

Διφασική ροή αερίου/υγρού

Ενδεικτικές εφαρμογές

Εργαζόμενο μέσο ψυκτικών μονάδων (κλιματιστικά, ψυγεία, αντλίες θερμότητας)

Συσκευές φυσικών διεργασιών (αποστακτικές στήλες, πύργοι απορρόφησης)

Αγωγοί αργού-φυσικού αερίου

Δίκτυα ατμού θέρμανσης

Βαλβίδες διαφυγής ρευστού υπό πίεση

Εξατμιστήρες βιομηχανίας τροφίμων

Γεωθερμικά ρευστά (νερό-ατμός-CO₂)

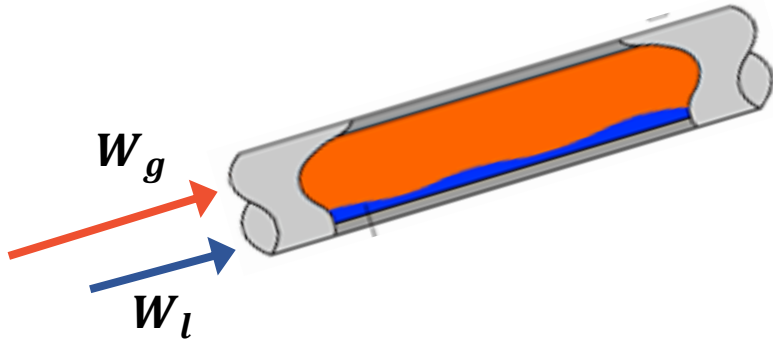
Ατμοπαραγωγοί (τμήμα ατμοποίησης)

Πυρηνικοί σταθμοί

Καθημερινό παράδειγμα

Η ροή της βρύσης μετά από διακοπή (νερό-αέρας)

Βασικές παράμετροι διφασικής ροής αερίου/υγρού



$$W = G A = W_g(z) + W_l(z) [=] \text{kg/s}$$

$$\Delta P = ? \quad (q_w = ? \quad T_w = ?)$$

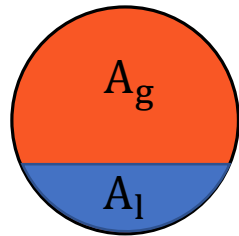
Μαζική ποιότητα

$$x = W_g/W, \quad 1 - x = W_l/W$$

Κλάσμα κενού

$$\alpha = \frac{V_g}{V_g + V_l} = \frac{V_g}{V} = \frac{A_g}{A}$$

Καθεστώτα ροής
(flow regimes)



Μέση πυκνότητα μίγματος

$$\rho = \frac{\rho_g V_g + \rho_l V_l}{V} = \rho_g \alpha + \rho_l (1 - \alpha)$$

Ροή νερού-αέρα (αδιαβατική)

$$W_g(z) = \text{const} \quad W_l(z) = \text{const}$$

$$x, a, \rho = \text{const} \Rightarrow \Delta P$$

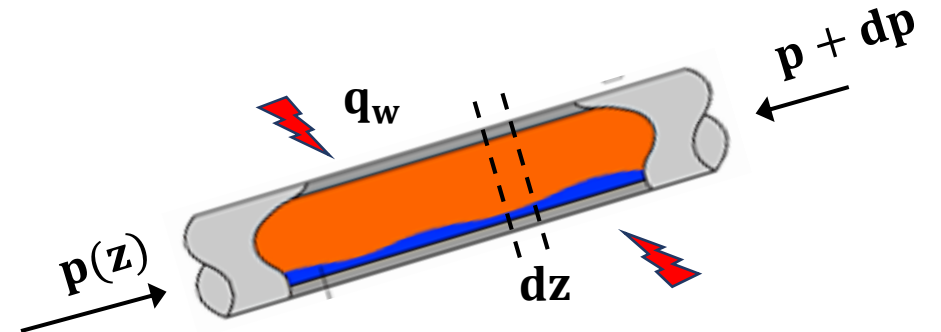
Ροή νερού-ατμού (με εναλλαγή θερμότητας)

$$W, G = \text{const}$$

$$W_g = W_g(z) \quad W_l = W_l(z)$$

$$x(z), a(z), \rho(z) \Rightarrow dP$$

Συνεισφορά μεταβολής ορμής στην πτώση πίεσης

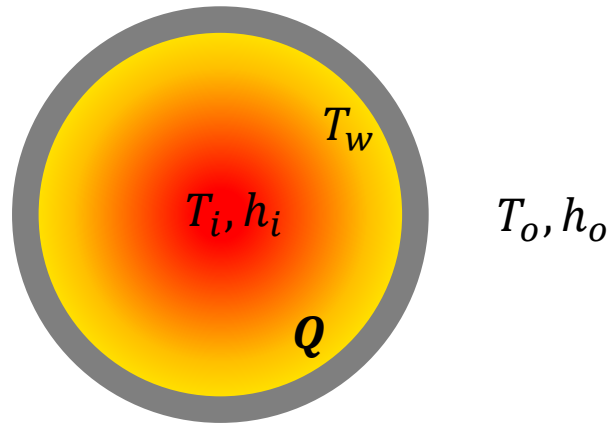


Ροϊκά χαρακτηριστικά και ανάλυση μεταφοράς θερμότητας

Ροϊκά χαρακτηριστικά:

- Εξισώσεις συνέχειας
- Ισοζύγιο ενέργειας

Δύο βασικά προβλήματα μεταφοράς θερμότητας



Συσκευές με θερμαντικό ρευστό

$$Q = UA(T_i - T_o) \quad T_i, T_o \rightarrow Q$$

Ελέγχουσα αντίσταση $\Rightarrow U$

πχ. συμπύκνωση οργανικών ατμών

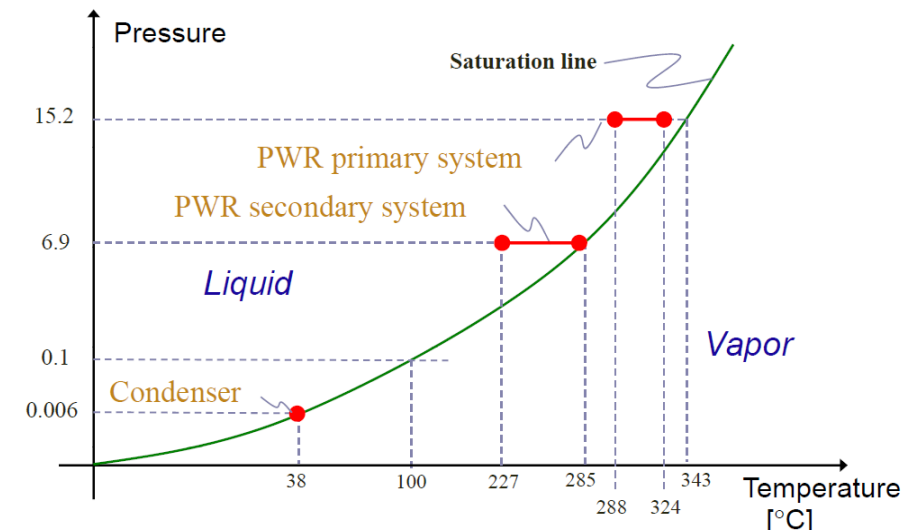
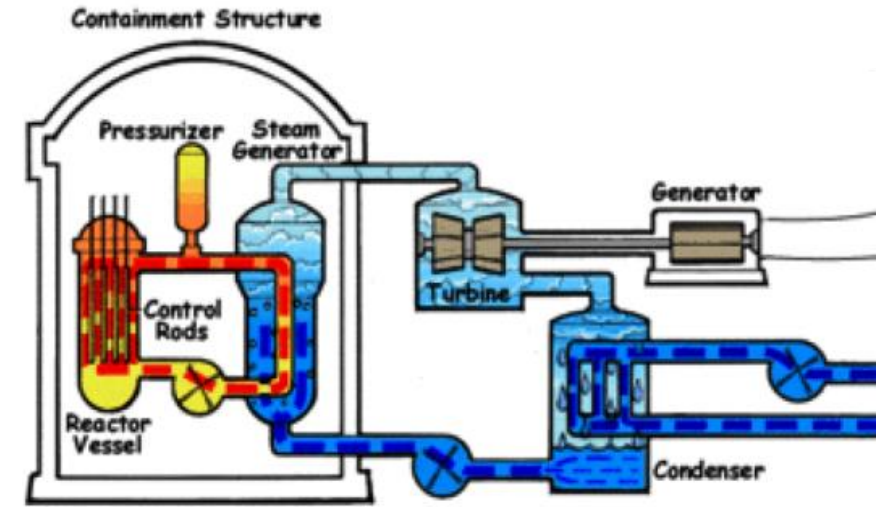
Συσκευές με φλόγα

$$Q = h_o A(T_w - T_o) \quad Q \rightarrow T_w$$

$$q_w = Q/A = \text{const}: h_o \uparrow \Rightarrow T_w \downarrow$$

Κρίσιμη θερμορροή βρασμού

PWR (or BWR)



Ισοζύγια μάζας και μοντέλα ροής

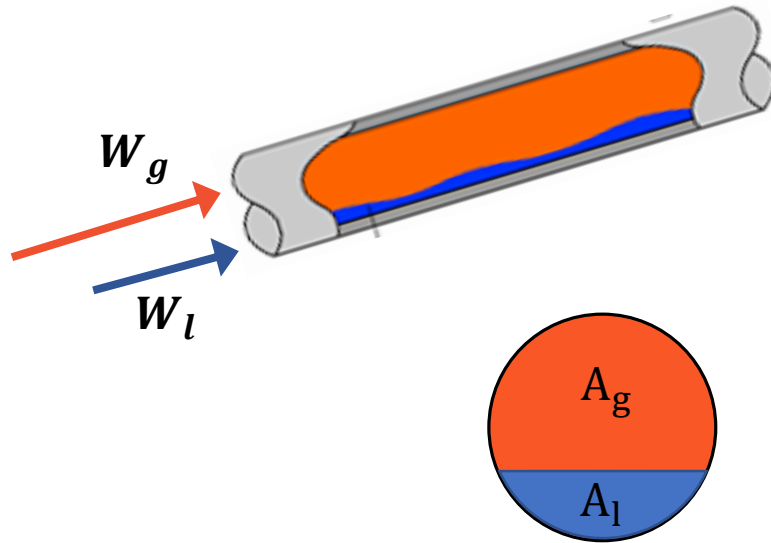
Βασικές παράμετροι

$$W = G A = W_g + W_l$$

$$x = W_g/W$$

$$\alpha = A_g/A$$

$$\rho = \rho_g \alpha + \rho_l (1 - \alpha)$$



Μοντέλο ομογενούς ροής (ψευδο-ρευστό)

$$S = 1 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\rho_l x}{\rho_l x + \rho_g (1 - x)}$$

$G > 2000 \text{ kg/m}^2\text{s}$ ή $\rho_l/\rho_g < 10$

Έντονη διασπορά της μίας φάσης
Απότομη αλλαγή συνθηκών ροής
(relief valves)

$$\rho = \rho_g \alpha + \rho_l (1 - \alpha) \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1 - x}{\rho_l}$$

$$v = v_g x + v_l (1 - x) = v_l + v_{lg} x, v_{lg} = v_g - v_l$$

Εξισώσεις συνέχειας (ροή υγρού-ατμού)

$$u_g = \frac{W_g}{\rho_g A_g} = \frac{xW}{\rho_g \alpha A} = G \frac{x}{\alpha \rho_g}, \quad u_{sg} = \frac{W_g}{\rho_g A}$$

$$u_l = \frac{W_l}{\rho_l A_l} = \frac{(1 - x)W}{\rho_l (1 - \alpha)A} = G \frac{1 - x}{(1 - \alpha)\rho_l}, \quad u_{sl} = \frac{W_l}{\rho_l A}$$

$$S = \frac{u_g}{u_l} = \left(\frac{x}{1 - x} \right) \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} \right) \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)$$

$$\text{π.χ. } S = \sqrt{1 + x \left(\frac{\rho_l}{\rho_g} - 1 \right)} \quad (\text{Συσχέτιση Chisholm})$$

Μοντέλο διαχωρισμένης ροής

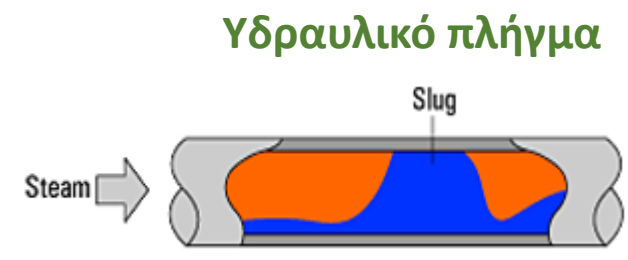
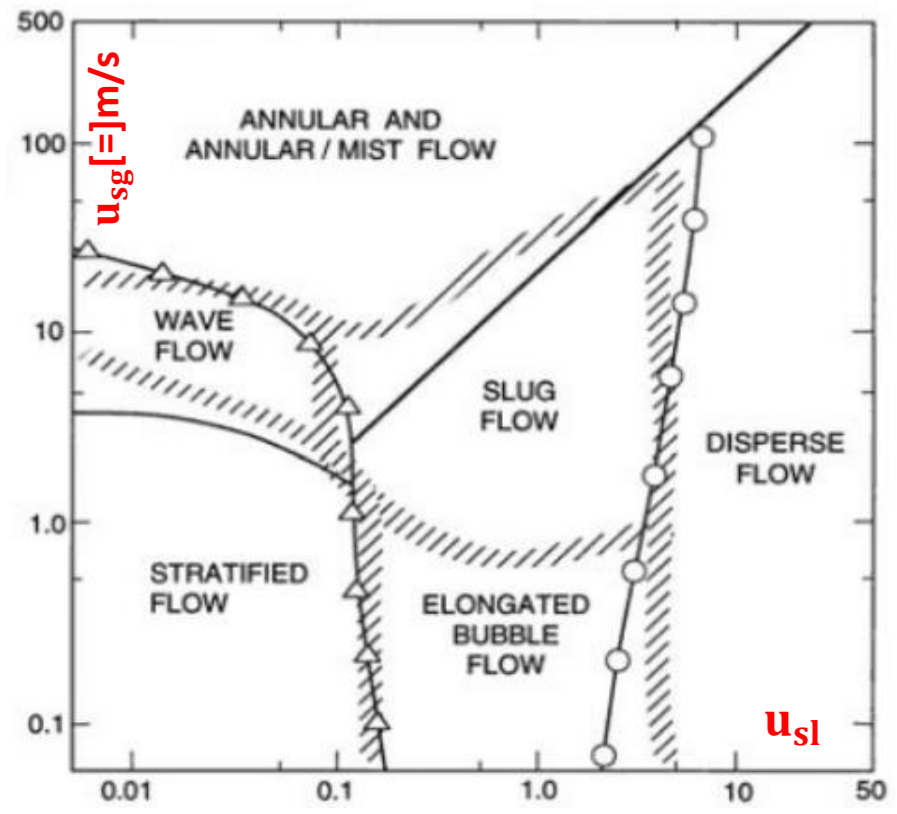
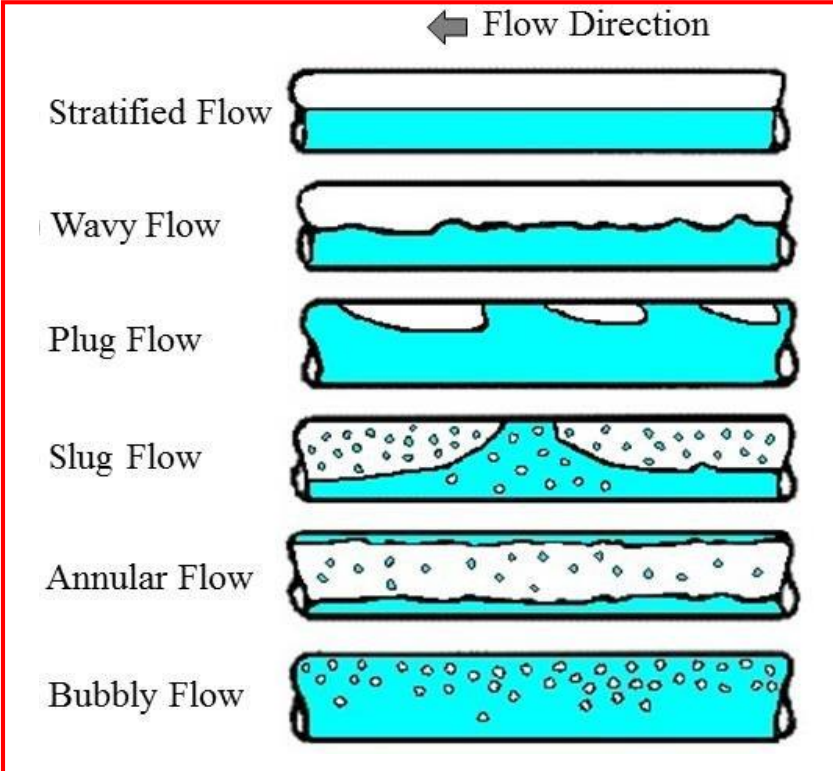
$$u_g \neq u_l$$

Πτώση πίεσης λόγω τριβών
με βάση τις μεθόδους:

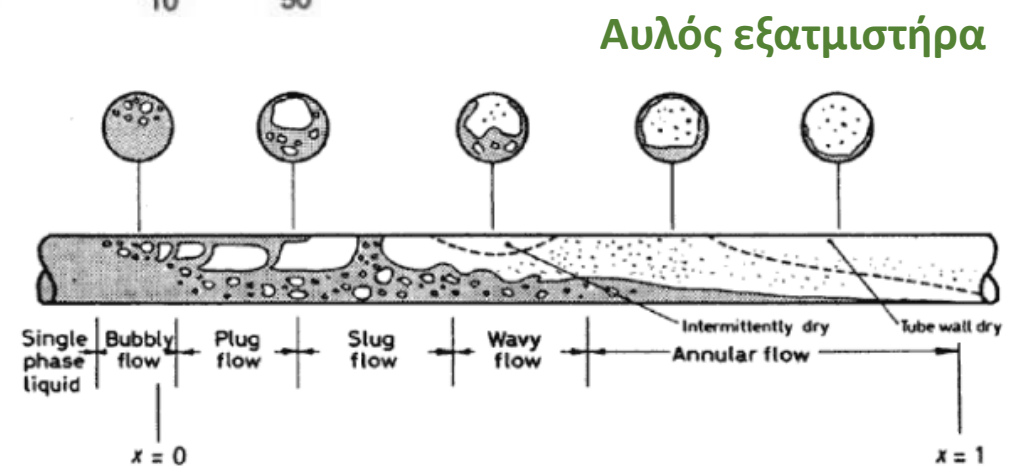
$$\left(\frac{dp}{dz} \right)_g = \left(\frac{dp}{dz} \right)_l$$

- Lockhart-Martinelli
- Friedel

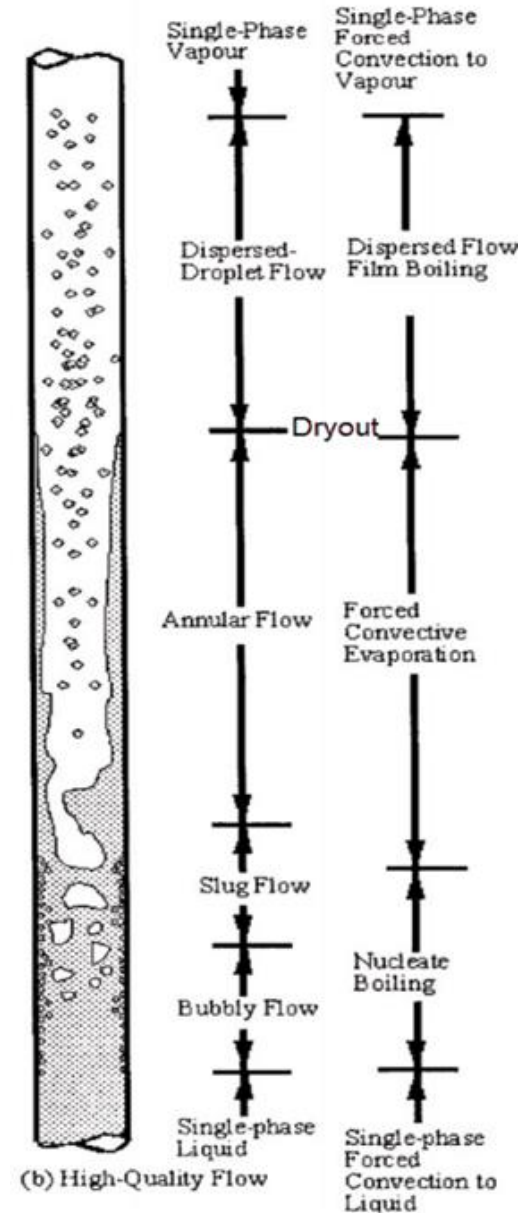
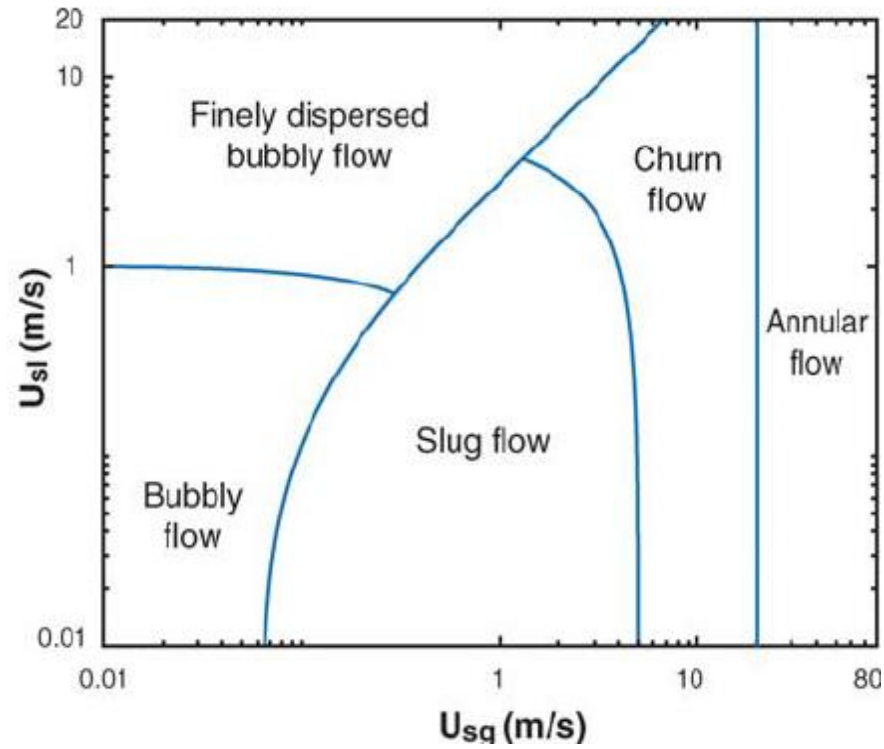
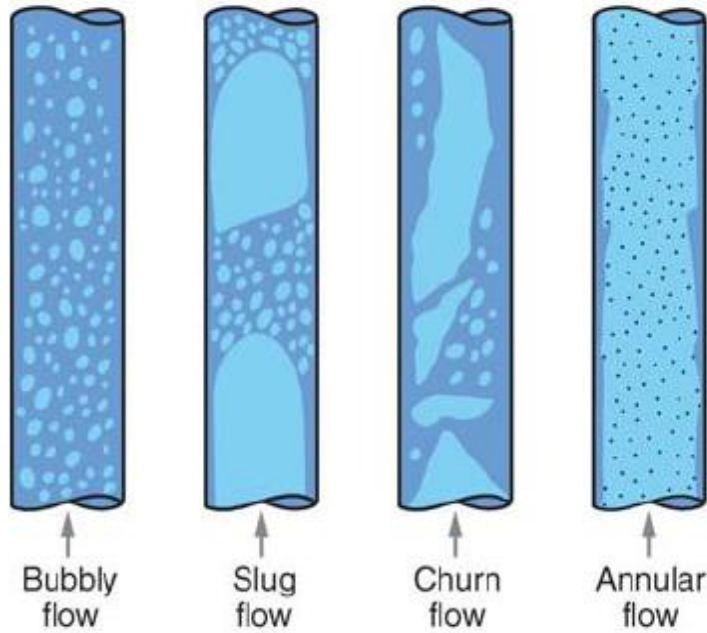
Καθεστώτα ροής σε οριζόντιο αγωγό



- Θόρυβος και τραντάγματα σωληνώσεων
- Βλάβες και πρόωρη φθορά αγωγών και εξαρτημάτων



Καθεστάτα ροής σε κατακόρυφο αγωγό



https://www.youtube.com/watch?v=GMp9Oc0Dy_U

https://www.youtube.com/watch?v=pkhVxqDg_fk

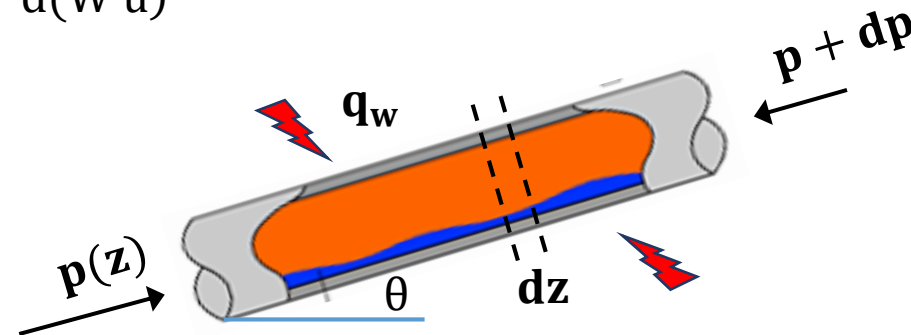
Αυλός
ατμοπαραγωγού

Ισοζύγια με αλλαγή φάσης (μοντέλο ομογενούς ροής)

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ $G = W/A = \rho u = \text{const}$ Μεταβολή πυκνότητας λόγω (α) αλλαγής φάσης (βρασμός $\Delta p \ll p$)
ή (β) εκτόνωσης/αποσυμπίεσης ($\Delta p \sim p$)

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΟΡΜΗΣ $-dp (\pi D^2/4) = \tau_w (\pi D) dz + \rho (\pi D^2/4) dz g \sin \theta + d(W u)$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{2f G^2}{D \rho} + \rho g \sin \theta + G^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$



ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$W \left[dh + d \left(\frac{u^2}{2} \right) + g \sin \theta dz \right] = q_w (\pi D) dz \Rightarrow dh + \frac{1}{2} G^2 d \left(\frac{1}{\rho^2} \right) + g \sin \theta dz = \frac{4 q_w}{G D} dz$$

(α) αλλαγή φάσης (σταθερή θερμορροή): $dh = d[xh_g + (1-x)h_l] \approx \frac{4 q_w}{G D} dz \Rightarrow dx \approx \frac{4 q_w}{G D h_{lg}} dz$, $h_{lg} = h_g - h_l$

(β) αποσυμπίεση (αδιαβατική): $dh + d \left(\frac{u^2}{2} \right) = dh + u du = dh + \frac{1}{2} G^2 d \left(\frac{1}{\rho^2} \right) \approx 0$

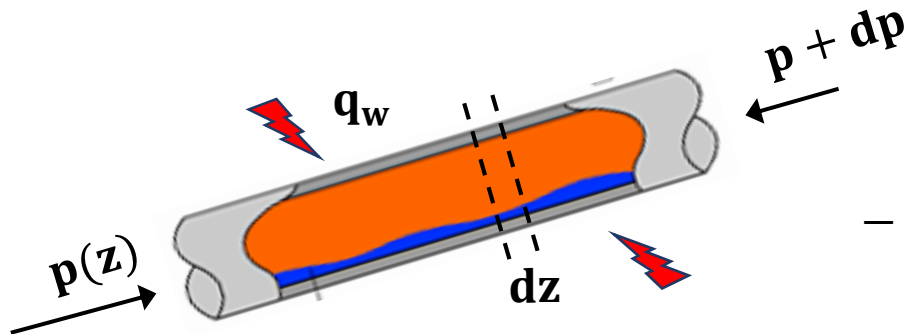
Πτώση πίεσης λόγω αλλαγής φάσης (μοντέλο ομογενούς ροής)

Υποθέτουμε κορεσμένο υγρό στην είσοδο, $x(z=0)=0$, και ομοιόμορφη θερμορροή, q_w , στο τοίχωμα:

$$dx = \frac{4q_w}{G D h_{lg}} dz \Rightarrow x = \frac{4q_w}{G D h_{lg}} z$$

Πτώση πίεσης λόγω τριβών

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = \frac{2f G^2}{D \rho} = \frac{2f}{D} G^2 (v_1 + v_{lg} x) \Rightarrow (\Delta P)_f = 2f G^2 v_1 \frac{L}{D} + \left(\frac{2L}{D}\right)^2 \left(\frac{f G q_w v_{lg}}{h_{lg}}\right)$$



Πτώση πίεσης μανομετρικού ύψους

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \rho g \sin\theta = \frac{g \sin\theta}{v_1 + v_{lg} x} \Rightarrow (\Delta P)_g = g \sin\theta \frac{G d h_{lg}}{4 q_w v_{lg}} \ln\left(1 + \frac{4 q_w v_{lg} L}{G h_{lg} v_1 D}\right)$$

Πτώση πίεσης λόγω μεταβολής ροής ορμής

$$-\left(\frac{dp}{dz}\right)_a = G^2 \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{\rho}\right) = G^2 \frac{d}{dz} (v_1 + v_{lg} x) \Rightarrow (\Delta P)_a = \frac{4 q_w G v_{lg} L}{h_{lg} D}$$

Ισοζύγια με αλλαγή φάσης (μοντέλο διαχωρισμένης ροής)

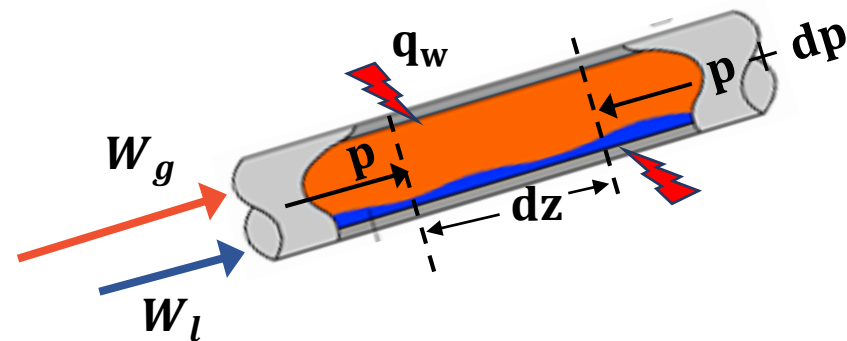
ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΑΖΑΣ

$$u_g = \frac{W_g}{\rho_g A_g} = \frac{xW}{\rho_g \alpha A} = G \frac{x}{\alpha \rho_g}$$

$$u_{sg} = \frac{W_g}{\rho_g A} = u_g \alpha$$

$$u_l = \frac{W_l}{\rho_l A_l} = \frac{(1-x)W}{\rho_l (1-\alpha)A} = G \frac{1-x}{(1-\alpha)\rho_l}$$

$$u_{sl} = \frac{W_l}{\rho_l A} = u_l (1-\alpha)$$



ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΟΡΜΗΣ

$$-dp (\pi D^2 / 4) = \tau_{wi} (\pi D) dz + [\rho_g \alpha + \rho_l (1-\alpha)] (\pi D^2 / 4) dz g \sin \theta + d(W_g u_g + W_l u_l)$$

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{4 \tau_{wi}}{D} + [\rho_g \alpha + \rho_l (1-\alpha)] g \sin \theta + G^2 \frac{d}{dz} \left[\frac{x^2}{\alpha \rho_g} + \frac{(1-x)^2}{(1-\alpha) \rho_l} \right]$$

$(-dp/dz)_{friction}$

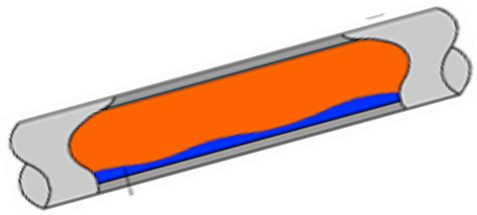
$(-dp/dz)_{gravity}$

$(-dp/dz)_{acceleration}$

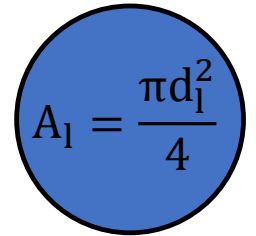
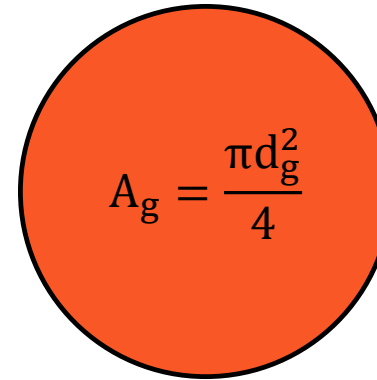
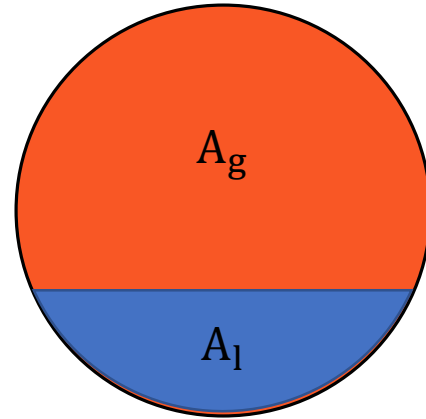
ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$d[xh_g + (1-x)h_l] + \frac{1}{2} G^2 d \left[\frac{x^3}{\alpha^2 \rho_g^2} + \frac{(1-x)^3}{(1-\alpha)^2 \rho_l^2} \right] + g \sin \theta dz = \frac{4 q_w}{G D} dz \Rightarrow dx \approx \frac{4 q_w}{G D h_{lg}} dz, \quad h_{lg} = h_g - h_l$$

ΓΙΑ ΚΑΘΕ ΦΑΣΗ: πτώση πίεσης ίδια με μονοφασικής ροής της ίδιας παροχής σε αγωγό κυκλικής διατομής A_g , A_l , αντίστοιχα



$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \left(\frac{dp}{dz}\right)_l$$



$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{1-\Phi} = 4f \frac{1}{d} \frac{\rho u^2}{2} \sim u^{1,8} d^{-1,2}$$

$$f = 0,046 Re^{-0,2}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{(dp/dz)_g}{(dp/dz)_{sg}} &= \left(\frac{u_g}{u_{sg}}\right)^{1,8} \left(\frac{d}{d_g}\right)^{1,2} = \alpha^{-1,8} \alpha^{-0,6} = \alpha^{-2,4} && (u_g A_g = u_{sg} A) \\ \frac{(dp/dz)_l}{(dp/dz)_{sl}} &= \left(\frac{u_l}{u_{sl}}\right)^{1,8} \left(\frac{d}{d_l}\right)^{1,2} = (1-\alpha)^{-1,8} (1-\alpha)^{-0,6} = (1-\alpha)^{-2,4} \end{aligned} \right\}$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \left(\frac{dp}{dz}\right)_l \Rightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{-2,4} = \frac{(dp/dz)_{sl}}{(dp/dz)_{sg}} \equiv X^2 \Rightarrow \alpha = f(X) \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dp}{dz}\right)_g &= \left(\frac{dp}{dz}\right)_{sg} \varphi_g^2(X) \\ \left(\frac{dp}{dz}\right)_l &= \left(\frac{dp}{dz}\right)_{sl} \varphi_l^2(X) \end{aligned} \right.$$

Πρόβλεψη διφασικής πτώσης πίεσης λόγω τριβών

Μεθοδολογία Lockhart-Martinelli

$$X_{tt}^2 = \frac{(dp/dz)_{sl}}{(dp/dz)_{sg}} = \left(\frac{1-x}{x}\right)^{1,8} \left(\frac{\rho_g}{\rho_l}\right) \left(\frac{\mu_l}{\mu_g}\right)^{0,2}$$

$$\mu_l/\mu_g > 1000, \quad G < 100 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

$$(\mu_l/\mu_g > 1000, \quad G > 100 \text{ kg/m}^2\text{s Chisholm})$$

$$\alpha = (1 + X^{0,8})^{-0,378}$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_g = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{sg} \varphi_g^2(X), \quad \varphi_g^2 = 1 + C X + X^2$$

$$C = 20,12,10,5$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_l = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{sl} \varphi_l^2(X), \quad \varphi_l^2 = 1 + \frac{C}{X} + \frac{1}{X^2}$$

Μεθοδολογία Friedel

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{fr} = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{L0} \varphi_{Friedel}^2 = \left(\frac{dp}{dz}\right)_{L0} \left(E + \frac{3,24FH}{Fr^{0,045} We^{0,035}} \right)$$

$$\alpha = \left(\frac{x}{\rho_g}\right) \left\{ \frac{1 + 0,12(1-x)}{\rho_H} + \frac{1,18(1-x)[g\sigma(\rho_l - \rho_g)]^{0,25}}{G^2 \rho_l^{0,5}} \right\}^{-1}$$

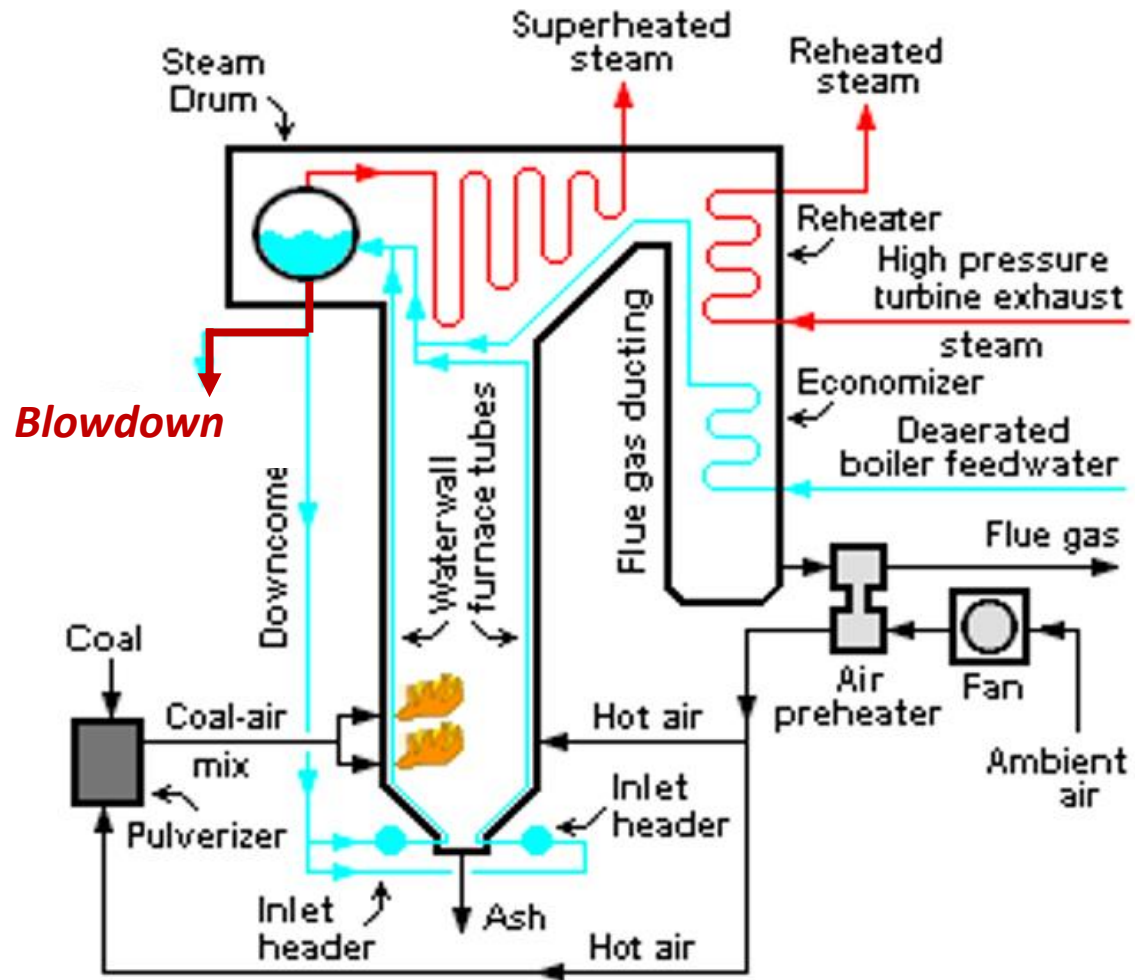
$$\mu_l/\mu_g < 1000, \quad G < 2000 \text{ kg/m}^2\text{s}$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_{L0} = \frac{4f_l G^2}{d 2\rho_l}, \quad f_{l,g} = 0,079 \left(\frac{G d}{\mu_{l,g}}\right)^{-0,25}$$

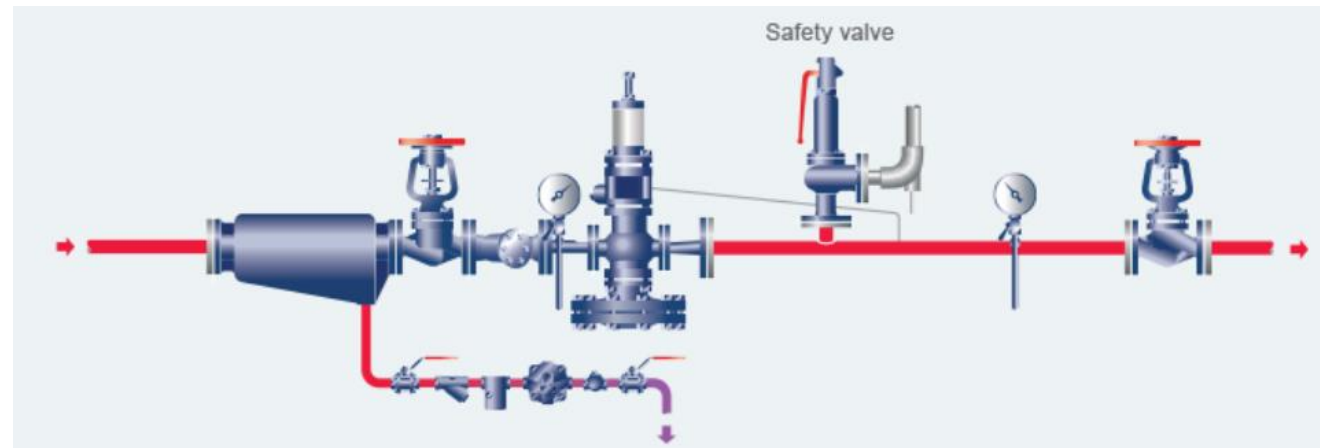
$$E = (1-x)^2 + x^2 \frac{\rho_l f_g}{\rho_g f_l}, \quad F = x^{0,78} (1-x)^{0,24},$$

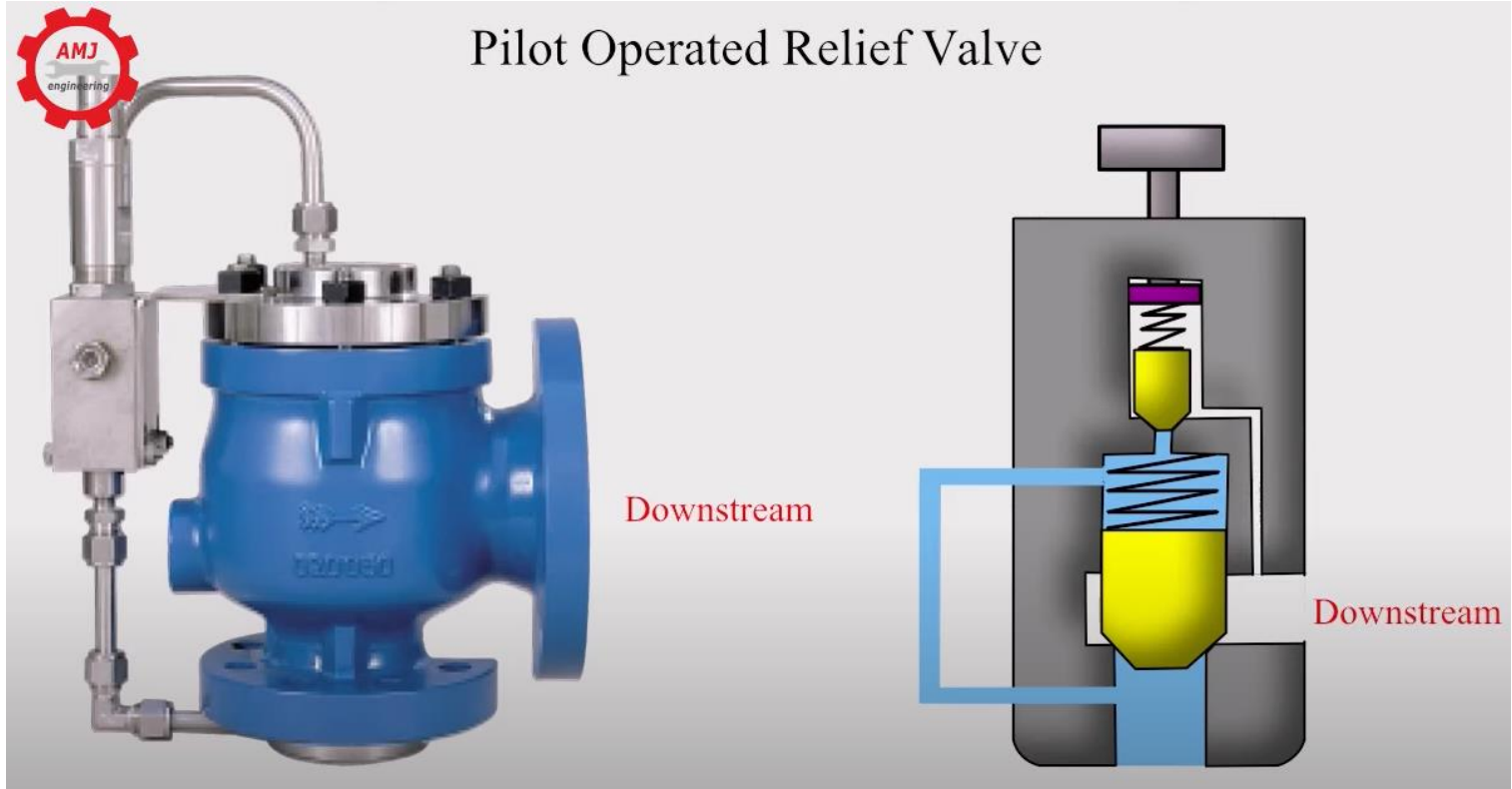
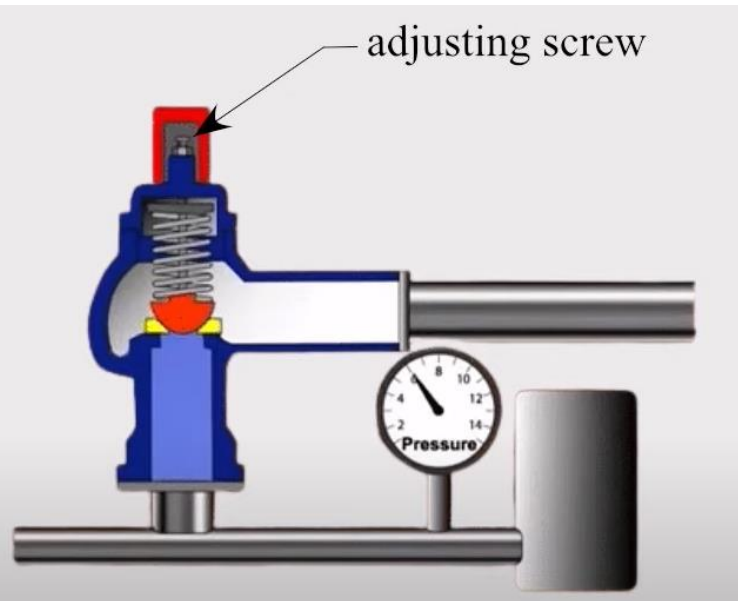
$$H = \left(\frac{\rho_l}{\rho_g}\right)^{0,91} \left(\frac{\mu_g}{\mu_l}\right)^{0,19} \left(1 - \frac{\mu_g}{\mu_l}\right)^{0,7}$$

$$Fr = \frac{G^2}{gd\rho_H^2}, \quad We = \frac{G^2 d}{\sigma\rho_H}, \quad \rho_H = \left(\frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l}\right)^{-1}$$



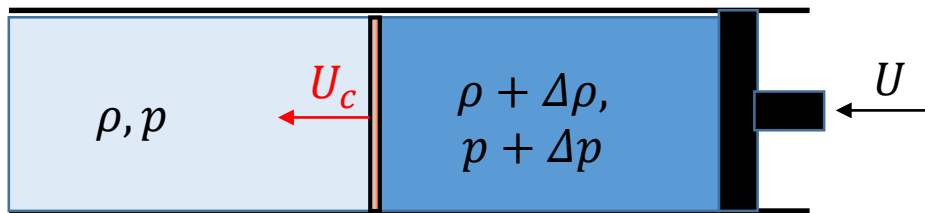
*Εκτόνωση συμπιεστού ρευστού
διαμέσου στένωσης*





$\rho = \rho(p, T)$ Ασυμπίεστη ροή όταν $\Delta\rho/\rho \ll 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2}, \quad c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2} \Rightarrow \boxed{\text{Ma} = \frac{u}{c}}$$



$$\left. \begin{aligned} \rho U_c &= (\rho + \Delta\rho)(U_c - U) \Rightarrow U = \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} U_c \\ (p + \Delta p) - p &= \rho U_c [U_c - (U_c - U)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta p = \rho U_c U \end{aligned} \right\}$$

$$\boxed{U_c^2 = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right) \left(\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\right) \xrightarrow{\Delta\rho/\rho \approx 0} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \equiv c^2}$$

Συμπεριφορά ασυμπίεστων ροών

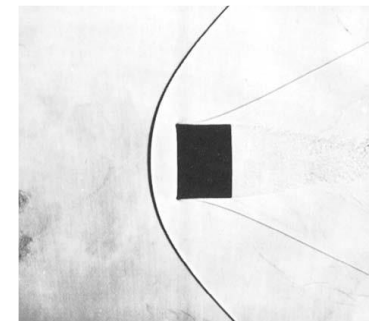
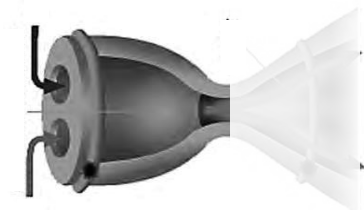
- Ακαριαία διάδοση μεταβολών πίεσης
- Ομαλή παράκαμψη σωμάτων

Όμως

- Ακουστική
- Φυσική συναγωγή

Κύρια χαρακτηριστικά συμπίεστων ροών

- Αδιαβατική αύξηση/μείωση της πίεσης προκαλεί αντίστοιχα θέρμανση/ψύξη (αντιστρεπτή ή μη-αντιστρεπτή μεταβολή)
- Ταχύτητες ροής συγκρίσιμες με την ταχύτητα του ήχου ($\text{Ma} \rightarrow 1$ ή $\text{Ma} > 1$)
- Παράκαμψη σωμάτων με κρουστικά κύματα ($\text{Ma} > 1$). Ασυνεχής μεταβολή ταχύτητας, πίεσης, θερμοκρασίας
- Στραγγαλισμός ροής σε στένωση ($\text{Ma} \rightarrow 1$)



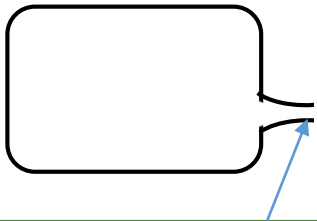
Ισεντροπική συμπιεστή ροή ιδανικού αερίου: ακροφύσια

Ιδιότητες ιδανικών αερίων ($p = \rho RT, R = \frac{\mathcal{R}}{M}$)

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s^{1/2} = \sqrt{\gamma RT},$$

$$C_p T + \frac{1}{2} u^2 = C_p T_0 \Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

Εκτόνωση μέσω ακροφυσίου



ισεντροπική μεταβολή
=
Αδιαβατική εκτόνωση
+
αμελητέες τριβές

Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m} = \rho u A \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$dH + u du = 0 \Rightarrow \frac{dp}{\rho} + u du = 0$$

Ταχύτητα ήχου

$$dp = c^2 d\rho$$

Για ισεντροπικές μεταβολές

T_0, p_0, ρ_0 :
ιδιότητες ανακοπής

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

T_*, p_*, ρ_* :
κρίσιμες ιδιότητες:

$$\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$
$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

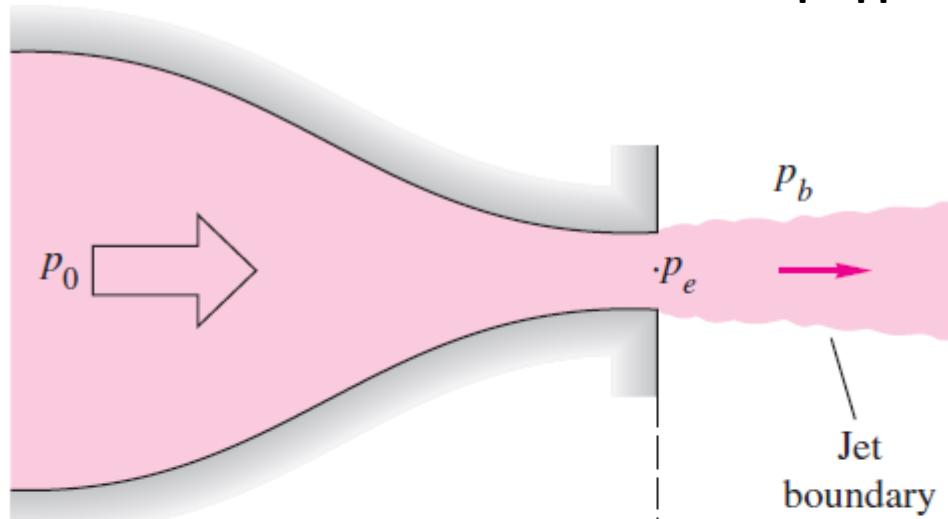
$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{dA}{A} \frac{1}{Ma^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho u^2}}$$

Αντίθετη μεταβολή ρ, u για $Ma < 1$ και $Ma > 1$

Για $Ma = 1$ και επειδή du πεπερασμένη $\Rightarrow dA = 0$

Διαρροές και Βαλβίδες ασφαλείας

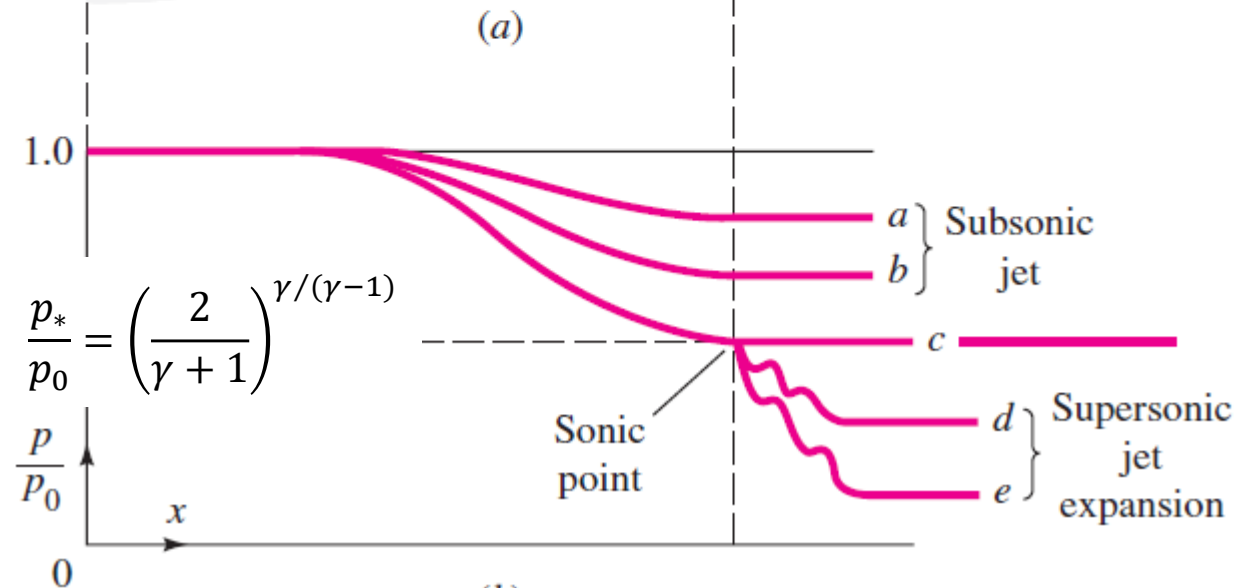
Στραγγαλισμός της ροής: Μείωση πίεσης \Rightarrow μείωση πυκνότητας \Rightarrow αύξηση ταχύτητας



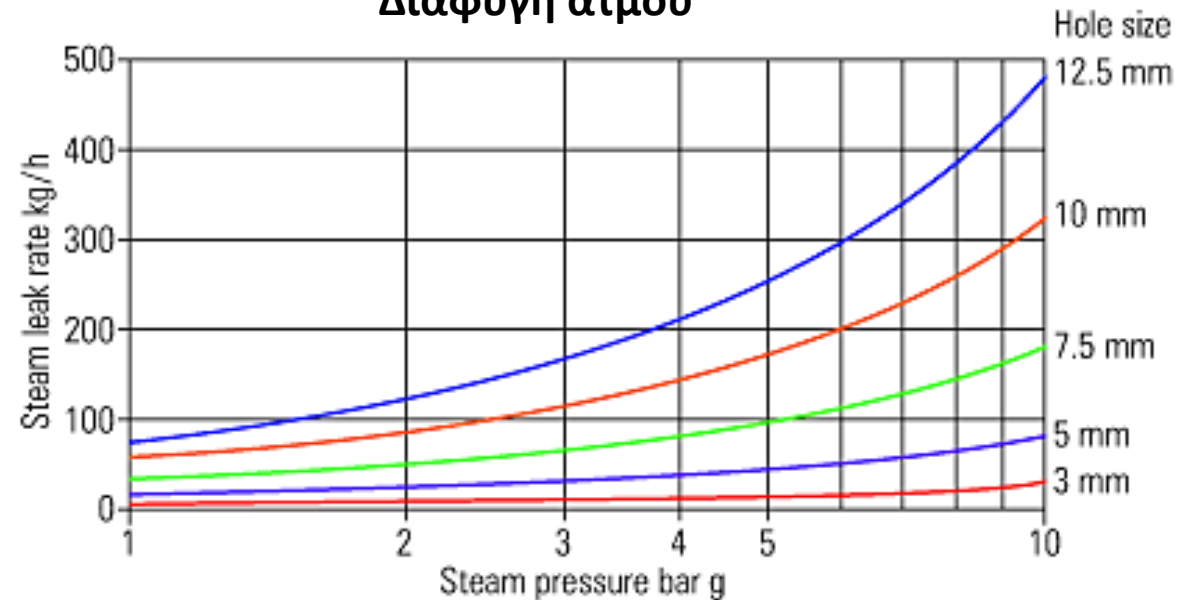
Ιδανικό αέριο- Ασυμπίεστο υγρό

$$\dot{m}_{max} = \rho_* A_* u_* = \rho_* A_{thr} c_* = A_{thr} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$

$$\dot{m}_{max} = A_{thr} \sqrt{2\rho (p_0 - p_b)}$$



Διαφυγή ατμού



Ατμός : $\gamma=1,135$ (κορεσμένος) $\gamma=1,3$ (υπέρθερμος)

Διαστασιολόγηση Βαλβίδας ασφαλείας

<https://www.spiraxsarco.com/learn-about-steam>

NWP = Normal working pressure

MAAP = Maximum allowable accumulated pressure

P_s = Safety valve set pressure

P_o = Safety valve overpressure

P_R = Safety valve relieving pressure

Safety valve

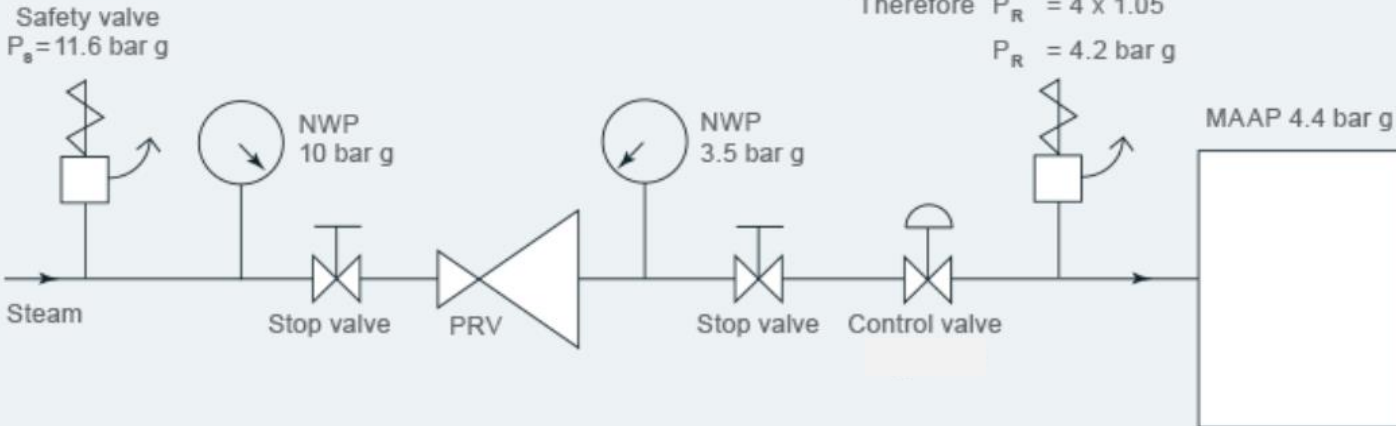
$P_s = 4.0 \text{ bar g}$

$P_o = 5\% \text{ of } P_s$

Therefore $P_R = 4 \times 1.05$

$P_R = 4.2 \text{ bar g}$

Therefore



Equation 3.21.2

$$\dot{m}_s = 12 K_v P_1 \sqrt{1 - 5.67 (0.42 - x)^2}$$

Where:

\dot{m}_s = Fault load (kg/h)

K_v = PRV full open capacity index ($K_{vs} = 6.3$)

x = Pressure drop = $\frac{P_1 - P_2}{P_1}$

P_1 = Fault pressure (taken as the set pressure of the upstream safety valve) (bar a)

P_2 = Relieving pressure of the apparatus safety valve (bar a)

Equation 3.21.2 is used when the pressure drop ratio is less than 0.42.

If the pressure drop ratio is 0.42 or greater, the mass flow is calculated using Equation 6.4.3

Equation 6.4.3

$$\dot{m}_s = 12 K_v P_1$$

SV615 flow capacity for saturated steam in kilogrammes per hour (kg/h)

(calculated in accordance with EN ISO 4126 at 5% overpressure)

Derated coefficient of discharge (K_{dr}) = 0.71

Valve size DN	15/20	20/32	25/40	32/50	40/65	50/80
Area (mm ²)	113	314	452	661	1 075	1 662
Set pressure (bar g)	Flow capacity for saturated steam kg/h					
0.5	65	180	259	379	616	953
1.0	87	241	348	508	827	1278
1.5	109	303	436	638	1037	1603
2.0	131	364	524	767	1247	1929
2.5	153	426	613	896	1458	2254
3.0	175	487	701	1026	1668	2579
3.5	197	549	790	1155	1879	2904
4.0	220	610	878	1284	2089	3230

Ταχύτητα ήχου διφασικού ρευστού (μοντέλο ομογενούς ροής)

«ΠΑΓΩΜΕΝΟ» ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ (Homogeneous Frozen Model-HFM)

$$c_g = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right)_s \quad c_l = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho_l} \right)_s \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \frac{1}{\rho} = \frac{x}{\rho_g} + \frac{1-x}{\rho_l} \end{array} \right\} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho} \right)_s = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_s = -\frac{1}{\rho^2 c^2} \Rightarrow \frac{1}{\rho^2 c^2} = \frac{x}{\rho_g^2 c_g^2} + \frac{1-x}{\rho_l^2 c_l^2} \text{ or } \frac{1}{\rho c^2} = \frac{\alpha}{\rho_g c_g^2} + \frac{1-\alpha}{\rho_l c_l^2}$$

ΔΙΦΑΣΙΚΟ ΡΕΥΣΤΟ ΣΕ ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ (Homogeneous Equilibrium Model-HEM)

$$p, x \rightarrow \rho, S = s_g x + s_l (1 - x)$$

$$p' = p + \Delta p, \quad S = s'_g x' + s'_l (1 - x') \rightarrow x' \rightarrow \rho'$$

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \approx \left(\frac{\Delta p}{\Delta \rho} \right)^{1/2}$$

