τη φόρτιση σε θλίψη) ο παράγοντας σχήματος που ισχύει είναι ο Φ_B^e , δηλαδή σα να έχουμε ελαστική κάμψη.
- Στην περίπτωση του μονοαξονικού εφελκυσμού, όπως έχει ήδη αναφερθεί, δεν παίζει ρόλο το σχήμα της διατομής, αλλά η επιφάνεια της διατομής. Δηλαδή δύο διατομές με διαφορετικό σχήμα, αλλά ίδιο εμβαδόν επιφάνειας διατομής συμπεριφέρονται το ίδιο.

Παράγοντες Σχήματος

Section shape	Area A (m)	Moment I (m ⁴)	Moment K (m ⁴)	Moment Z (m ⁴)	Moment Q (m ⁴)	Moment Z _p (m ⁴)
	bh	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{bh^3}{3} \left(1 - 0.58 \frac{b}{h} \right)$ ($h > b$)	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{b^2 h^2}{(3h + 1.8b)}$ ($h > b$)	$\frac{bh^2}{4}$
	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$	$\frac{a^4}{32\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{3} a^4}{80}$	$\frac{a^3}{32}$	$\frac{a^3}{20}$	$\frac{3a^3}{64}$
	πr^2	$\frac{\pi}{4} r^4$	$\frac{\pi}{2} r^4$	$\frac{\pi}{4} r^3$	$\frac{\pi}{2} r^3$	$\frac{\pi}{3} r^3$
	πab	$\frac{\pi}{4} a^3 b$	$\frac{\pi a^3 b^3}{(a^2 + b^2)}$	$\frac{\pi}{4} a^2 b$	$\frac{\pi}{2} a^2 b$ ($a < b$)	$\frac{\pi}{3} a^2 b$
	$\pi(r_o^2 - r_i^2)$ $\approx 2\pi r t$	$\frac{\pi}{4} (r_o^4 - r_i^4)$ $\approx \pi r^3 t$	$\frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4)$ $\approx 2\pi r^3 t$	$\frac{\pi}{4r_o} (r_o^4 - r_i^4)$ $\approx \pi r^2 t$	$\frac{\pi}{2r_o} (r_o^4 - r_i^4)$ $\approx 2\pi r^2 t$	$\frac{\pi}{3} (r_o^3 - r_i^3)$ $\approx \pi r^2 t$
	$2t(h + b)$ ($h, b \gg t$)	$\frac{1}{6} h^3 t \left(1 + 3 \frac{b}{h} \right)$	$\frac{2tb^2 h^2}{(h + b)} \left(1 - \frac{t}{h} \right)^4$	$\frac{1}{3} h^2 t \left(1 + 3 \frac{b}{h} \right)$	$2tbh \left(1 - \frac{t}{h} \right)^2$	$bht \left(1 + \frac{h}{2b} \right)$

Παράγοντες Σχήματος



$$\pi(a+b)t$$

$$(a, b \gg t)$$

$$\frac{\pi}{4}a^3t\left(1 + \frac{3b}{a}\right)$$

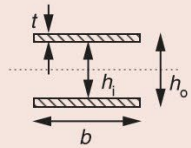
$$\frac{4\pi(ab)^{5/2}t}{(a^2 + b^2)}$$

$$\frac{\pi}{4}a^2t\left(1 + \frac{3b}{a}\right)$$

$$2\pi t(a^3b)^{1/2}$$

$$(b > a)$$

$$\pi abt\left(2 + \frac{a}{b}\right)$$



$$b(h_o - h_i)$$

$$\approx 2bt$$

$$(h, b \gg t)$$

$$\frac{b}{12}(h_o^3 - h_i^3)$$

$$\approx \frac{1}{2}bth_o^2$$

$$—$$

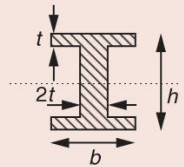
$$\frac{b}{6h_o}(h_o^3 - h_i^3)$$

$$\approx bth_o$$

$$—$$

$$\frac{b}{4}(h_o^2 - h_i^2)$$

$$\approx bth_o$$



$$2t(h+b)$$

$$(h, b \gg t)$$

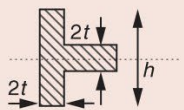
$$\frac{1}{6}h^3t\left(1 + 3\frac{b}{h}\right)$$

$$\frac{2}{3}bt^3\left(1 + 4\frac{h}{b}\right)$$

$$\frac{1}{3}h^2t\left(1 + 3\frac{b}{h}\right)$$

$$\frac{2}{3}bt^2\left(1 + 4\frac{h}{b}\right)$$

$$bht\left(1 + \frac{h}{2b}\right)$$



$$2t(h+b)$$

$$(h, b \gg t)$$

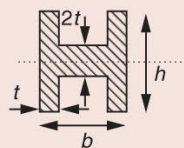
$$\frac{t}{6}(h^3 + 4bt^2)$$

$$\frac{t^3}{3}(8b+h)$$

$$\frac{t}{3h}(h^3 + 4bt^2)$$

$$\frac{t^2}{3}(8b+h)$$

$$\frac{th^2}{2}\left\{1 + \frac{2t(b-2t)}{h^2}\right\}$$



$$2t(h+b)$$

$$h, b \gg t$$

$$\frac{t}{6}(h^3 + 4bt^2)$$

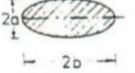
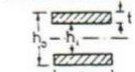
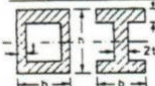
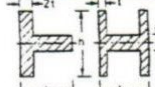
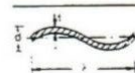
$$\frac{2}{3}ht^3\left(1 + 4\frac{b}{h}\right)$$

$$\frac{t}{3h}(h^3 + 4bt^2)$$

$$\frac{2}{3}ht^2\left(1 + 4\frac{b}{h}\right)$$

$$\frac{th^2}{2}\left\{1 + \frac{2t(b-2t)}{h^2}\right\}$$

Παράγοντες Σχήματος

SECTION SHAPE	ϕ_B^e	ϕ_T^e	ϕ_B^f	ϕ_T^f
	1	1	1	1
	$\frac{\pi}{3} = 1.05$	0.88	$\frac{4\pi}{9} = 1.40$	0.55
	$\frac{a}{b}$	$\frac{2ab}{(a^2 + b^2)}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$ ($a < b$)
	$\frac{\pi}{3} \frac{h}{b}$	$\frac{2\pi}{3} \frac{b}{h} (1 - 0.58 \frac{h}{b})$ ($h > b$)	$\frac{4\pi}{9} \frac{h}{b}$	$\frac{4\pi}{9} \frac{(b/h)}{(1 + 0.6 b/h)}$ ($h > b$)
	$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1.21$	$\frac{2\pi}{5\sqrt{3}} = 0.73$	$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 0.60$	0.39
	$\frac{r}{t}$	$\frac{r}{t}$	$\frac{2r}{t}$	$\frac{2r}{t}$
	$\frac{\pi}{6} \frac{b}{t}$	$\frac{\pi}{6} \frac{b}{t} (1 - \frac{t}{b})^4$	$\frac{4\pi}{9} \frac{b}{t}$	$\frac{\pi}{4} \frac{b}{t} (1 - \frac{t}{b})^4$
	$\frac{a}{t} \frac{(1 + 3b/a)}{(1 + b/a)^2}$	$\frac{8(ab)^{5/2}}{t(a^2 + b^2)(a + b)^2}$	$\frac{a}{t} \frac{(1 + 3b/a)^2}{(1 + b/a)^3}$	$\frac{16a}{t(1 + a/b)^3}$
	$\frac{\pi}{2} \frac{h^2}{bt}$	—	$2\pi \frac{h^2}{bt}$	—
	$\frac{\pi}{6} \frac{h}{t} \frac{(1 + 3b/h)}{(1 + b/h)^2}$	$\frac{\pi b^2 h^2}{t(h + b)^3}$ $\frac{\pi t}{3 b} \frac{(1 + 4h/b)}{(1 + h/b)^4}$	$\frac{2\pi}{9} \frac{h}{t} \frac{(1 + 3b/h)^2}{(1 + b/h)^3}$	$\frac{2\pi h^2}{bt(1 + h/b)^3}$ $\frac{2\pi t}{9 b} \frac{(1 + 4h/b)^2}{(1 + h/b)^4}$
	$\frac{\pi}{6} \frac{h}{t} \frac{(1 + 4bt^2/h^3)}{(1 + b/h)^2}$	$\frac{\pi t}{6 h} \frac{(1 + 8b/h)}{(1 + b/h)^2}$ $\frac{\pi t}{3 h} \frac{(1 + 4b/h)}{(1 + b/h)^3}$	$\frac{\pi}{4} \frac{h}{t} \frac{(1 + 4bt^2/h^3)}{(1 + b/h)^3}$	$\frac{\pi t}{18 h} \frac{(1 + 8b/h)^2}{(1 + b/h)^3}$ $\frac{2\pi t}{9 h} \frac{(1 + 4b/h)^2}{(1 + b/h)^3}$
	$\frac{\pi}{2} \frac{d^2}{t\lambda}$	—	$\pi \frac{d^2}{t\lambda}$	—

Φυσικό νόημα του παράγοντα σχήματος

- Κατ' αρχήν, εξ ορισμού, οι παράγοντες σχήματος για πλήρη κυκλική διατομή ισούνται με τη μονάδα. Δηλαδή, για πλήρη κυκλική διατομή, ισχύει ότι:

$$\Phi_B^e = \Phi_T^e = \Phi_B^f = \Phi_T^f = 1$$

- Εάν τώρα, για παράδειγμα, μία διατομή άλλου σχήματος έχει παράγοντα σχήματος

$$\Phi_B^e = 9$$

αυτό σημαίνει ότι η διατομή αυτή αντέχει σε ελαστική κάμψη 9 φορές περισσότερο, από ότι μία πλήρης κυκλική διατομή.

- Αντίστοιχα, εάν μία διατομή έχει παράγοντα σχήματος

$$\Phi_T^f = 0.55$$

σημαίνει ότι αντέχει περίπου 2 φορές λιγότερο σε πλαστική παραμόρφωση (ή θραύση) κατά τη στρέψη, από ότι μία πλήρης κυκλική διατομή.

Παράδειγμα 1 : Ελαστική κάμψη δοκών

- Θέλουμε να επιλέξουμε το κατάλληλο υλικό για μία δοκό με ακαμψία S_B και μήκος L , της οποίας θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε τη μάζα m .
- Θεωρούμε επίσης ότι τα υποψήφια υλικά είναι σε διάφορα σχήματα διατομών, οπότε το σχήμα υπεισέρχεται σαν μεταβλητή του προβλήματος

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

$$\left. \begin{aligned} S_B &= \frac{F}{\delta} \\ \delta &= \frac{F \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot I} \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} S_B &= \frac{C_1 \cdot E \cdot I}{L^3} \\ \Phi_B^e &= \frac{4 \cdot \pi \cdot I}{A^2} \Leftrightarrow I = \frac{\Phi_B^e \cdot A^2}{4 \cdot \pi} \end{aligned} \right\} \quad A = \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot S_B \cdot L^3}{C_1 \cdot E \cdot \Phi_B^e} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow m = \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot S_B}{C_1} \right)^{1/2} \cdot L^{5/2} \cdot \frac{\rho}{(E \cdot \Phi_B^e)^{1/2}} \quad \textbf{Αντικειμενική Συνάρτηση}$$

$$\textbf{δείκτης απόδοσης:} \quad M = \frac{(E \cdot \Phi_B^e)^{1/2}}{\rho}$$

Παράδειγμα 2 : Ελαστική στρέψη δοκών

- Ας θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε έναν άξονα διατομής A και μήκους L , ο οποίος καταπονείται με μία στρεπτική ροπή T . Κατά συνέπεια, ο άξονας αυτός παραμορφώνεται ελαστικά σε στρέψη κατά μία γωνία θ .
- Θέλουμε να επιλέξουμε το κατάλληλο υλικό για τον άξονα, έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το βάρος του, με τον περιορισμό ότι η στρεπτική ακαμψία ST πρέπει να έχει μία συγκεκριμένη τιμή.

$$S_T = \frac{K \cdot G}{L}$$

$$\Phi_T^e = \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{A^2}$$

Παράδειγμα 2 : Ελαστική στρέψη δοκών

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \frac{K \cdot G}{L} \\ \Phi_T^e &= \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{A^2} \Leftrightarrow K = \frac{\Phi_T^e \cdot A^2}{2 \cdot \pi} \end{aligned} \right\} S_T = \frac{G}{L} \frac{\Phi_T^e \cdot A^2}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot S_T \cdot L}{G \cdot \Phi_T^e} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow m = (2 \cdot \pi \cdot S_T)^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot \frac{\rho}{(G \cdot \Phi_T^e)^{1/2}} \quad \textbf{\underline{Αντικειμενική Συνάρτηση}}$$

$$\textbf{\underline{Δείκτης απόδοσης:}} \quad M = \frac{(G \cdot \Phi_T^e)^{1/2}}{\rho}$$

Παράδειγμα 2 : Ελαστική στρέψη δοκών

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \frac{K \cdot G}{L} \\ \Phi_T^e &= \frac{2 \cdot \pi \cdot K}{A^2} \Leftrightarrow K = \frac{\Phi_T^e \cdot A^2}{2 \cdot \pi} \end{aligned} \right\} S_T = \frac{G}{L} \frac{\Phi_T^e \cdot A^2}{2 \cdot \pi} \Rightarrow A = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot S_T \cdot L}{G \cdot \Phi_T^e} \right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow m = (2 \cdot \pi \cdot S_T)^{1/2} \cdot L^{3/2} \cdot \frac{\rho}{(G \cdot \Phi_T^e)^{1/2}} \quad \textbf{\underline{Αντικειμενική Συνάρτηση}}$$

$$\textbf{\underline{Δείκτης απόδοσης:}} \quad M = \frac{(G \cdot \Phi_T^e)^{1/2}}{\rho} \xrightarrow{G = \frac{3}{8} E} M = \frac{(E \cdot \Phi_T^e)^{1/2}}{\rho}$$

Παράδειγμα 3 : Αστοχία δοκών σε πλαστική παραμόρφωση (ή θραύση)

- Μία δοκός που καταπονείται σε κάμψη, πρέπει να υποστηρίζει ένα καθορισμένο φορτίο F , χωρίς να αστοχεί.
- Στόχος είναι η ελαχιστοποίηση της μάζας της δοκού.

Παράδειγμα 3 : Αστοχία δοκών σε πλαστική παραμόρφωση (ή θραύση)

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

$$F \leq F_f$$

$$F_f = C_2 \left(\frac{I}{y_m} \right) \frac{\sigma_f}{L}$$

$$\Phi_B^f = \frac{16 \cdot \pi}{A^3} \left(\frac{I}{y_m} \right)^2 \Rightarrow \frac{I}{y_m} = \left(\frac{\Phi_B^f \cdot A^3}{16 \cdot \pi} \right)^{1/2}$$

$$F = C_2 \left(\frac{\Phi_B^f \cdot A^3}{16 \cdot \pi} \right)^{1/2} \frac{\sigma_f}{L}$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{F \cdot L}{C_2 \cdot \sigma_f} \right)^{2/3} \left(\frac{16 \cdot \pi}{\Phi_B^f} \right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow m = (16 \cdot \pi)^{1/3} \left(\frac{F}{C_2} \right)^{2/3} \cdot (L^{5/3}) \cdot \left(\frac{\rho}{\sigma_f^{2/3} (\Phi_B^f)^{1/3}} \right)$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

Δείκτης απόδοσης:
$$M = \frac{\sigma_f^{2/3} (\Phi_B^f)^{1/3}}{\rho}$$

Παράδειγμα 4 : Αστοχία δοκών σε πλαστική παραμόρφωση κατά τη στρέψη

- Από ένα άξονα υπάρχει η απαίτηση να μεταφέρει μία στρεπτική ροπή T , χωρίς να αστοχεί σε πλαστική παραμόρφωση.
- Θέλουμε να επιλέξουμε το κατάλληλο υλικό έτσι ώστε να έχουμε ελαχιστοποίηση της μάζας του άξονα.
- Η αστοχία του αξόνα θα συμβεί, όταν η στρεπτική αυτή ροπή ξεπεράσει μία κρίσιμη τιμή, η οποία είναι ίση με

$$T_f = Q \cdot \tau_f$$

Q = στρεπτική ακαμψία

τ_f = το όριο ροής σε διάτμηση

$$\Phi_T^f = \frac{4 \cdot \pi \cdot Q^2}{A^3}$$

Παράδειγμα 4 : Αστοχία δοκών σε πλαστική παραμόρφωση κατά τη στρέψη

$$m = \rho \cdot A \cdot L$$

$$T \leq T_f$$

$$T_f = Q \cdot \tau_f$$

$$\Phi_T^f = \frac{4 \cdot \pi \cdot Q^2}{A^3} \Rightarrow Q = \left(\frac{\Phi_T^f \cdot A^3}{4 \cdot \pi} \right)^{1/2} \quad \left. \begin{array}{l} T \leq T_f \\ T_f = Q \cdot \tau_f \end{array} \right\} T = \left(\frac{\Phi_T^f \cdot A^3}{4 \cdot \pi} \right)^{1/2} \cdot \tau_f$$
$$\xrightarrow{\tau_f = \frac{\sigma_f}{2}} A = \frac{4^{2/3} \cdot T^{2/3} \cdot \pi^{1/3}}{\sigma_f^{2/3} \cdot (\Phi_T^f)^{1/3}}$$

$$m = \left(4 \cdot \pi^{1/2} \cdot T \right)^{2/3} \cdot L \cdot \frac{\rho}{\sigma_f^{2/3} \cdot (\Phi_T^f)^{1/3}}$$

Αντικειμενική Συνάρτηση

δείκτης απόδοσης: $M = \frac{\sigma_f^{2/3} \cdot (\Phi_T^f)^{1/3}}{\rho}$