Έρπουσα ροή ($Re \ll 1$)

Κατηγοριοποίηση ροών με βάση τον αριθμό Reynolds

$$\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}\right) = -\underline{\nabla} p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$$

αδρανειακές δυνάμεις (επιτάχυνση)

δυνάμεις πίεσης

Ιξώδεις δυνάμεις

Χαρ/κή ταχύτητα: U Χαρ/κό μήκος: L

Σύγκριση αδρανειακών με ιξώδεις δυνάμεις

$$\frac{\left|\rho \underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}\right|}{\left|\mu \underline{\nabla}^2 \underline{u}\right|} \sim \frac{\rho U (U/L)}{\mu\, U/L^2} = \frac{\rho U L}{\mu} = \mathbf{Re}$$

Αδιαστατοποίηση εξίσωσης Navier-Stokes

$\underline{\hat{u}} = \underline{u}/U$ $\underline{\hat{x}} = \underline{x}/L$ $\hat{t} = tU/L$

Η πίεση εξισορροπεί την κυρίαρχη δύναμη

$$\mathrm{Re} \gg 1 \;\Rightarrow\; \Delta p \sim \rho U^2$$

$$\mathrm{Re} \ll 1 \;\Rightarrow\; \Delta p \sim \mu\, U/L$$

Re<<1: Έρπουσα ροή

$$Re\,\cancel{\left(\frac{\partial \underline{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \underline{\hat{u}}\cdot\underline{\hat{\nabla}}\,\underline{\hat{u}}\right)} = -\underline{\hat{\nabla}}\hat{p} + \nabla^2 \underline{\hat{u}}$$

Re>>1: Αδρανειακή ροή

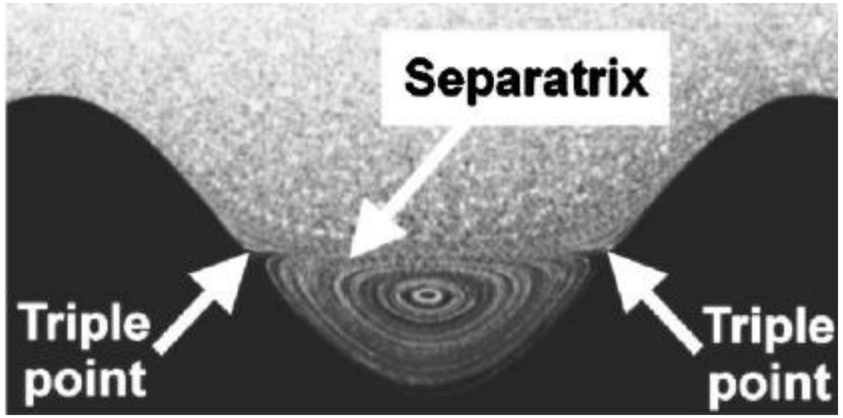
$$\frac{\partial \underline{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \underline{\hat{u}}\cdot\underline{\hat{\nabla}}\,\underline{\hat{u}} = -\underline{\hat{\nabla}}\hat{p} + \cancel{\frac{1}{Re}\nabla^2 \underline{\hat{u}}}$$

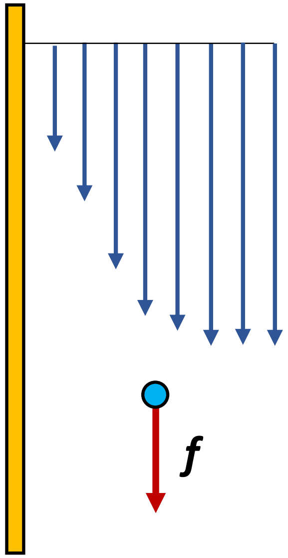
$$\boxed{-\underline{\nabla} p + \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} = 0}$$

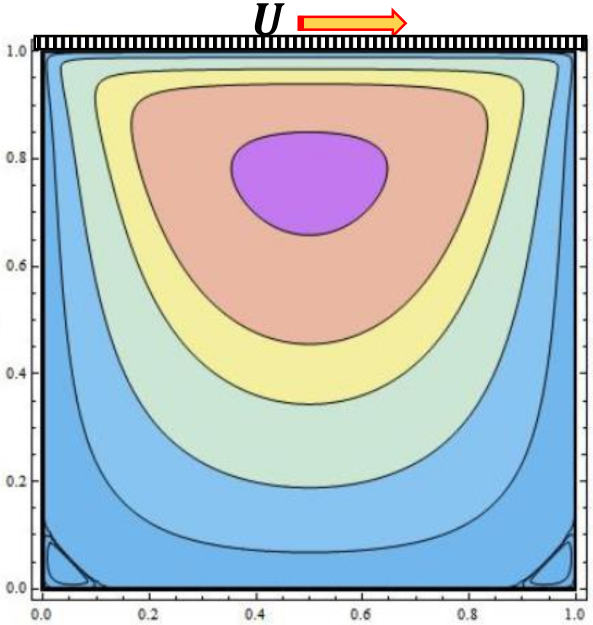
Ακριβής ισορροπία ιξωδών δυνάμεων και δυνάμεων πίεσης

$$\boxed{(\underline{u}, p) \quad \text{λύση} \; \rightarrow \; (-\underline{u}, -p) \quad \text{είναι επίσης λύση}}$$

- Ροή με συμμετρικό σύνορο είναι συμμετρική
- Η δύναμη σε σωματίδιο που κινείται κοντά σε τοίχωμα είναι παράλληλη με το τοίχωμα
- Η έρπουσα ροή είναι αντιστρεπτή (χρονική εξάρτηση μόνο μέσω των συνοριακών συνθηκών)
  www.youtube.com/watch?v=QcBpDVzBPMk (2-3,5 min)





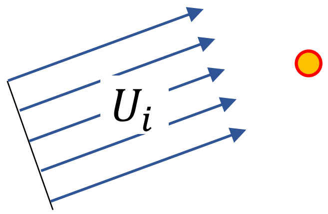


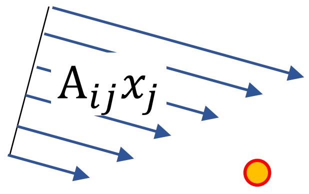
$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0}$

$\boxed{\mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} = \underline{\nabla} p}$

Γραμμική εξίσωση ως προς τους άγνωστους p και $\underline{u}$

Κατασκευή λύσεων με γραμμικό συνδυασμό απλούστερων





Ροή γύρω από στερεό σώμα $\boxed{\underline{u} = \underline{u}_\infty + \underline{u}_s}$

$\underline{u}_\infty$: Το πεδίο ταχύτητας μακριά από το σώμα, πχ $u_i = \mathrm{U}_i$ (σταθερή ταχύτητα) ή $u_i = \mathrm{A}_{ij} x_j$ (γραμμικό πεδίο)

$\underline{u}_s$: Ιδιόμορφη λύση $\lim_{r \to \infty} \underline{u}_s = 0$ και $\lim_{r \to 0} \underline{u}_s = \infty$ («διαφοροποιεί» το πεδίο ταχύτητας κοντά στο σώμα)

Παραγωγή ιδιόμορφων λύσεων

$$\left.\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= 0 \\ \mu \underline{\nabla}^2 \underline{u} &= \underline{\nabla} p \end{aligned}\right\} \Rightarrow \nabla^2 p = 0$$

Ιδιόμορφες λύσεις της πίεσης: $p(\underline{x}) = 0, \quad \dfrac{A_0}{r}, \quad A_j \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{1}{r}\right) = \dfrac{A_j x_j}{r^3}, \quad B_{jk} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{x_j}{r^3}\right)$

$$\mu \underline{\nabla}^2 u_i = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{A_j x_j}{r^3}\right) = A_j \left(\frac{\delta_{ij}}{r^3} - 3\frac{x_i x_j}{r^5}\right)$$

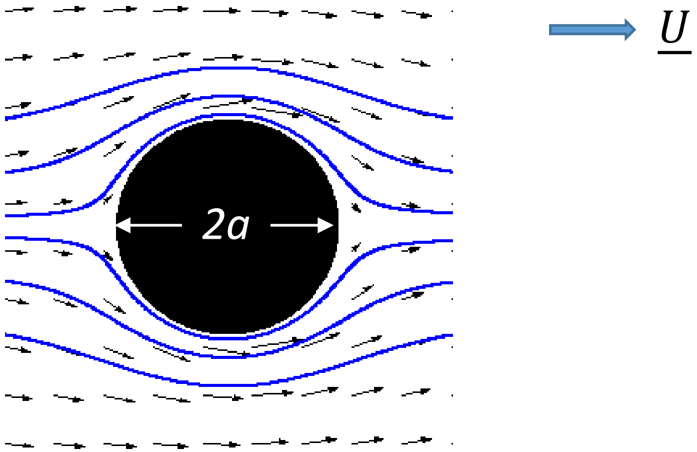
Μαντεύουμε λύση της μορφής: $u_i = A_j \left(\dfrac{a \delta_{ij}}{r^m} + \dfrac{b x_i x_j}{r^n}\right)$

$\Rightarrow$

Πεδίο ταχύτητας λόγω σημειακής δύναμης (Stokeslet)

$$\boxed{u_i = \frac{A_j}{2\mu}\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}\right), \qquad p = \frac{A_j x_j}{r^3}}$$

Έρπουσα ροή γύρω από σφαίρα



Αναγκαίες συνθήκες για την ιδιόμορφη συνιστώσα

$$\left.\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{u}_\infty + \underline{u}_s \\ \underline{u}_\infty &= \underline{U} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} r \to \infty &: \underline{u}_s \to 0 \\ r = a &: \underline{u}_s = -\underline{U} \end{aligned}$$

Επειδή η συνθήκη έχει μία διανυσματική σταθερά, θα επιλέξουμε αντίστοιχες ιδιόμορφες λύσεις

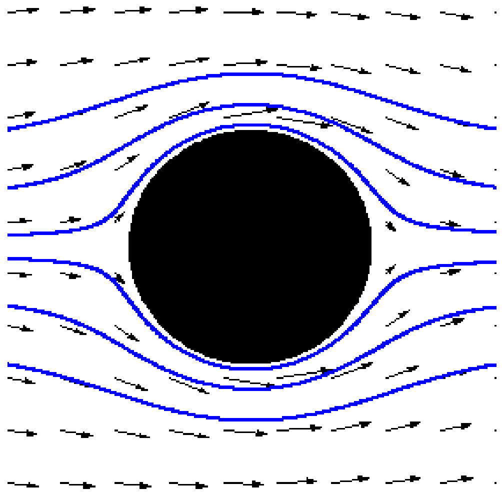
$$u_i(\underline{x}) = A_j\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}\right) + B_j\left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5}\right) \Rightarrow u_i(r=a) = -U_i = \delta_{ij}\left(\frac{A_j}{a} - \frac{B_j}{a^3}\right) + x_i x_j\left(\frac{A_j}{a^3} + 3\frac{B_j}{a^5}\right) \Rightarrow \begin{cases} B_j = -\frac{1}{3}a^2 A_j \\ A_j = -\frac{3}{4}aU_j \end{cases}$$

$$\boxed{u_i(\underline{x}) = U_i - \frac{3}{4}aU_j\left(\frac{\delta_{ij}}{r} + \frac{x_i x_j}{r^3}\right) + \frac{1}{4}a^3 U_j\left(\frac{-\delta_{ij}}{r^3} + 3\frac{x_i x_j}{r^5}\right), \qquad p = -\frac{3}{2}\mu a U_j \frac{x_j}{r^3}}$$

Η δύναμη στη σφαίρα (νόμος Stokes)

$$F_i = \int_{r=a} \sigma_{ij} n_j dS\ , \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \Rightarrow \boxed{F_i = 6\pi\mu a U_i}$$

Εφαρμογές έρπουσας ροής γύρω από σφαίρα



Νόμος Stokes

$$\boxed{\underline{F} = 6\pi\mu a \underline{U}_\infty}$$

$$Re < 1$$

Γενικότερα, **συντελεστής οπισθέλκουσας** C_D

$$F = C_D\left(\frac{1}{2}\rho U_\infty^2\right)(\pi a^2) \qquad Re = \frac{\rho U_\infty a}{\mu} < 1 \Rightarrow C_D = \frac{12}{Re} = \frac{24}{Re_d}$$

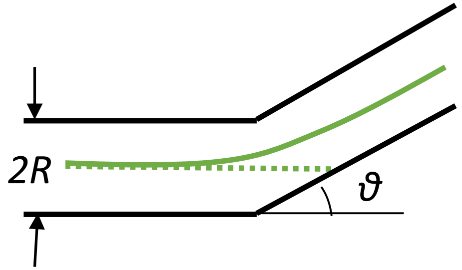
Εφαρμογές

Ταχύτητα ελεύθερης πτώσης - Σχεδιασμός διαχωριστών φάσεων - Φυγοκέντριση

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_p g = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho g + 6\pi\mu a u_p \Rightarrow \boxed{u_p = \frac{2a^2(\rho_p - \rho)g}{9\mu} = \frac{d_p^2(\rho_p - \rho)g}{18\mu}}$$

Χαρακτηριστικός χρόνος απόκρισης σε αλλαγή ταχύτητας- Αδρανειακή πρόσκρουση

$$m_p\frac{du_p}{dt} = 6\pi\mu a(U - u_p) \Rightarrow u_p = U\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \boxed{\tau = \frac{m_p}{6\pi\mu a} = \frac{2a^2\rho_p}{9\mu}}$$



Αριθμός Stokes: $St = \dfrac{\tau}{L/U} = \dfrac{\text{χαρ/κός χρόνος απόκρισης}}{\text{χαρ/κός χρόνος πρόσκρουσης}} = \dfrac{2a^2\rho_p U\tan\vartheta}{9\mu R}$

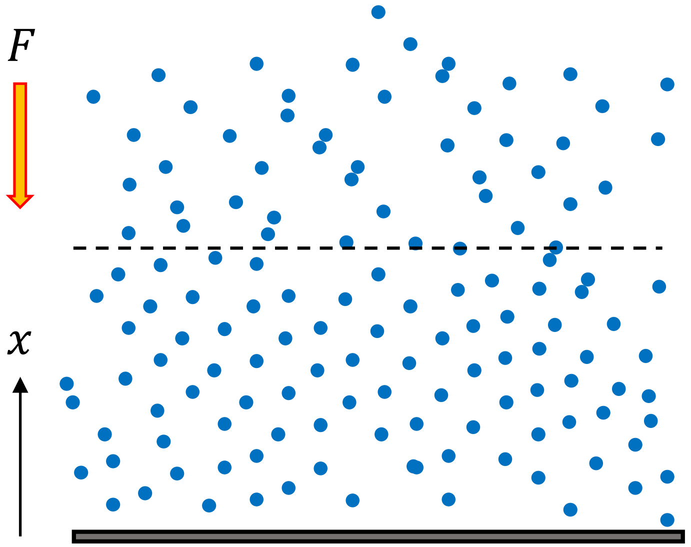
Μοριακή Θερμοδυναμική-Στατιστική Μηχανική

Κάθε στοιχειώδες σωματίδιο έχει την ίδια μέση κινητική ενέργεια (θερμοκρασία)

$$\boxed{\mathrm{m}\langle u^2\rangle/2 = 3kT/2}$$

Η συγκέντρωση σωματιδίων στο χώρο ικανοποιεί την κατανομή Boltzmann, όπου $U(\underline{x})$ η δυναμική ενέργεια λόγω αλληλεπίδρασης με εξωτερικές δυνάμεις και γειτονικά σωματίδια

$$\boxed{C(\underline{x}) = C_0 e^{-U(\underline{x})/kT}}$$



Παράδειγμα σταθερής δύναμης

Ροή λόγω διάχυσης (τυχαία κίνηση)

Ροή λόγω δύναμης (συντεταγμένη κίνηση)

$$\left.\begin{aligned} n = -\mathcal{D}\frac{dC}{dx} + uC = 0 \\ F = 6\pi\mu a u \end{aligned}\right\} \quad \frac{dC}{C} = \frac{F dx}{6\pi\mu a\mathcal{D}} = -\frac{dU}{6\pi\mu a\mathcal{D}}$$

Η συγκέντρωση ισορροπίας θα διαμορφωθεί ώστε να ικανοποιεί την κατανομή Boltzmann:

$$\frac{dC}{C} = -\frac{dU}{kT}$$

$$\boxed{\mathcal{D} = \frac{kT}{6\pi\mu a}}$$

(Εξίσωση Einstein)

Θεωρία λίπανσης

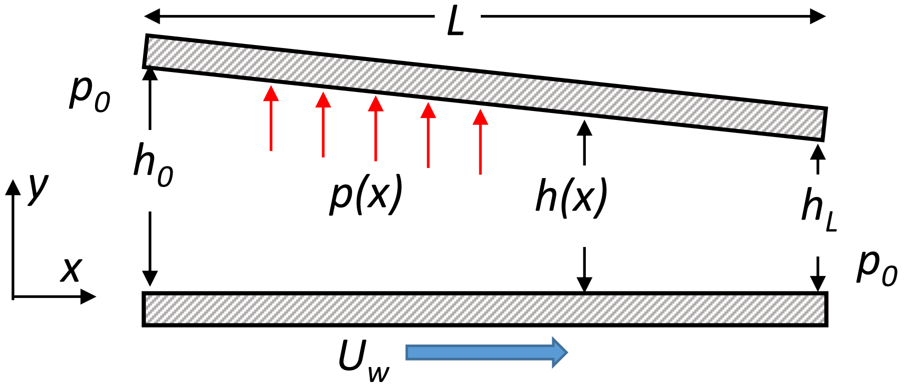
$x \sim L\,, y \sim H$ $\boxed{\varepsilon = H/L \ll 1}$ *Μεγάλη διαφοροποίηση κλιμάκων μήκους*

$$\underset{U^2/L}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial u}{\partial t}}} + u\underset{U^2/L}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial u}{\partial x}}} + v\underset{U^2/L}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial u}{\partial y}}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\underset{\nu U/L^2}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}} + \underset{\nu U/H^2}{\underset{\uparrow}{\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}}\right)$$

$$\nu U/H^2 \gg U^2/L \Leftrightarrow \boxed{\varepsilon^2 Re \ll 1}$$

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{\partial p}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0$$

Υδροδυναμική λίπανση

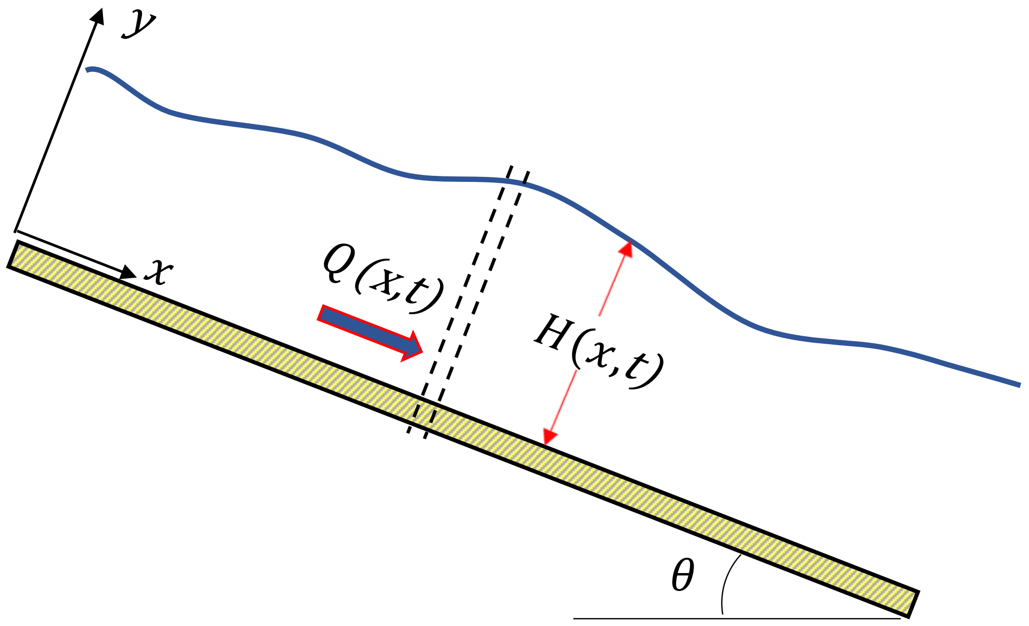


Μονοδιάστατη ροή για το τοπικό ύψος καναλιού

$$u(x,y) = U_w\left(1 - \frac{y}{h}\right) - \frac{y}{h}\left(1 - \frac{y}{h}\right)\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$Q = \int_0^h u\,dy = \frac{1}{2}U_w h - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp}{dx}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{6\mu U_w}{h^2} - \dfrac{12\mu Q}{h^3} \\ \\ p(0) = p(L) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{U_w \int_0^L (1/h^2(x))\,dx}{2\int_0^L (1/h^3(x))dx}}$$



Ισοζύγιο μάζας

$$\left.\begin{aligned} &H_t + u(H)H_x = v(H) \\ &u_x + v_y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{H_t + Q_x = 0}$$

$$\left[\,[Q(x) - Q(x+dx)]dt = [H(t+dt) - H(t)]dx\,\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &x{\sim}L\,, y{\sim}H\,,\ \varepsilon = H/L \ll 1 \ \Rightarrow \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx -\rho g \sin\theta + \frac{\partial p}{\partial x} \\ &-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \ \Rightarrow p(x,y) = p(x,H) + \rho g \cos\theta\,(H - y) \\ &p(x,H) = -\gamma\kappa = -\gamma\frac{H_{xx}}{(1+H_x^2)^{3/2}} \approx -\gamma H_{xx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{1}{2\mu}(\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta\, H_x + \gamma H_{xxx})y(2\mathrm{H} - y) \Rightarrow Q = \int_0^H u\,dy = \frac{\mathrm{H}^3}{3\mu}(\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta\, H_x + \gamma H_{xxx})$$

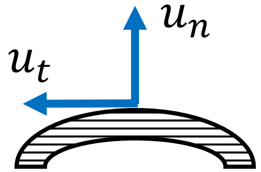
$$\boxed{H_t + \left[\frac{\mathrm{H}^3}{3\mu}(\rho g \sin\theta - \rho g \cos\theta\, H_x + \gamma H_{xxx})\right]_x = 0}$$

Ιδανική ροή $(Re \to \infty)$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t}+\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}\right)=\rho\frac{\mathrm{D}\underline{u}}{Dt}=-\underline{\nabla}p+\cancel{\mu\nabla^2\underline{u}}+\rho\underline{g}}$$

$$\frac{|\rho\underline{u}\cdot\underline{\nabla}\,\underline{u}|}{|\mu\underline{\nabla}^2\underline{u}|}\sim\frac{\mathrm{UL}}{\nu}=Re=\frac{L^2}{\nu}\frac{U}{L}=\frac{\tau_{viscous}}{\tau_{inertial}}\gg 1$$

- Ικανοποιείται μόνον η συνοριακή συνθήκη μη-διείσδυσης
- Δεν παράγεται στροβιλότητα στα στερεά τοιχώματα
- Γρήγορες μεταβολές που δεν προλαβαίνουν να επηρεαστούν από ιξώδεις δυνάμεις
- Οριακό στρώμα στροβιλότητας δεν αποκολλάται



Συνάρτηση δυναμικού

$$\boxed{\underline{\omega}=\underline{\nabla}\times\underline{u}=0\Rightarrow\underline{u}=\underline{\nabla}\varphi}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{u}=0$$

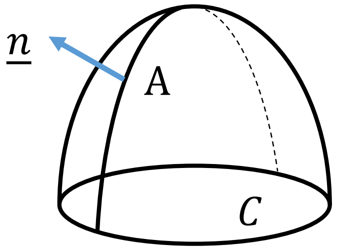
Εξίσωση Bernoulli (αποσύνδεση κινηματικής από δυναμική)

$$\underline{u}\cdot(\underline{\nabla}\,\underline{u})=\cancel{\underline{\omega}}\times\underline{u}+\underline{\nabla}\left(\frac{1}{2}\underline{u}\cdot\underline{u}\right)\Rightarrow$$

$$\boxed{\underline{\nabla}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}|\underline{u}|^2+\frac{p}{\rho}-\underline{g}\cdot\underline{x}\right)=0}$$

Θεώρημα Stokes – Θεώρημα Kelvin

$$\Gamma=\int_A(\underline{\nabla}\times\underline{u})\cdot\underline{n}dA=\int_A\underline{\omega}\cdot\underline{n}\,dA=\oint_C\underline{u}\cdot d\underline{l}$$



$$\frac{\mathrm{D}\Gamma}{Dt}=0\,,\qquad \underline{\omega}=0\Rightarrow\Gamma=0$$

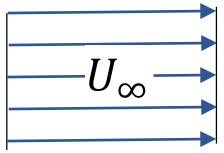
Το ρευστό διατηρεί και μεταφέρει τη στροβιλότητα

Στοιχειώδεις ροές και σύνθεση λύσεων

$$\left.\begin{array}{l} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0 \\ \underline{u} = \underline{\nabla}\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

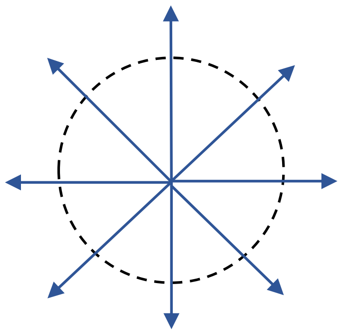
- Η εξίσωση Laplace είναι γραμμική: γραμμικός συνδυασμός λύσεων είναι επίσης λύση
- Κάθε ροϊκή γραμμή μπορεί να θεωρηθεί στερεό σύνορο της ροής (συνθήκη ολίσθησης)

Ομοιόμορφη ροή



$$\varphi = \mathrm{U}_\infty x$$

$$\left(u_x, u_y\right) = (\mathrm{U}_\infty, 0)$$

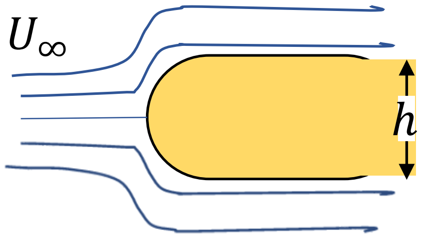


Σημειακή πηγή/καταβόθρα (2-D)

$$\varphi = \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\ln r, \quad u_r = \frac{M}{2\pi r}, u_\theta = 0, \quad \left(u_x, u_y\right) = \left(\frac{Mx}{2\pi r^2}, \frac{My}{2\pi r^2}\right)$$

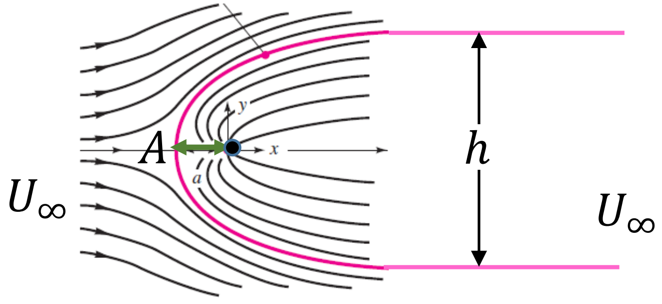
$$\text{(3-D)} \quad \varphi = -\frac{M}{4\pi r}, \quad u_r = \frac{M}{4\pi r^2}, \qquad \left(u_x, u_y, u_z\right) = \left(\frac{Mx}{4\pi r^3}, \frac{My}{4\pi r^3}, \frac{Mz}{4\pi r^3}\right)$$

Σημειακή πηγή + ομοιόμορφη ροή (2-D)

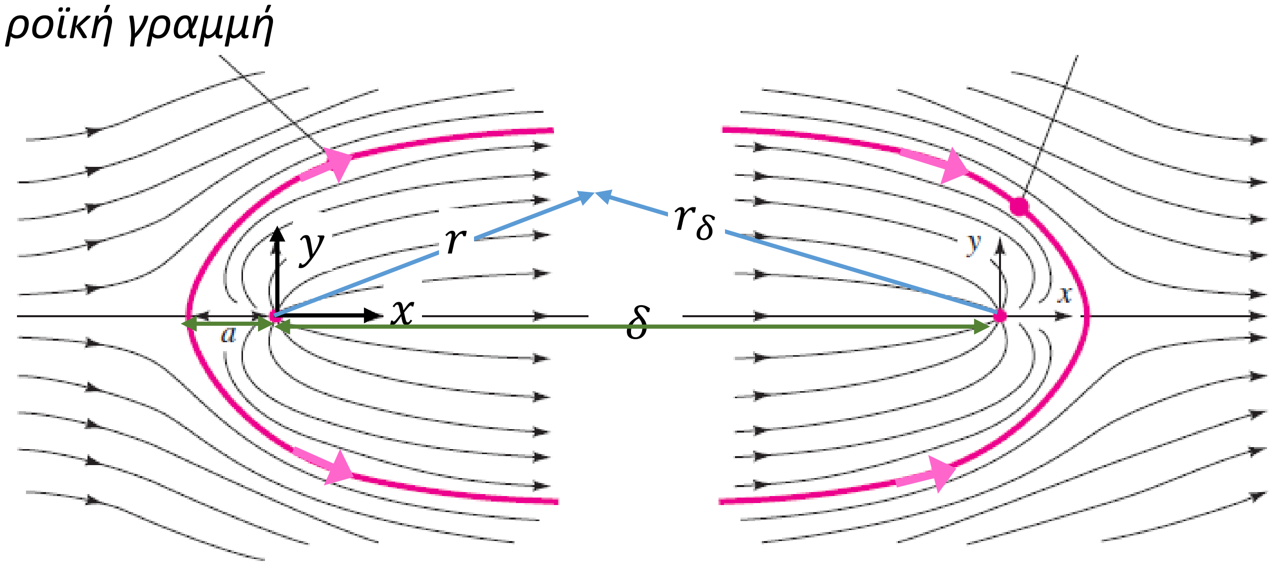


$$\varphi = \mathrm{U}_\infty x + \frac{\mathrm{M}}{2\pi}\ln r, \quad \left(u_x, u_y\right) = (U_\infty, 0) + \left(\frac{Mx}{2\pi r^2}, \frac{My}{2\pi r^2}\right)$$

Σημείο ανακοπής: $\left(A = -\frac{M}{2\pi U_\infty}, 0\right)$ Εύρος: $h = \frac{M}{U_\infty}$



Πηγή + Καταβόθρα + Ομοιόμορφη ροή



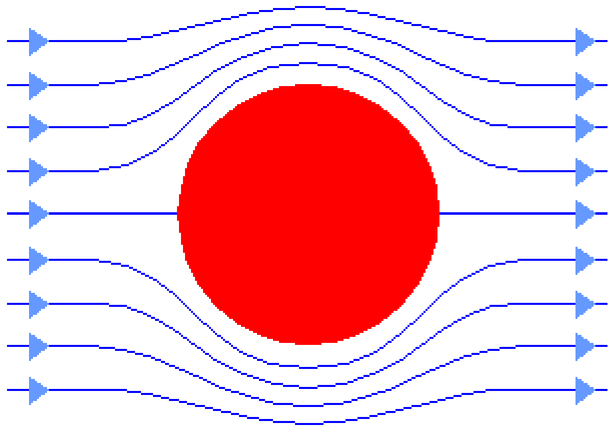
$$r^2 = x^2 + y^2$$
$$r_\delta^2 = (x-\delta)^2 + y^2$$

$$\left(u_x, u_y\right) = (U_\infty, 0) + \frac{M}{2\pi}\left[\frac{(x,y)}{r^2} - \frac{(x-\delta, y)}{r_\delta^2}\right]$$

$$\varphi = U_\infty x + \frac{M}{2\pi} \ln r - \frac{M}{2\pi} \ln r_\delta \approx U_\infty x + \frac{M\delta}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \quad (\delta \ll x, y)$$

Ροή γύρω από κύλινδρο ακτίνας α

(πηγή + καταβόθρα ⇒ διπλέτα)



$$\left.\begin{array}{l} \delta \to 0 \\ \delta M = 2\pi U_\infty a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{\varphi = U_\infty\left(x + \frac{a^2 x}{x^2+y^2}\right)}$$

$$\left(u_x, u_y\right) = (U_\infty, 0) + \frac{U_\infty a^2}{r^4}\left(y^2 - x^2, -2xy\right)$$

Όμως $\boxed{\underline{F} = \int_S p\underline{n}dS = 0 \text{ !!!}}$

Αλληλεπίδραση ροής με ιδανικό στρόβιλο

Στρόβιλος σε ιδανική ροή

(Ευθύγραμμος ή σημειακός στρόβιλος)

Αναζητούμε ροή με κυκλικές ροϊκές γραμμές

$$(u_r, u_\theta, u_z) = (0, u_\theta(r), 0)$$

$$\underline{\omega} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = (0,0,\omega_z) = \underline{0} \quad (\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = 0)$$

$$\omega_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{r}, \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta}$$

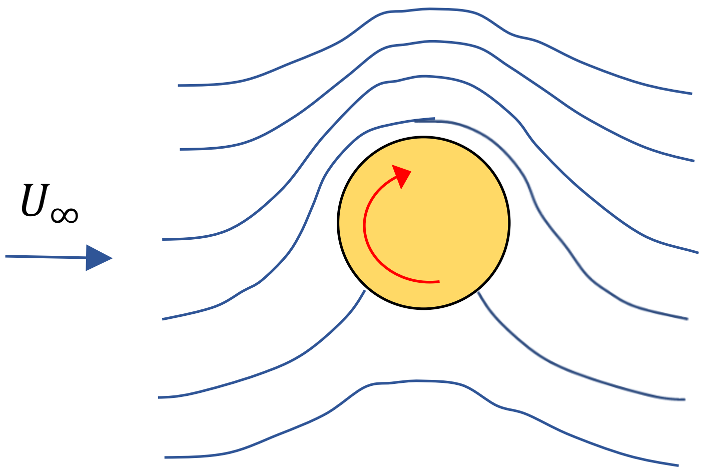
ή $$(u_x, u_y) = \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(-y, x)$$

$$\Gamma = \oint_C \underline{u} \cdot d\underline{l} = \int_A \underline{\omega} \cdot \underline{n} dA \neq 0$$

Άπειρη στροβιλότητα στο κέντρο της ροής

Ροή με κυκλοφορία γύρω από κύλινδρο

$$(u_x, u_y) = (U_\infty, 0) + \frac{U_\infty a^2}{r^4}(y^2 - x^2, -2xy) + \frac{\Gamma}{2\pi r^2}(-y, x)$$



Σημείο ανακοπής σε γωνία $\pm\alpha$

$\Gamma = 4\pi a U_\infty \sin\alpha$

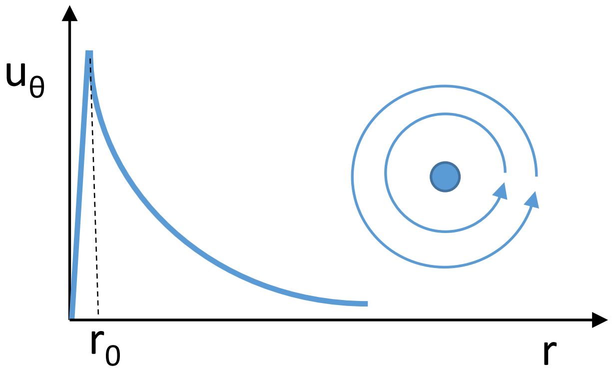
Η δύναμη από την πίεση στην επιφάνεια

$$\boxed{\underline{F} = (0, -\rho \Gamma U_\infty)}$$

- Στο πλαίσιο της ιδανικής ροής, η κυκλοφορία είναι αυθαίρετη (πολλαπλές λύσεις)
- Στην πραγματικότητα, η κυκλοφορία οφείλεται στο ιξώδες και τη συνθήκη μη-ολίσθησης

Μοντελοποίηση και συμπεριφορά στροβίλου

Ευθύγραμμος (ή σημειακός) στρόβιλος



$$u_\theta = \Omega r \qquad r \le r_0 \;\Rightarrow \omega_z = 2\Omega$$

$$u_\theta = \frac{\Omega r_0^2}{r} \qquad r \ge r_0 \;\Rightarrow \omega_z = 0$$

$$\boxed{\Gamma = (2\Omega)(\pi r_0^2)} \qquad r_0 \to 0 \;\Rightarrow\; \Omega \to \infty$$

Σταθερή κυκλοφορία σε όλο το μήκος του στροβίλου

Ισοζύγιο r-ορμής

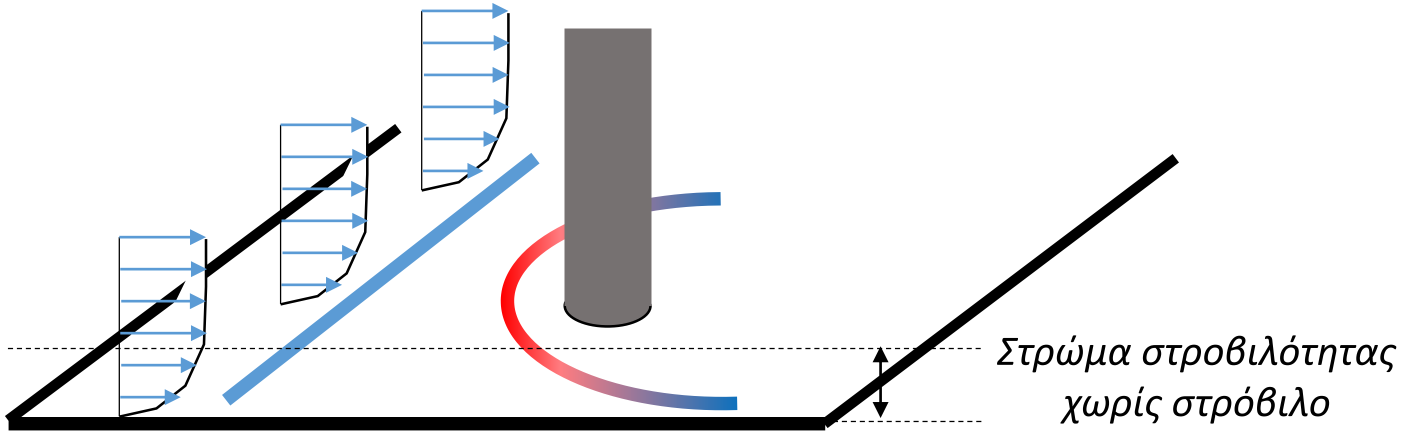
$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{u_\theta^2}{r} \Rightarrow p(r) = p_\infty - \frac{\rho\, \Omega^2 r_0^4}{2r^2}$$

Παραδείγματα

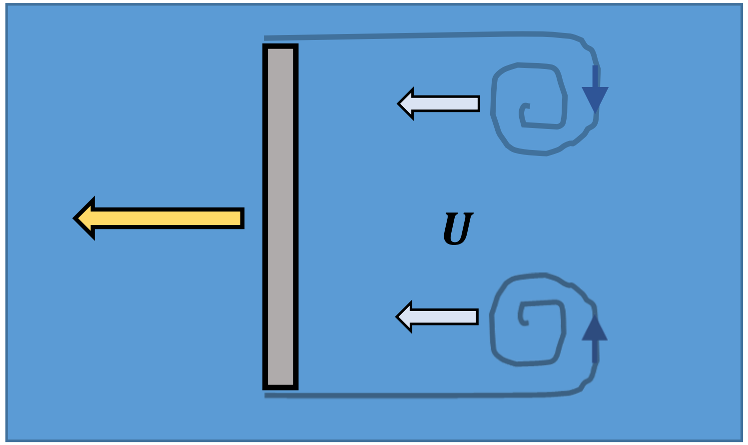
- *Ανεμοστρόβιλος «σηκώνει σπίτια»*
- *Συμπύκνωση υδρατμού στον πυρήνα (δίνη πτερύγων)*

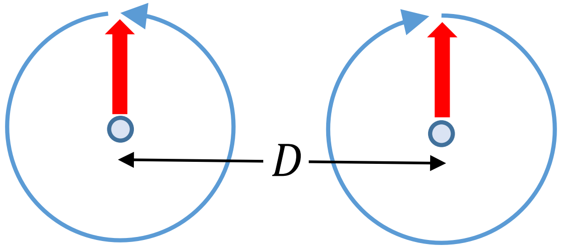
Ενίσχυση στροβιλότητας με εφελκυσμό

- *Δίνη απορροής νεροχύτη*
- *Πεταλοειδής δίνη*

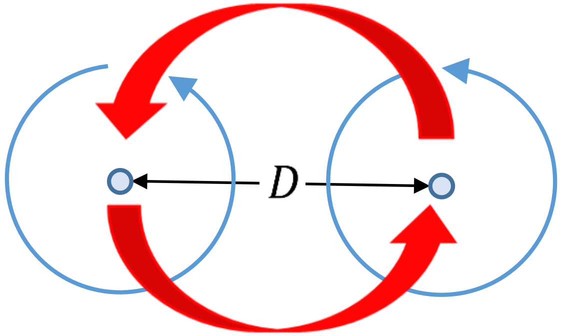


Στρόβιλοι (δίνες) στη μπανιέρα

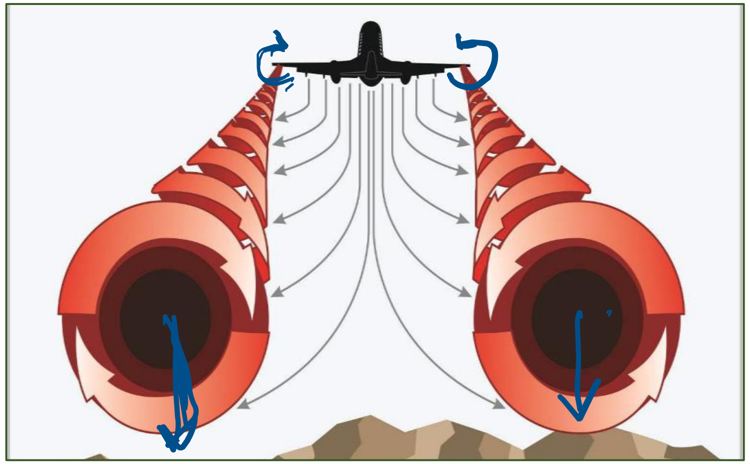




$$U = \frac{\Gamma}{2\pi D}$$

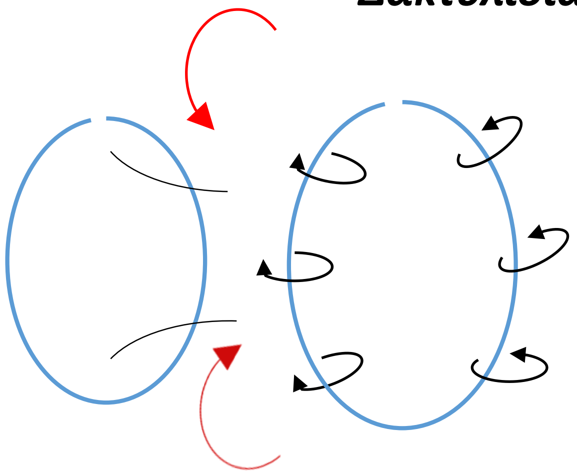


Στρόβιλοι άκρων πτερύγων (tip vortices)



https://www.youtube.com/watch?v=AolOz2AkpiE

Δακτυλίδια καπνού



Αεροτομές και πτερύγια

Θεώρημα Kutta-Zukowski

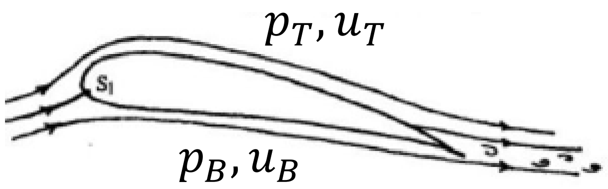
$$\boldsymbol{F_L = -\rho U_\infty \Gamma}$$

- Ισχύει για κυλινδρικά σώματα οποιασδήποτε διατομής
- Η κυκλοφορία καθορίζεται από το σχήμα της διατομής, σε συνδυασμό με την συμπεριφορά του οριακού στρώματος

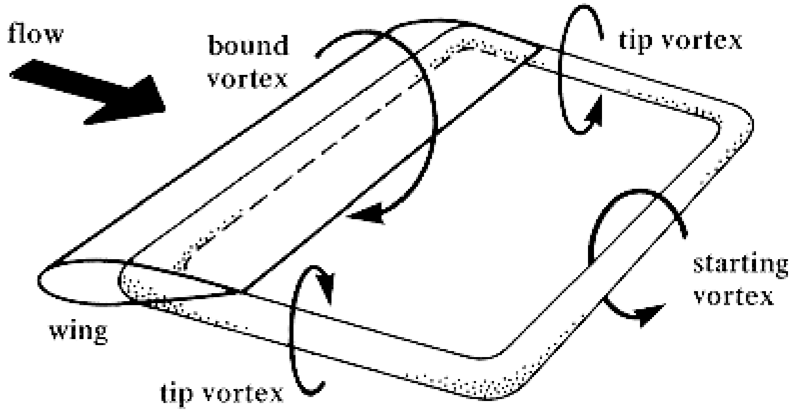
Το παράδειγμα της λεπτής αεροτομής

$$\boldsymbol{F_L} = \int_0^C (p_B - p_T)dx = \int_0^C \frac{1}{2}\rho(u_T^2 - u_B^2)dx \approx \rho U_\infty \int_0^C (u_T - u_B)dx$$

$$= \rho U_\infty\left(-\oint \underline{u}\, dx\right) = \boldsymbol{-\rho U_\infty \Gamma}$$



Δίνες γύρω από πτερύγιο αεροσκάφους



Θεωρία οριακού στρώματος

Η αναγκαιότητα του οριακού στρώματος

$$\frac{\partial \underline{\hat{u}}}{\partial \hat{t}} + \underline{\hat{u}} \cdot \underline{\hat{\nabla}}\, \underline{\hat{u}} = -\underline{\hat{\nabla}} \hat{p} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\hat{u}}$$

$Re \gg 1 \Rightarrow$ Αδρανειακές δυνάμεις >> Ιξώδεις δυνάμεις : $u_{inv}(x,0) = u_{\infty}(x)$

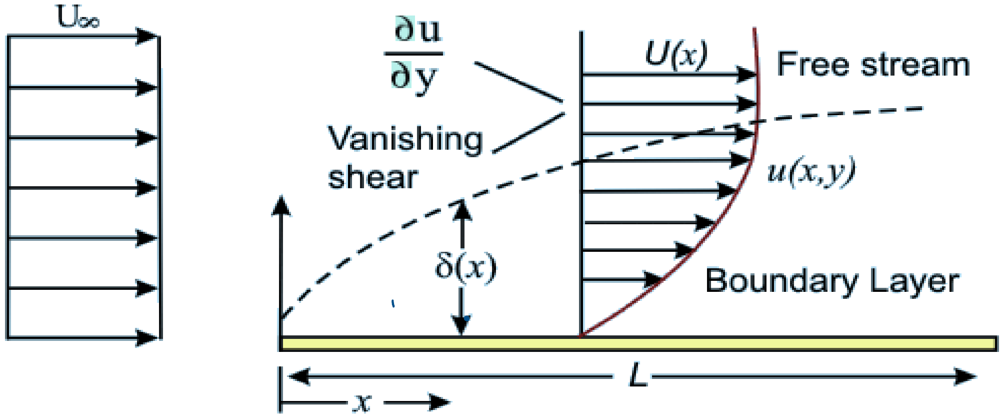
Όμως, η σωστή συνοριακή συνθήκη είναι: $u(x,0) = 0$

Άρα, $u \to 0$ σε πολύ μικρή απόσταση, δ, από το τοίχωμα.

(Matched asymptotic expansions: Ταιριασμένα ασυμπτωτικά αναπτύγματα)

Στο πάχος, δ, του οριακού στρώματος οι ιξώδεις δυνάμεις είναι ίσες με τις αδρανειακές. Άρα,

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ll \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \rho u \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{U}{\delta^2} \sim \rho U \frac{U}{L} \Rightarrow \boxed{\frac{\delta}{L} \sim Re^{-1/2}}$$



Χαρακτηριστικές κλίμακες οριακού στρώματος

$$\left.\begin{matrix} x \sim L & u \sim U \\ y \sim \delta & v \sim V \end{matrix}\right\} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow V \sim \frac{U\delta}{L} \ll U\,, \quad (\Delta p)_x \sim \Pi\,, \quad (\Delta p)_y \sim \Lambda$$

Ανάλυση τάξης μεγέθους και εξισώσεις οριακού στρώματος

Έστω ροή πάνω από τοίχωμα μικρής καμπυλότητας. Η ατριβής λύση δίνει: $u(x,0) = u_\infty(x), \quad p(x,0) = p_\infty(x)$
(x το μήκος τόξου πάνω στο τοίχωμα στη διεύθυνση ροής)

x-ορμή

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{U^2}{L} \qquad \frac{UV}{\delta} \sim \frac{U^2}{L} \qquad \frac{\Pi}{\rho L} \qquad \frac{\nu U}{L^2} \ll \frac{\nu U}{\delta^2} \qquad \frac{\nu U}{\delta^2} \sim \frac{U^2}{L}$$

y-ορμή

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{UV}{L} \sim \frac{U^2}{L}\frac{\delta}{L} \qquad \frac{\Lambda}{\rho\delta} \qquad \frac{\nu V}{L^2} \ll \frac{\nu V}{\delta^2} \qquad \frac{\nu V}{\delta^2} \sim \frac{U^2}{L}\frac{\delta}{L}$$

κατανομή πίεσης $\quad \frac{\Pi}{\rho L} \sim \frac{U^2}{L}, \; \frac{\Lambda}{\rho\delta} \sim \frac{U^2}{L}\frac{\delta}{L} \Rightarrow \frac{\Lambda}{\Pi} \sim \frac{\delta^2}{L^2} \lll 1$

<u>Μέσα στο οριακό στρώμα</u>: $\quad \frac{\partial p}{\partial y} \approx 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp_\infty}{dx}$

<u>Στο σύνορο</u>:

$$u_\infty \frac{du_\infty}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp_\infty}{dx}$$ *(εξίσωση Bernoulli στο τοίχωμα)*

Τελικές εξισώσεις οριακού στρώματος (παραβολικές)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty\frac{du_\infty}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

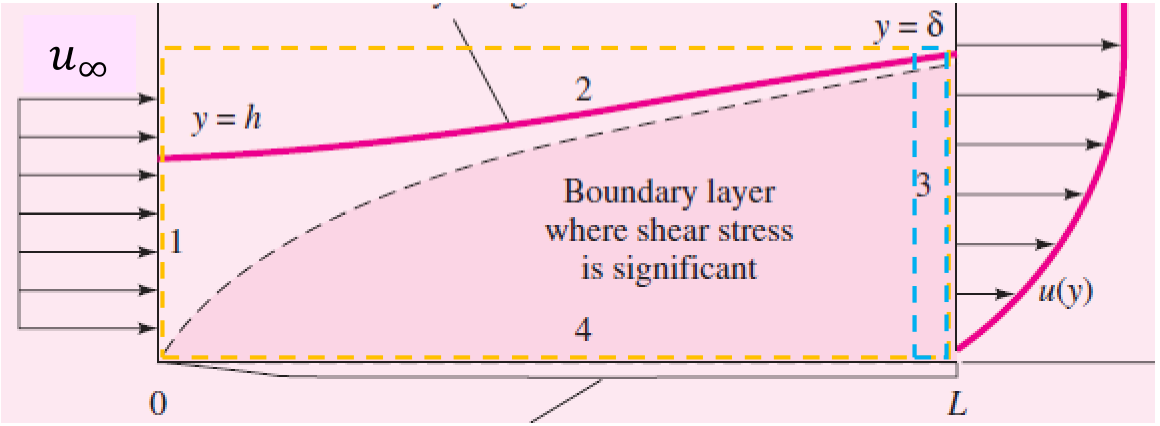
$\frac{du_\infty}{dx} > 0$ Ευνοϊκή κλίση πίεσης

$\frac{du_\infty}{dx} < 0$ Αντίθετη κλίση πίεσης

$\frac{du_\infty}{dx} = 0$ Επίπεδη πλάκα

Ανάπτυξη του οριακού στρώματος: ολοκληρωτικά ισοζύγια vonKarman

Ισοζύγιο μάζας για μηδενική κλίση πίεσης



Πάχος μετατόπισης, δ_*

$$u_\infty \delta - \int_0^\delta u\, dy = u_\infty \delta_* \Rightarrow \boxed{\delta_* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy}$$

Ισοζύγιο ορμής για μηδενική κλίση πίεσης

Πάχος ελλείματος ορμής, Θ

$$D(x) = \rho u_\infty^2 \delta - \int_0^\delta \rho u^2 dy - \left(u_\infty \delta - \int_0^\delta u\, dy\right) \rho u_\infty = \int_0^\delta \rho u (u_\infty - u)\, dy = \rho u_\infty^2 \Theta \Rightarrow \boxed{\Theta = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \frac{u}{u_\infty} dy}$$

Επίλυση με βάση προσεγγιστικό πεδίο ταχύτητας

$$\boxed{u(x,y) = u_\infty f\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)}$$

- Εύρεση $\delta_* = \delta_*(\delta)$ και $\Theta = \Theta(\delta)$
- Εύρεση $\tau_w = \mu(\partial u/\partial y)_{y=0} = \tau_w(\delta)$
- Αντικατάσταση στο ισοζύγιο vonKarman $\Rightarrow \delta(x)$

Οριακό στρώμα με μη-μηδενική κλίση πίεσης

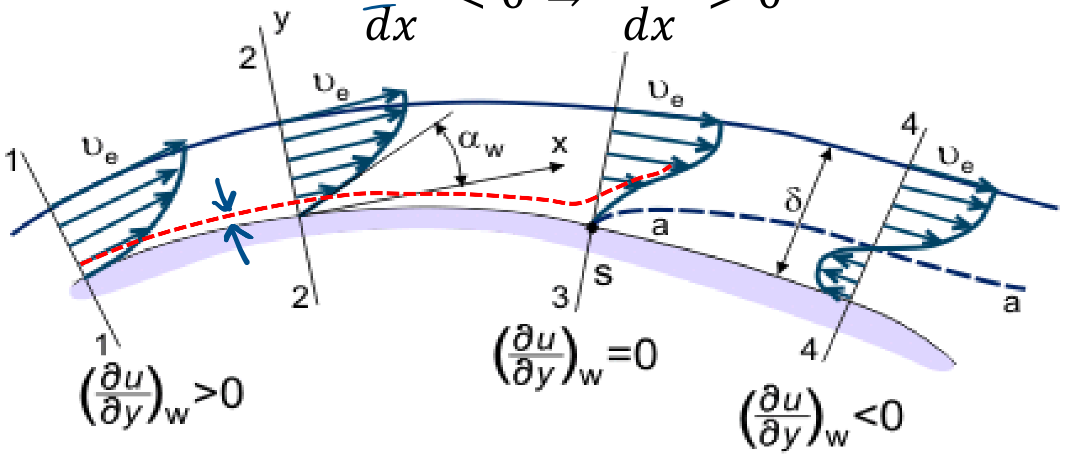
$$\frac{d}{dx}(\rho u_\infty^2 \Theta) = \tau_w + \delta_* \frac{dp_\infty}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{d\Theta}{dx} = \frac{f}{2} - \frac{\delta_* + 2\Theta}{u_\infty} \frac{du_\infty}{dx}}$$

$\dfrac{dp_\infty}{dx} \lesseqgtr 0$ *αργή/γρήγορη αύξηση πάχους*

$$f = \frac{2\tau_w}{\rho u_\infty^2}$$

Αντίθετη κλίση πίεσης

$$\frac{du_\infty}{dx} < 0 \Rightarrow \frac{dp_\infty}{dx} > 0$$



- Κατάντη αύξηση πίεσης επιβραδύνει τα σωματίδια ρευστού κοντά στο τοίχωμα (έχουν μικρή αδράνεια)
- Η κίνηση μπορεί να διατηρηθεί μόνον με μεταφορά ορμής (σύρσιμο) από την κυρίως ροή
- Η αποκόλληση του οριακού στρώματος οδηγεί στη μεταφορά ρευστού με στροβιλότητα μακριά από το τοίχωμα (ακύρωση ιδανικής ροής)

Απομάκρυνση ροϊκής γραμμής από το τοίχωμα

Έστω ροϊκή γραμμή στη θέση $y = h(x)$ κοντά στο τοίχωμα:

$$y \ll \delta \Rightarrow u(y) \approx y \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} \approx \frac{y\tau_w}{\mu}$$

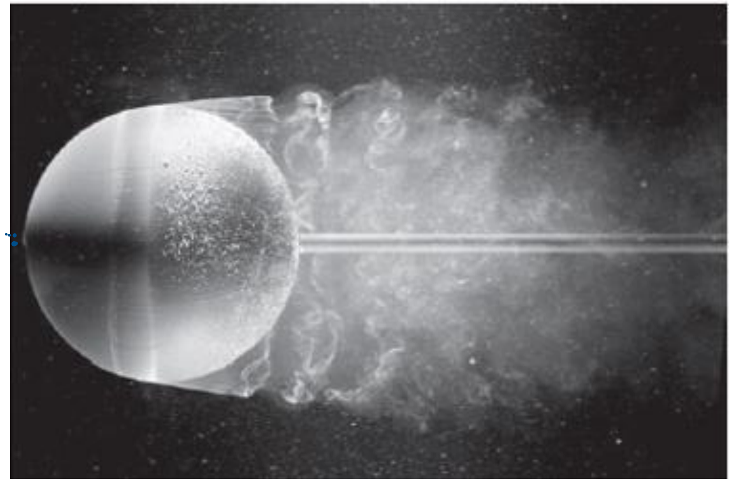
Παροχή μεταξύ τοιχώματος και $y = h(x)$:

$$\dot{m} = \int_0^h \rho u dy \approx \int_0^h \rho \frac{y\tau_w}{\mu} dy \approx \frac{1}{2} h^2 \frac{\tau_w}{\nu} \Rightarrow \boxed{h(x) \sim \sqrt{\frac{\dot{m}}{\tau_w}}}$$

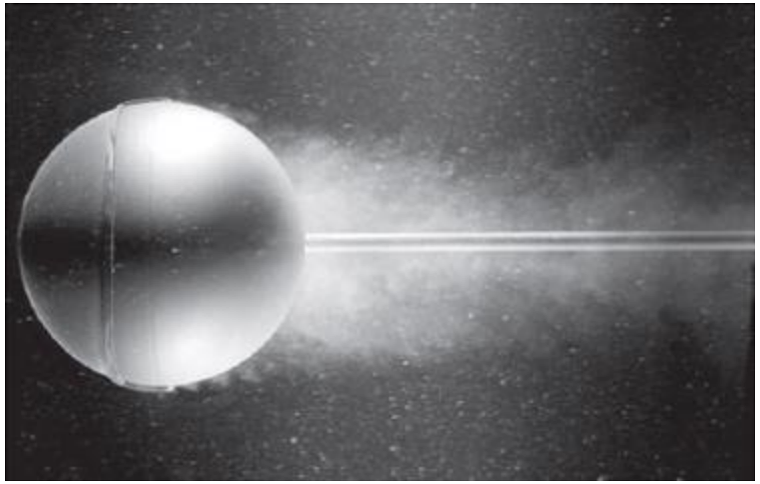
$$\tau_w \to 0 \Rightarrow h(x) \to \infty$$

Με τον μηδενισμό της διατμητικής τάσης,
η ροή αποκολλάται από το τοίχωμα

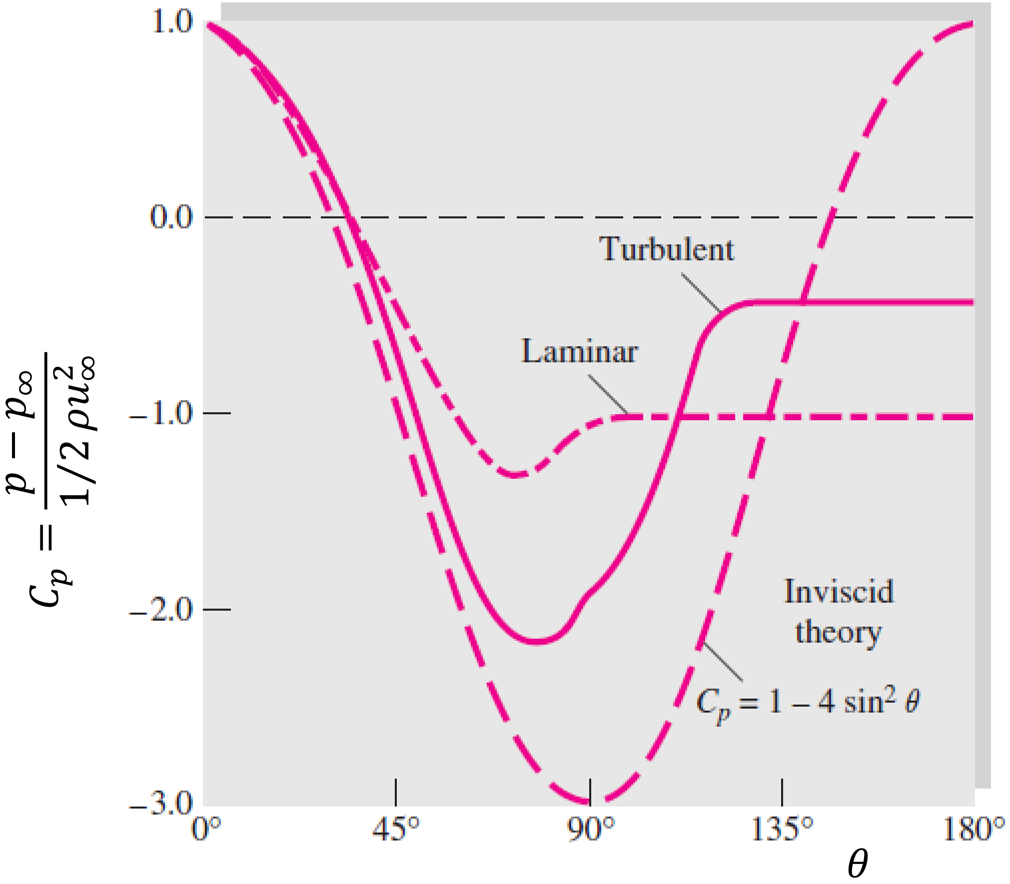
Στρωτή και τυρβώδης αποκόλληση



Στρωτή ροή: μεταφορά ορμής μόνον με μοριακό μηχανισμό



Τυρβώδης ροή: μεταφορά ορμής με δινοδιαχυτότητα

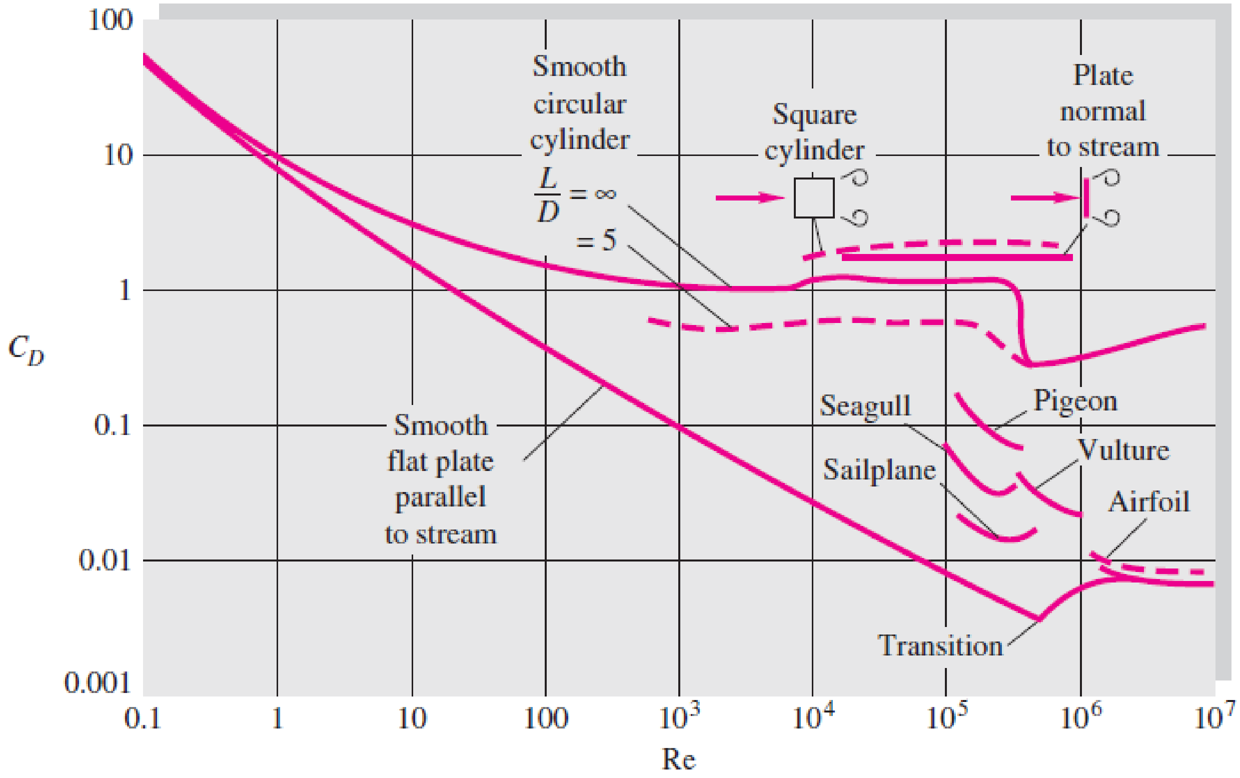


https://www.youtube.com/watch?v=pW0JfEBE9h8

(Δυναμική της αποκόλλησης και αποφυγή της)

Οπισθέλκουσα δύναμη σε στερεά σώματα

$$F_D = C_D A \frac{1}{2} \rho u_\infty^2$$

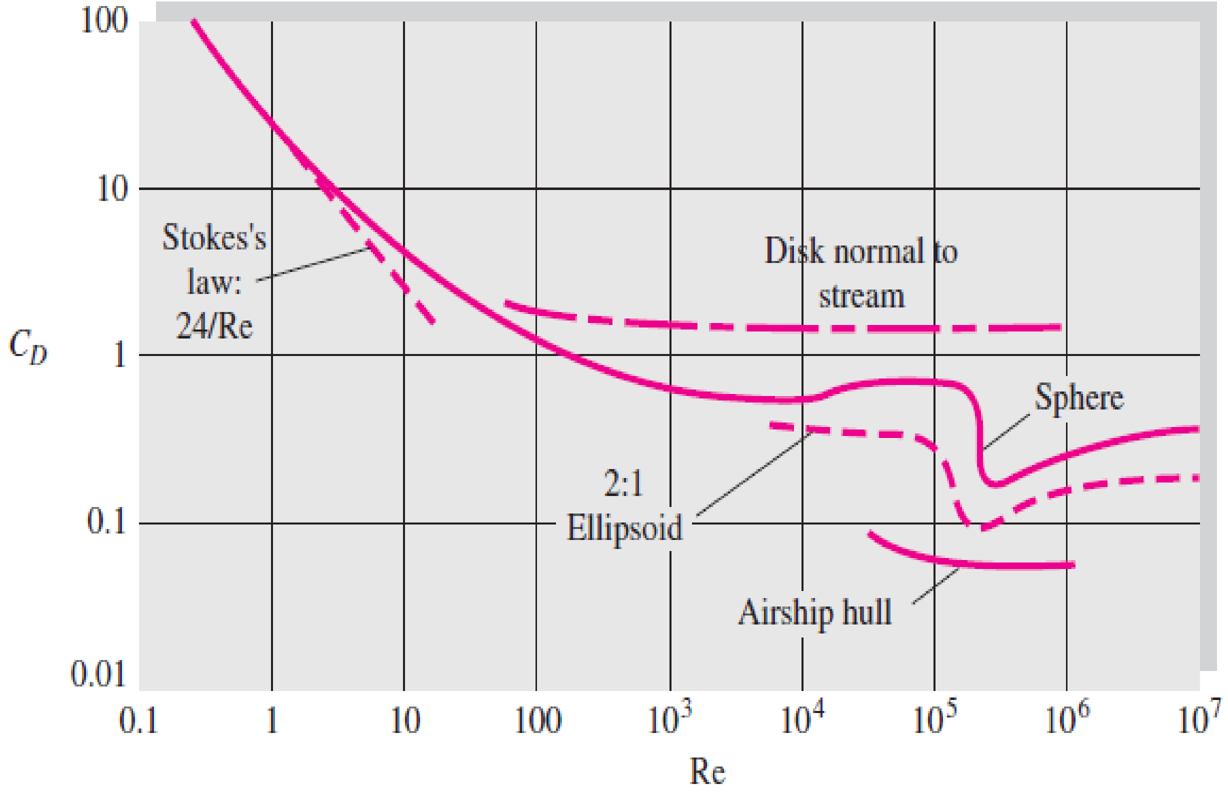


Κύλινδρος (και άλλα διδιάστατα εμπόδια)

$$c_D \approx 1 + \frac{10}{Re^{2/3}} \quad 1 \le Re \le 10^4$$

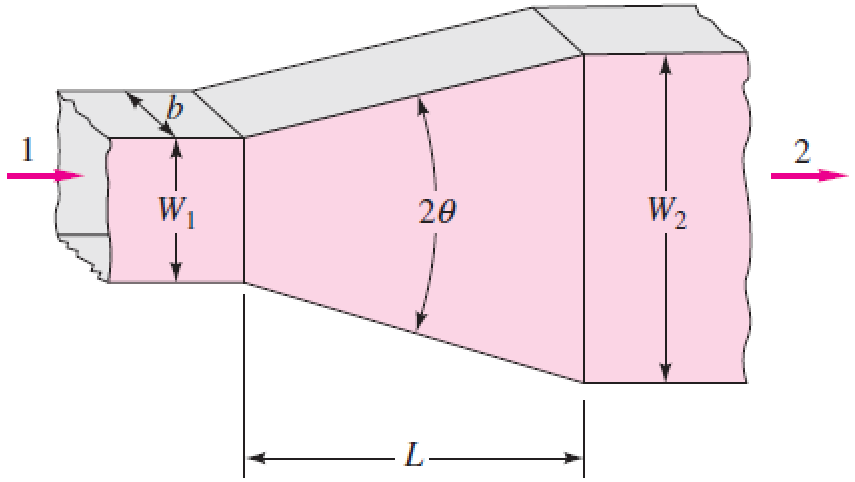
Σφαίρα (και άλλα αξονοσυμμετρικά εμπόδια)

$$c_D \approx 0{,}4 + \frac{24}{Re} + \frac{6}{Re^{1/2}} \quad 10 \le Re \le 10^5$$



Στόχος

Ανάκτηση πίεσης $p_0 = p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2$

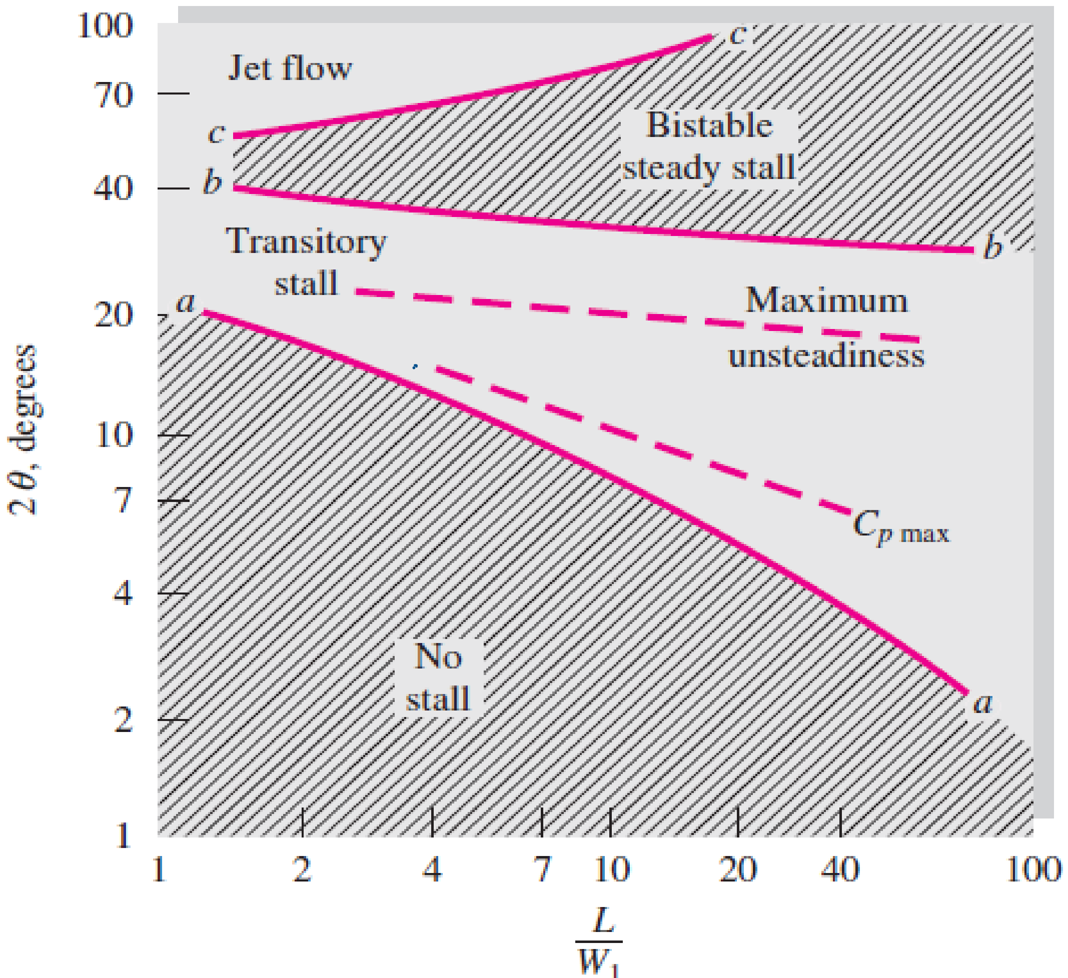


$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{p_0 - p_1} \approx 1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 \approx 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

Κλάσμα απόφραξης: $B_1 = \dfrac{(2W_1 + 2b)\delta_1}{W_1 b}$ $(\approx 0{,}02 - 0{,}12)$

Ο ρόλος των οριακών στρωμάτων

- Μερική απόφραξη στην είσοδο λόγω πάχους οριακού στρώματος
- Αποκόλληση/ δυναμική αλληλεπίδραση λόγω αντίθετης κλίσης πίεσης

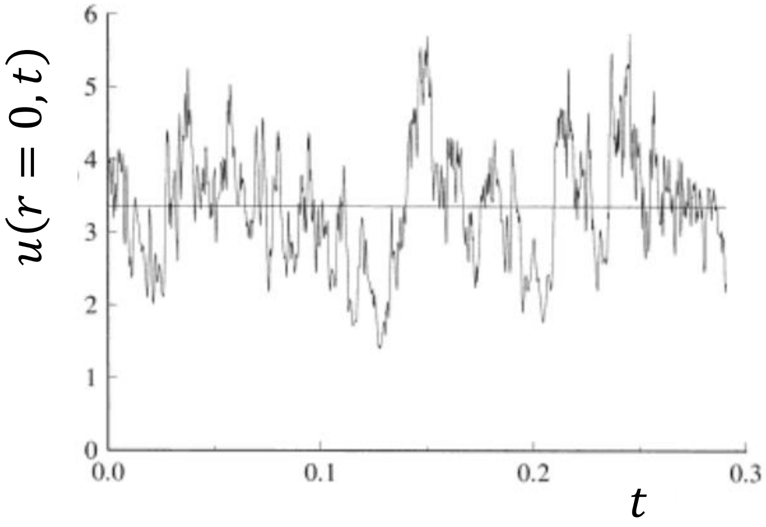


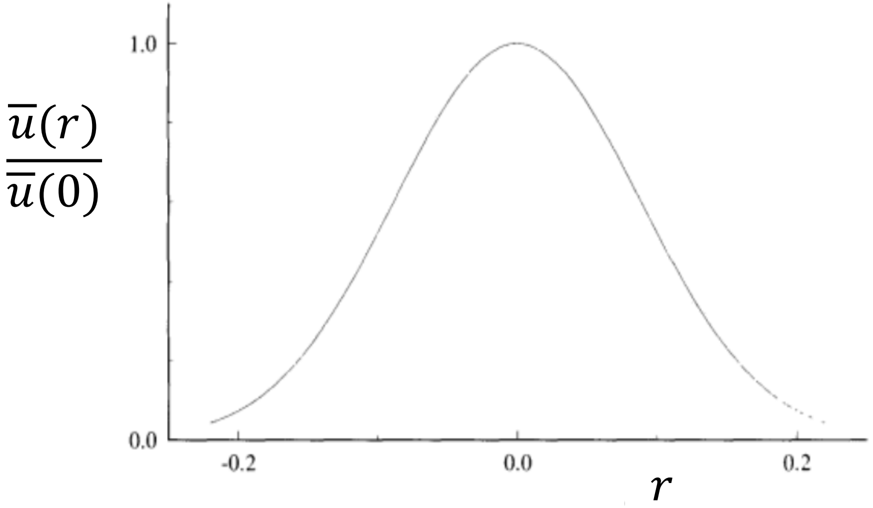
Τυρβώδης ροή

Χαρακτηριστικά της τυρβώδους ροής

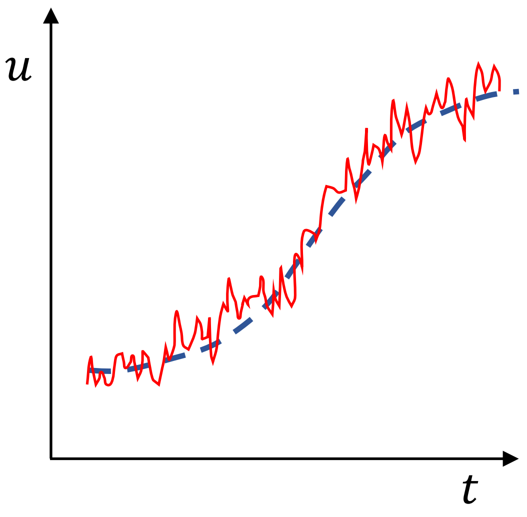
Το παράδειγμα της τυρβώδους δέσμης

- Έντονες διακυμάνσεις
- Δομές σε πολλαπλές χωρικές κλίμακες
- Χρονικές διακυμάνσεις σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων
- Ομαλή συμπεριφορά μέσων τιμών





Περιγραφή της τυρβώδους ροής



$$\overline{u}_i(\underline{x},t) = \frac{1}{T}\int_0^T u_i(\underline{x},t)dt$$

$$\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}\,, \quad \overline{\frac{\partial a}{\partial x, t}} = \frac{\partial \overline{a}}{\partial x, t}$$

$$\overline{\overline{a}} = \overline{a}\,, \quad \overline{\overline{a}b} = \overline{a}\,\overline{b} \quad \text{αλλά} \quad \overline{ab} \neq \overline{a}\,\overline{b}$$

$$u_i = \overline{u}_i + u_i' \Rightarrow \overline{u_i'} = 0$$

$$\overline{u_i u_j} = \overline{(\overline{u}_i + u_i')(\overline{u}_j + u_j')} = \overline{u}_i\overline{u}_j + \overline{u_i' u_j'}$$

Ανεξάρτητες διαταραχές $\Leftrightarrow \overline{u_i' u_j'} = 0$

Οι δίνες της τύρβης $\Rightarrow \overline{u_i' u_j'} \neq 0$

Reynolds-averaged Navier-Stokes (RANS)

$$\rho\left(\overline{\frac{\partial u_j}{\partial t}} + \overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right) = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x_j}} + \mu\left(\overline{\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i}}\right) \Rightarrow \rho\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} + \overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}}\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \mu\left(\frac{\partial^2 \overline{u}_j}{\partial x_i \partial x u_i}\right)$$

$$\boxed{\overline{u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}} = \overline{u}_i\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\left(\overline{u_i' u_j'}\right)}{\partial x_i}}$$

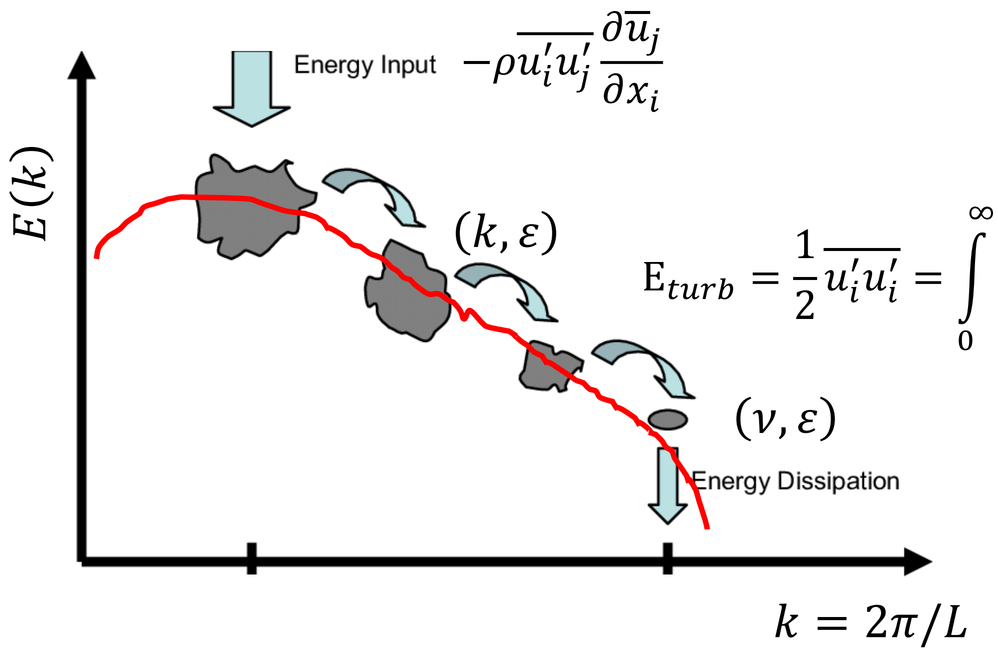
$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial t} + \overline{u}_i\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu\frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} - \rho\overline{u_i' u_j'}\right)}$$

$$\tau_{ij} = \mu\frac{d\overline{u}_j}{dx_i} - \rho\overline{u_i' u_j'}$$

Ιξώδης τάση *Τάση Reynolds*

Ισοζύγιο τυρβώδους ενέργειας

- Η κινητική ενέργεια της τύρβης κατανέμεται σε πολλές κλίμακες (δίνες)
- Τυρβώδης ενέργεια παράγεται στην μακρο-κλίμακα και μεταφέρεται προς τα κάτω (energy cascade)
- Η ενέργεια σκεδάζεται στην μικρο-κλίμακα Kolmogorov (viscous dissipation)
- Η μικρο-κλίμακα εξαρτάται μόνον από το ιξώδες, $\nu[=]\, m^2/s$ και το ρυθμό μεταφοράς ενέργειας, $\varepsilon[=]\, m^2/s^3$



$$\mathrm{E}_{turb} = \frac{1}{2}\overline{u_i' u_i'} = \int_0^\infty E(k)dk$$

Μακρο-κλίμακα τύρβης

Χαρ/κό μήκος της ροής: L_1

Μέση ταχύτητα: U

Κινητική ενέργεια τύρβης: $u_1^2 = \overline{u_i' u_i'}$

Χαρ/κή ταχύτητα τύρβης: u_1 ($\mathrm{u_1 \sim 0{,}1\ U}$)

Χαρ/κός χρόνος ζωής δίνης: $t_1 = L_1/u_1$

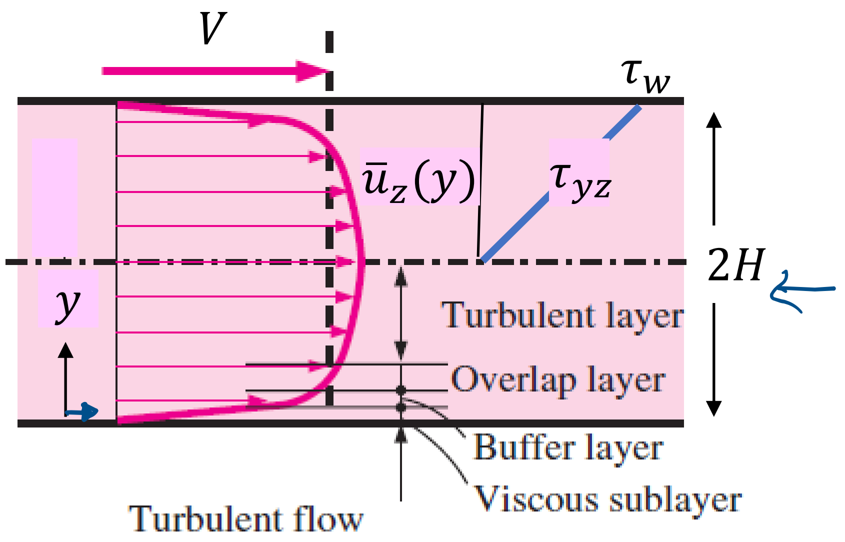
Μικρο-κλίμακα Kolmogorov

$\boxed{L_2, u_2, t_2 = f(\varepsilon, \nu)}$ $\quad L_2 = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4},\ u_2 = (\varepsilon\, \nu)^{1/4},\ \tau_2 = (\nu/\varepsilon)^{1/2} \quad (Re_2 = 1)$

Ρυθμός μεταφοράς = Ρυθμός σκέδασης $\Rightarrow \dfrac{u_1^2}{L_1/u_1} = \varepsilon$

$$\boxed{L_2 = L_1(Re_1)^{-3/4}, \quad u_2 = u_1(Re_1)^{-1/4}, \quad t_2 = t_1(Re_1)^{-1/2}}$$

Παράδειγμα: Αέρας με U=15 m/s σε αγωγό d=0,1 m: $Re_1=10^4$, L_2=100 μm, t_2=0,7 ms



$$\Delta P(W2H) = \tau_w(2WL) \Rightarrow \tau_w = H\frac{\Delta P}{L}$$

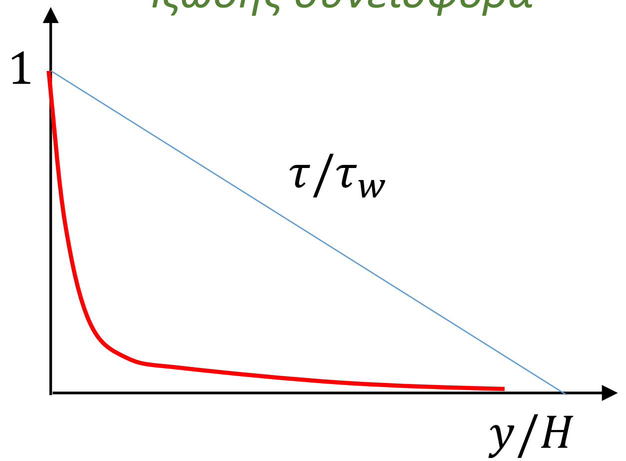
$$\underline{\bar{u}} = (0,0,\bar{u}_z(y)\,)\,,\tau_{zx} = \tau_{yx} = 0$$

$$\frac{d\tau_{yz}}{dy} = \frac{d\bar{p}}{dz} = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{\tau_{yz}}{\tau_w} = \left(1 - \frac{y}{H}\right)$$

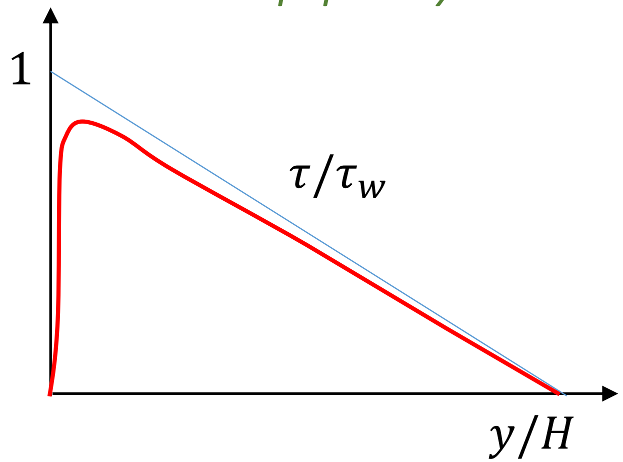
$$\boxed{\tau_{yz} = \mu\frac{d\bar{u}_z}{dy} - \rho\overline{u_z' u_y'}}$$

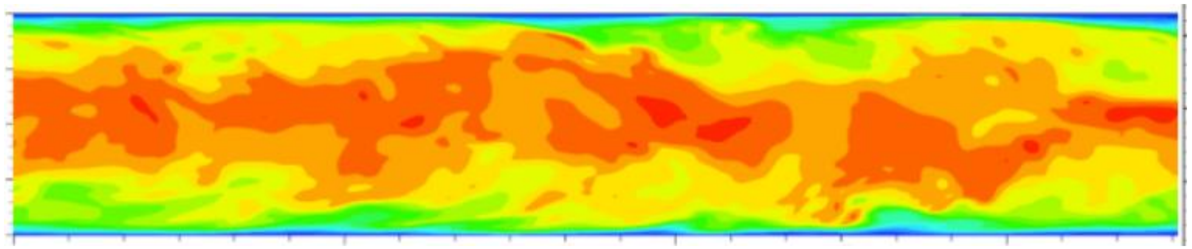
Ιξώδης τάση   Τάση Reynolds

Ιξώδης συνεισφορά



Συνεισφορά Reynolds





Χαρακτηριστικές κλίμακες τοιχώματος (ρ, ν, τ_w)

$$\boxed{u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\,, y_* = \frac{\nu}{u_*}\,, \mathrm{Re}_* = \frac{u_* y_*}{\nu} = 1}$$

$$u_+ = \frac{u}{u_*}\quad,\quad y_+ = \frac{y}{y_*} = \frac{y u_*}{\nu}$$

Τοπικός Re

Τυρβώδης ροή σε λείο αγωγό: Ο νόμος του τοιχώματος

Η ροή (καναλιού ή αγωγού) προσδιορίζεται πλήρως από: $\rho, \nu, \mathrm{H}, u_* \;\rightarrow\; U_0$

$$\bar{u}_z = u_* \mathrm{F}\left(\frac{y}{\mathrm{H}}, \frac{u_* H}{\nu}\right) \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{d\bar{u}_z}{dy} = \frac{u_*}{y}\,\Phi\left(\frac{y}{y_*}, \frac{y}{\mathrm{H}}\right)} \qquad \left(\frac{y}{y_*} = \frac{y}{\mathrm{H}}\frac{u_* H}{\nu}\right)$$

$$u_+ = 2{,}44\, ln y_+ + 5{,}0$$

Βασική παραδοχή (Prandtl)

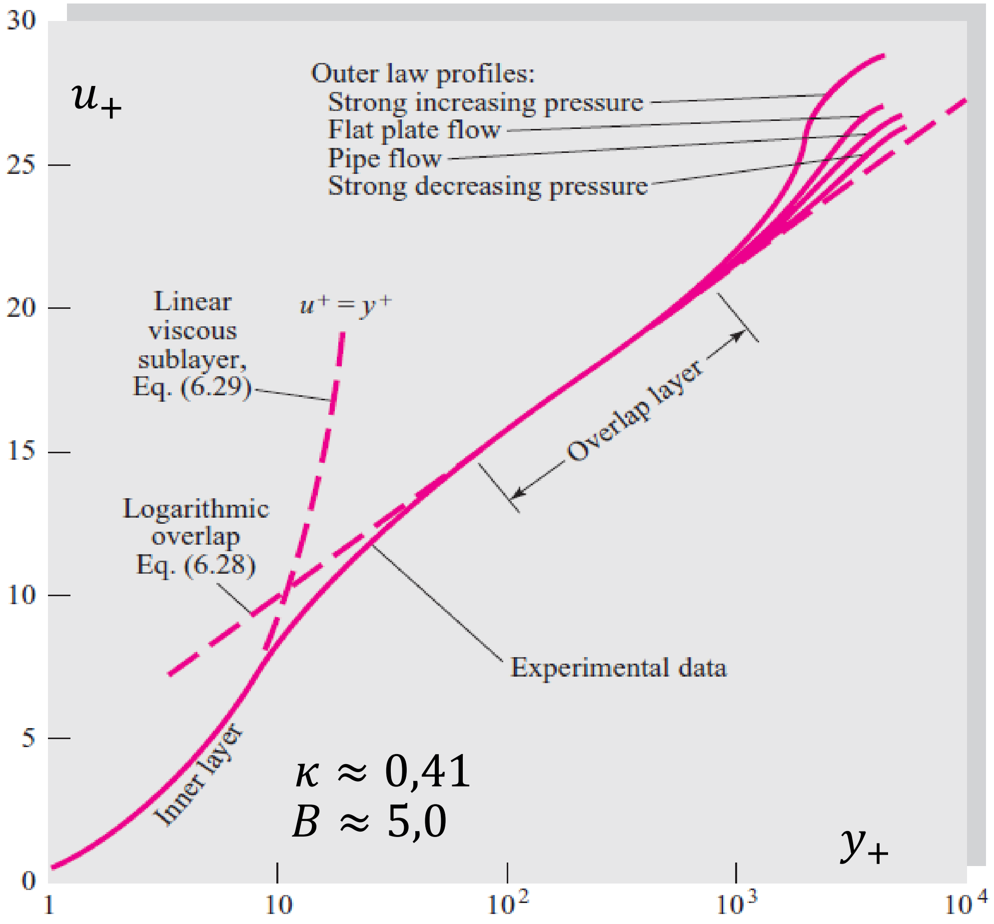
Σε υψηλούς Re, υπάρχει περιοχή κοντά στο τοίχωμα (*y/H<0,1* εσωτερική περιοχή) όπου η μέση ταχύτητα καθορίζεται μόνον από τις κλίμακες του τοιχώματος και είναι ανεξάρτητη των *H*, U_0.

$$\boxed{\frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y}\,\Phi_1\left(\frac{y}{y_*}\right) \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx \frac{1}{y_+}\,\Phi_1(y_+)}$$

$$y_+ \sim O(1): \qquad \frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{\tau_w}{\mu} \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx 1 \Rightarrow u_+ = y_+$$

$$y_+ > 50: \quad \Phi_1(y_+) \rightarrow \frac{1}{\kappa} \Rightarrow \frac{du_+}{dy_+} \approx \frac{1}{\kappa y_+} \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa}\, ln y_+ + B$$

εξωτερικό τμήμα εσωτερικής περιοχής (overlap layer)



Τυρβώδης ροή σε τραχύ αγωγό: Ο νόμος του τοιχώματος

Έστω ότι η τραχύτητα χαρακτηρίζεται από το ύψος, s

$$\boxed{\frac{d\bar{u}_z}{dy} = \frac{u_*}{y}\,\Phi\left(\frac{y}{\mathrm{H}},\frac{y}{y_*},\frac{s}{y_*}\right)}$$

Εσωτερική περιοχή (Prandtl)

$$\frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y}\,\Phi\left(\frac{y}{y_*},\frac{s}{y_*}\right)$$

$$\boxed{\kappa \approx 0{,}41 \quad B \approx 5{,}0 \quad \mathrm{B}_2 \approx 8{,}5}$$

$$s \ll y_* : \Phi\left(\frac{y}{y_*},\frac{s}{y_*}\right) \rightarrow \Phi_1\left(\frac{y}{y_*}\right) \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa}\, ln y_+ + B \quad \text{για } \mathrm{H} \gg y \gg y_* \text{ (λείο τοίχωμα)}$$

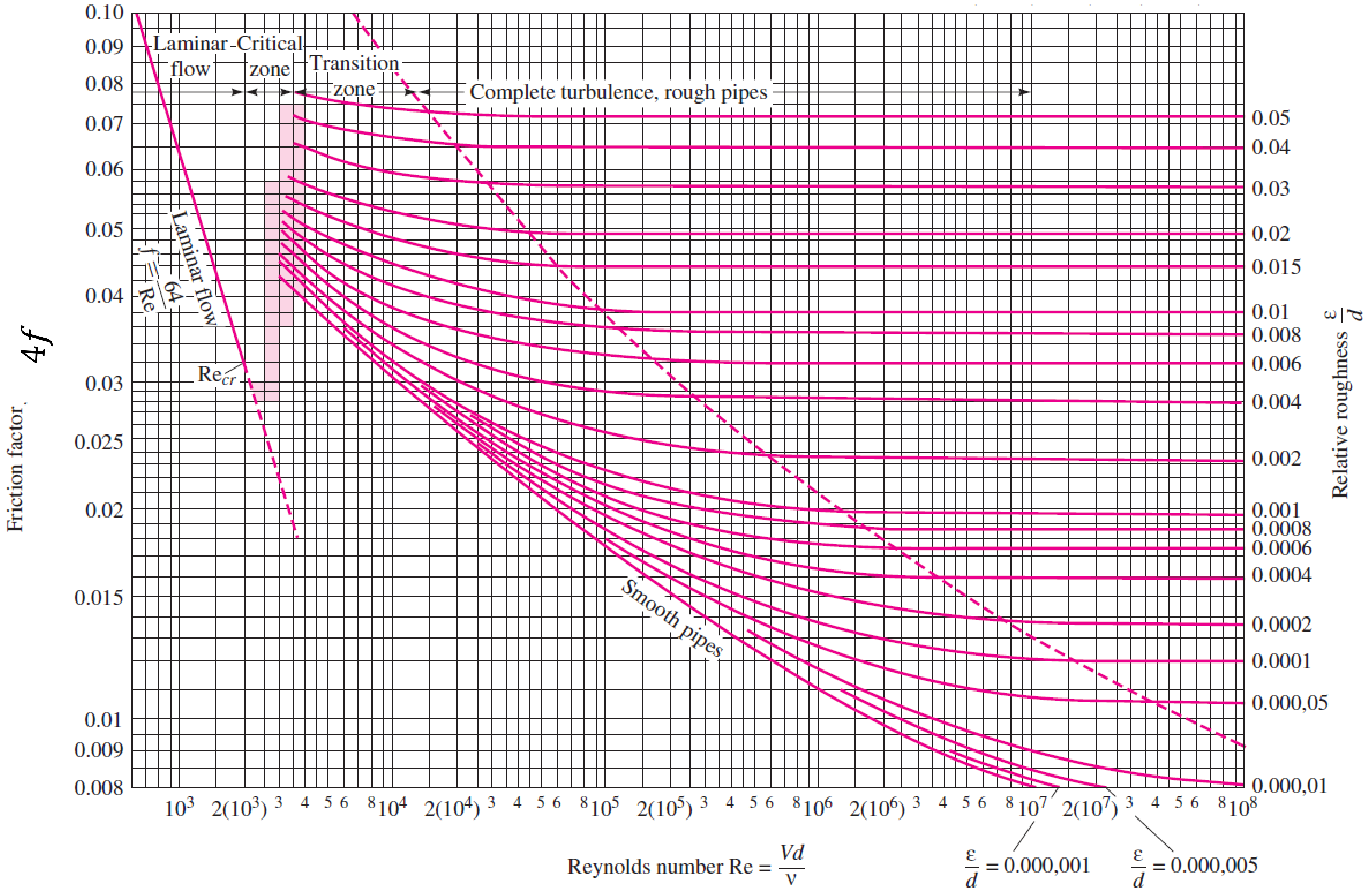
$$u_+ = 2{,}44\, ln y_+ + 5{,}0$$

$$s \gg y_* : \Phi\left(\frac{y}{y_*},\frac{s}{y_*}\right) \rightarrow \Phi_2\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow \frac{d\bar{u}_z}{dy} \approx \frac{u_*}{y}\Phi_2\left(\frac{y}{s}\right) \Rightarrow u_+ = \frac{1}{\kappa}\, ln\left(\frac{y}{s}\right) + \mathrm{B}_2 \quad \text{για } \mathrm{H} \gg y \gg s$$

$$u_+ = 2{,}44\, ln\left(\frac{y}{s}\right) + 8{,}5$$

Μεταφορά ορμής στο τοίχωμα μέσω οπισθέλκουσας μορφής (αμελητέα συνεισφορά ιξωδών τάσεων: y_* εκπίπτει)

Διάγραμμα Moody



$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon u_*}{\nu} < 5$$

$$u_+ = 2,44\, ln y_+ + 5,0$$

$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,44\, ln\left(\frac{u_* R}{\nu}\right) + 1,34$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2\, log\left(\frac{2,51}{Re\sqrt{4f}}\right)}$$

$$\varepsilon_+ = \frac{\varepsilon u_*}{\nu} > 70$$

$$u_+ = 2,44\, ln\frac{y}{\varepsilon} + 8,5$$

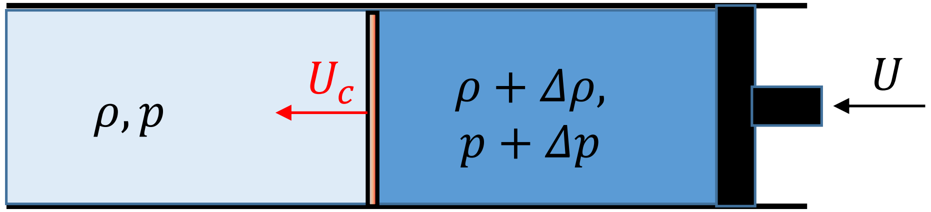
$$\frac{\langle u \rangle}{u_*} = 2,44\, ln\frac{d}{\varepsilon} + 3,2$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2\, log\left(\frac{\varepsilon/d}{3,7}\right)}$$

Συμπιεστές ροές

$\rho = \rho(p, T)$ Ασυμπίεστη ροή όταν $\Delta\rho/\rho \ll 1$

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{u^2}{c^2} \;,\; c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s^{1/2} \Rightarrow \boxed{Ma = \frac{u}{c}}$$



$$\left.\begin{aligned} &\rho U_c = (\rho + \Delta\rho)(U_c - U) \Rightarrow U = \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} U_c \\ &(p + \Delta p) - p = \rho U_c [U_c - (U_c - U)] \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \Delta p = \rho U_c U \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{U_c^2 = \left(1 + \frac{\Delta\rho}{\rho}\right)\left(\frac{\Delta p}{\Delta\rho}\right) \xrightarrow[\Delta\rho/\rho \approx 0]{} c^2}$$

Αγνοήθηκαν μεταβολές θερμοκρασίας

Κύρια χαρ/κά ασυμπίεστης ροής

- Ακαριαία διάδοση μεταβολών πίεσης
- Ομαλή παράκαμψη σωμάτων

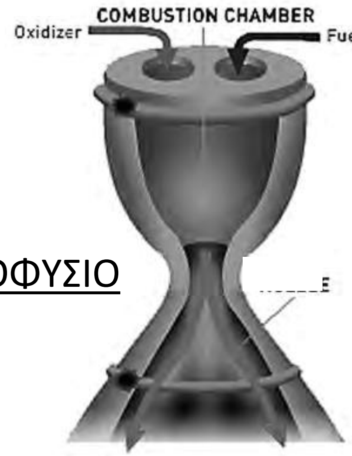
Όμως

- Ακουστική
- Φυσική συναγωγή

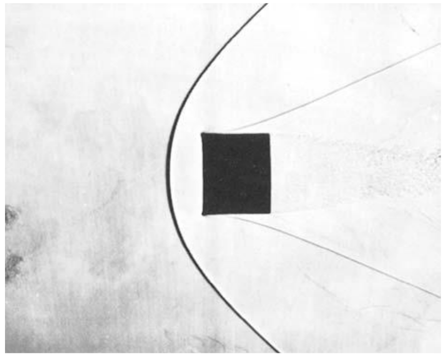
Κύρια φαινόμενα συμπιεστότητας

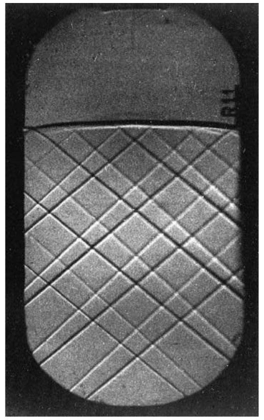
- Στραγγαλισμός ροής (choking)
- Παράκαμψη σωμάτων με κρουστικά κύματα (shock waves)

ΑΚΡΟΦΥΣΙΟ



ΚΡΟΥΣΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ





Χαρακτηριστικά συμπιεστών ροών

- Τα αέρια όταν συμπιέζονται/εκτονώνονται θερμαίνονται/ψύχονται
- Διαταραχές διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου
- Σταδιακές μεταβολές είναι ισεντροπικές
- Αύξηση εντροπίας λόγω τριβών ή κρουστικών κυμάτων

Ισεντροπική συμπιεστή ροή σε ακροφύσια

Ιδιότητες ιδανικών αερίων $(p = \rho R T, R = \frac{\mathcal{R}}{M})$

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S^{1/2} = \sqrt{\gamma R T}\,, \qquad \gamma = C_p/C_v$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$C_p T + \frac{1}{2}u^2 = C_p T_0 \Rightarrow \boxed{\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2}$$

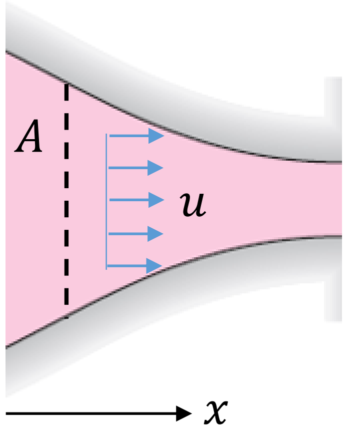
Για ισεντροπικές (αδιαβατικές+αντιστρεπτές) μεταβολές

T_0, p_0, ρ_0: *ιδιότητες ανακοπής:* $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{1/(\gamma-1)}$

T_*, p_*, ρ_*: *κρίσιμες ιδιότητες:* $\frac{T_*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1}, \quad \frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

Εκτόνωση μέσω ακροφυσίου



Εξίσωση συνέχειας

$$\dot{m} = \rho u A \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Ισοζύγιο ενέργειας

$$C_p dT + u du = 0 \;\text{ ή }\; \frac{dp}{\rho} + u du = 0$$

Ταχύτητα ήχου

$$dp = c^2 d\rho$$

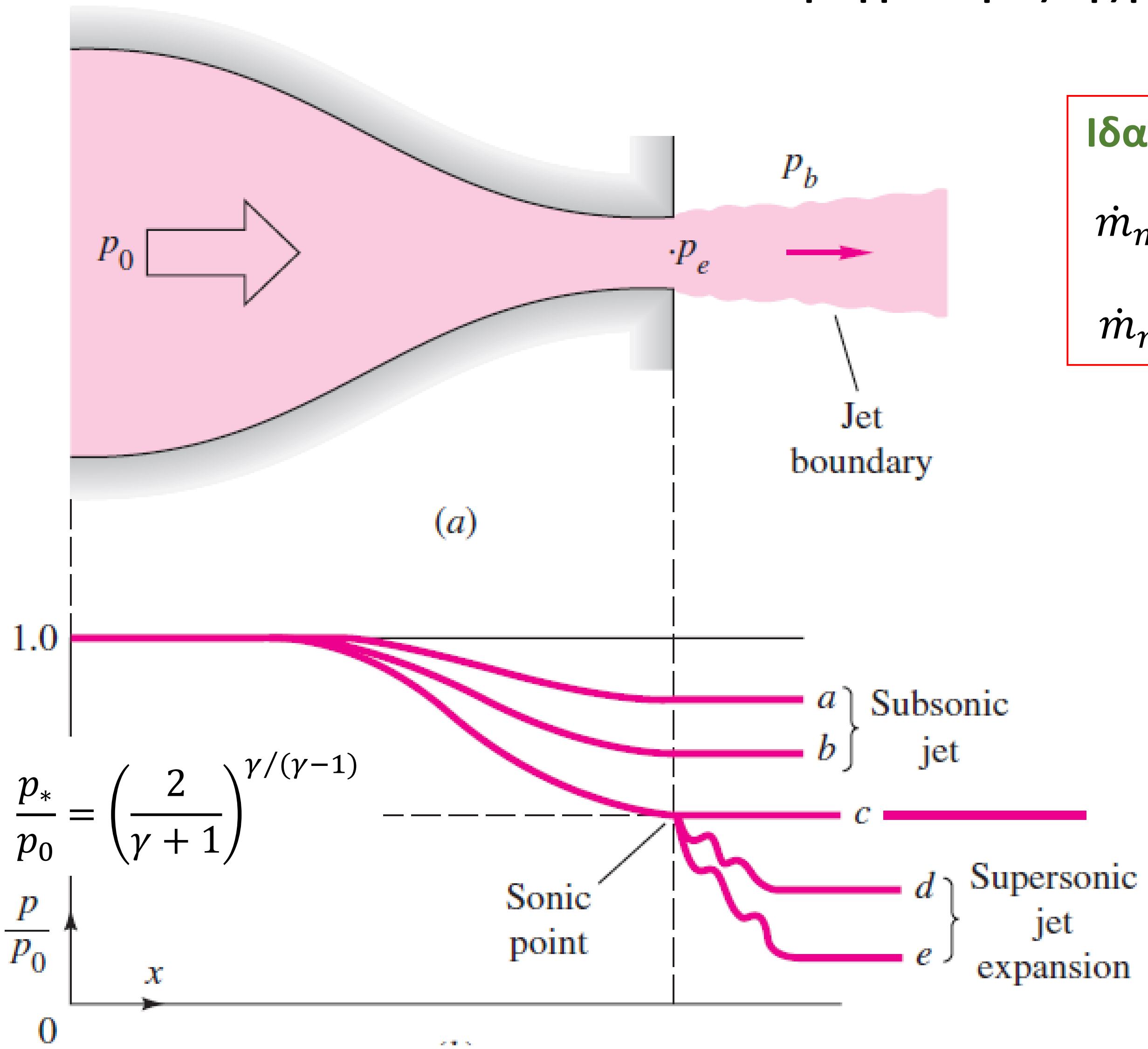
Μεταβολή u, p με τη διατομή ροής

$$\boxed{\frac{du}{u} = \frac{dA}{A}\frac{1}{Ma^2 - 1} = -\frac{dp}{\rho u^2}}$$

Αντίθετη συμπεριφορά για $Ma < 1$ και $Ma > 1$

Όταν $Ma = 1 \Rightarrow dA = 0$

Στραγγαλισμός της ροής: Μείωση πίεσης ⇒ μείωση πυκνότητας ⇒ αύξηση ταχύτητας



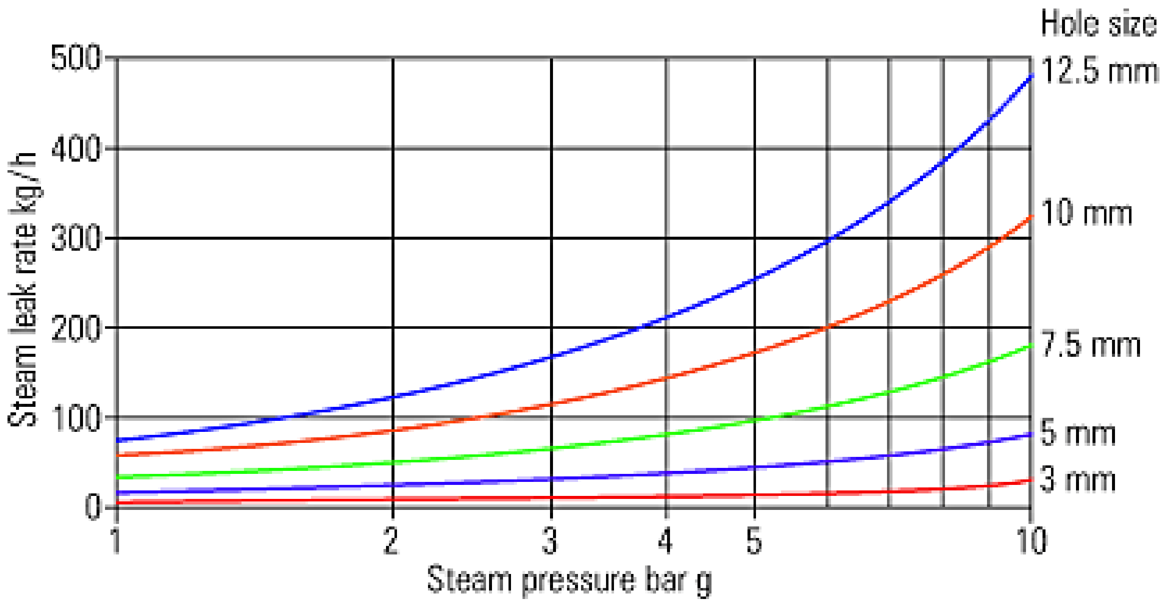
$$\frac{p_*}{p_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

Ιδανικό αέριο- Ασυμπίεστο υγρό

$$\dot{m}_{max} = \rho_* A_* u_* = \rho_* A_{thr} c_* = A_{thr} \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$

$$\dot{m}_{max} = A_{thr} \sqrt{2\rho\,(p_0 - p_b)}$$

Διαφυγή ατμού



2010 ASME Boiler and Pressure Vessel Code

AN INTERNATIONAL CODE

Pressure Relief Devices

For tests with air,

$$W_T = 356AP\sqrt{\frac{M}{T}}$$

For tests with natural gas,

$$W_T = CAP\sqrt{\frac{M}{ZT}}$$

For tests with water,

$$W_T = 2407A\sqrt{(P - P_d)w}$$

where

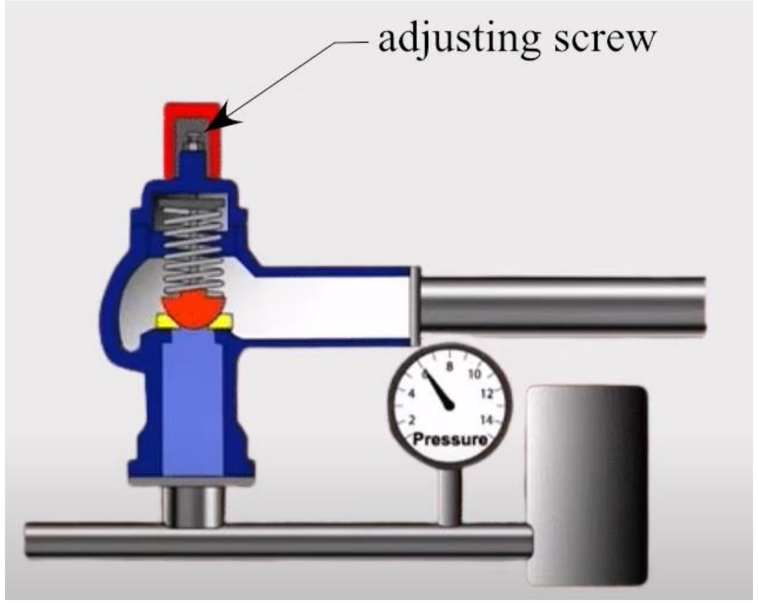
A = actual discharge area through the device at developed lift, sq in.

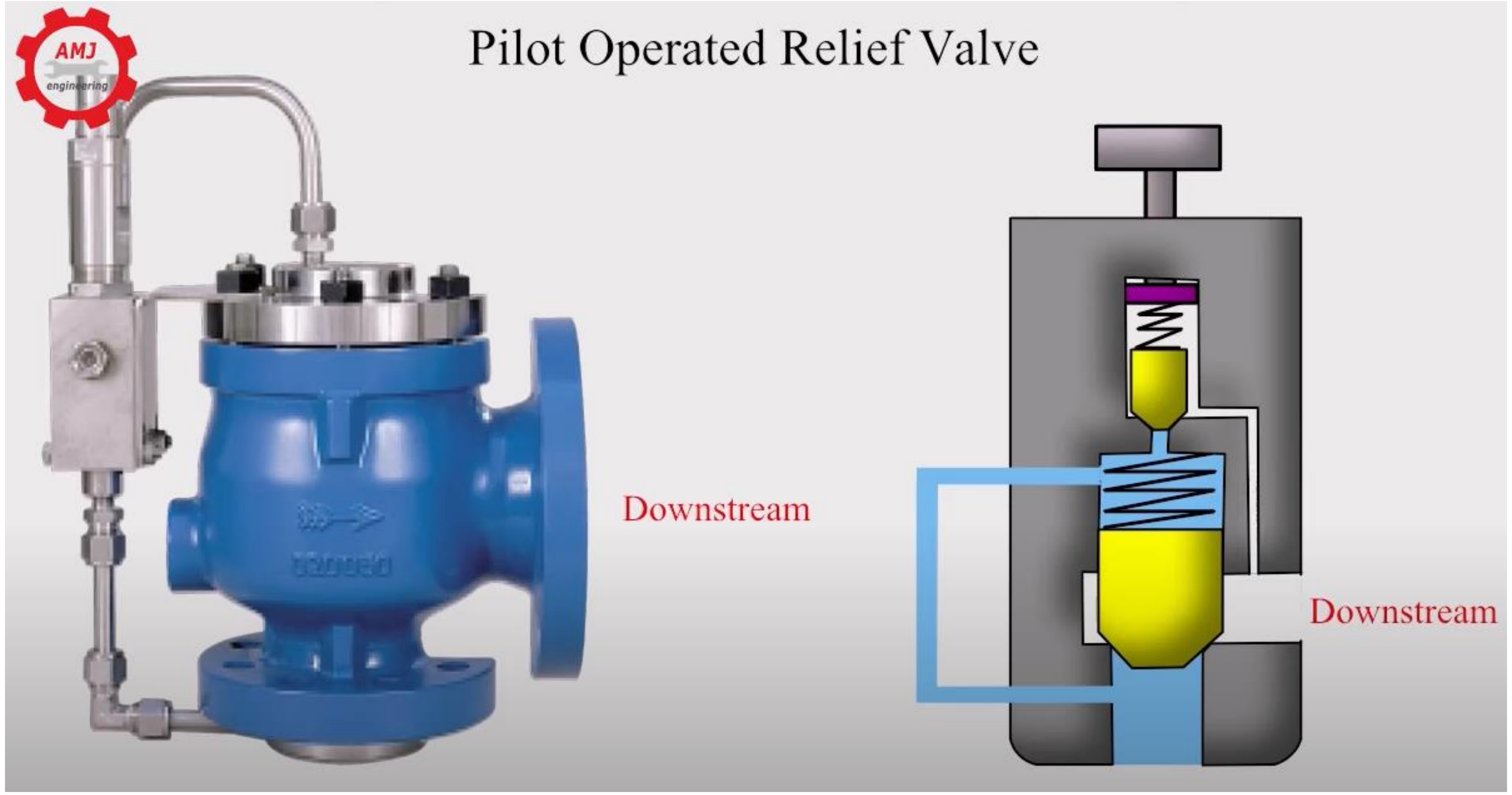
C = constant for gas or vapor based on the ratio of specific heats

$k = c_p/c_v$ (see Fig. 11-1)

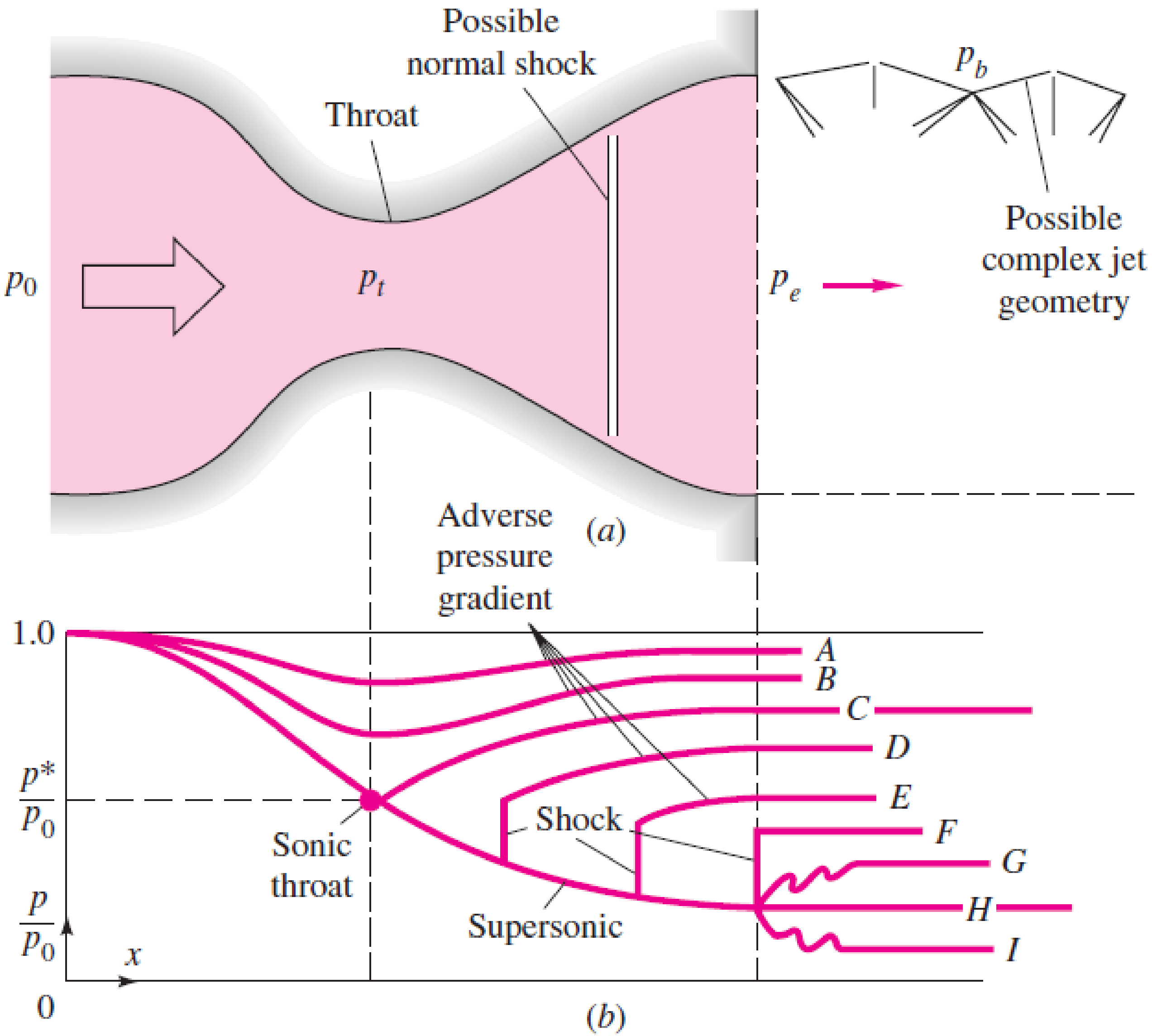
M = molecular weight

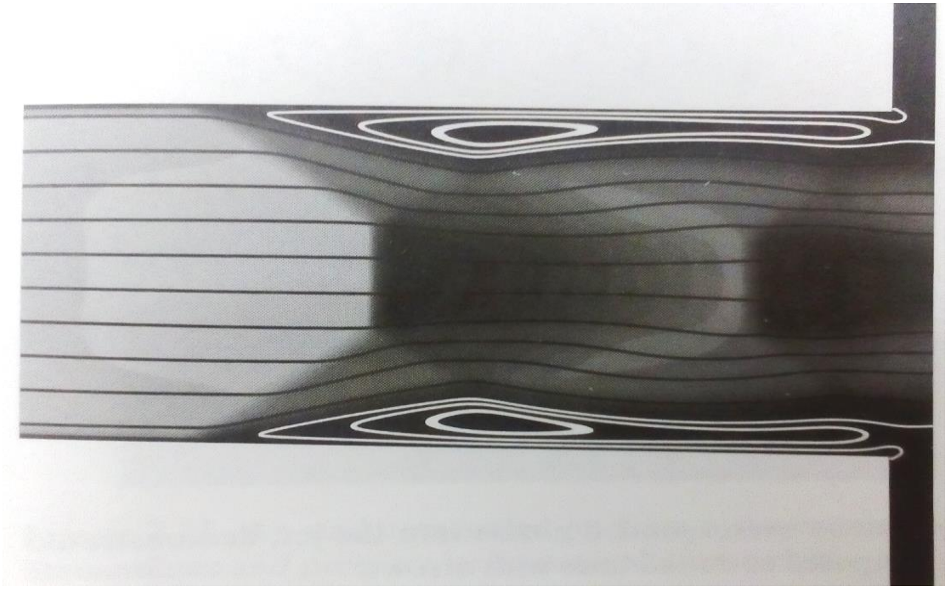
Βαλβίδες ασφαλείας/διαφυγής



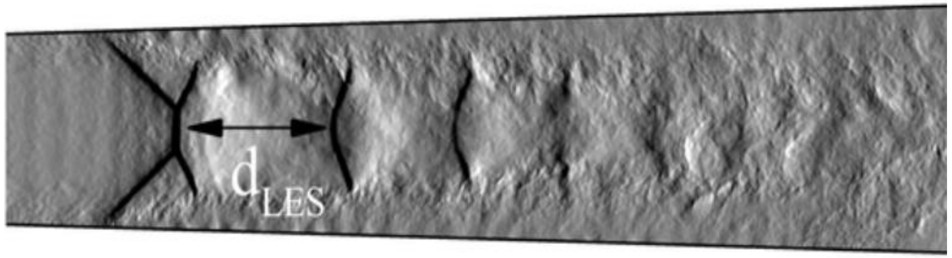


Ακροφύσιο deLaval





$$\frac{A}{A_*} = \frac{1}{Ma}\sqrt{\left[\frac{2+(\gamma-1)Ma^2}{(\gamma+1)}\right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}}$$



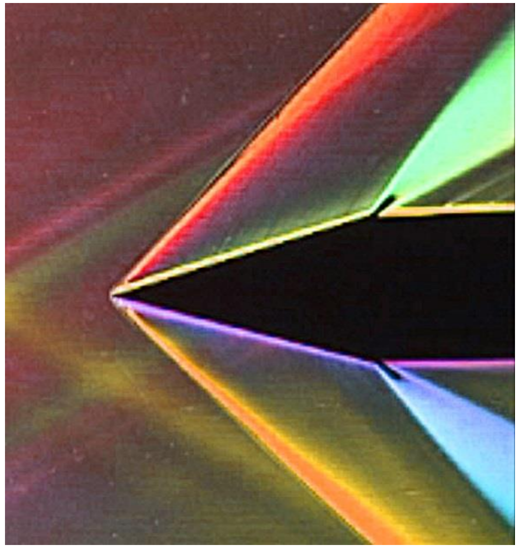
Αλληλεπίδραση ροής-εμποδίου

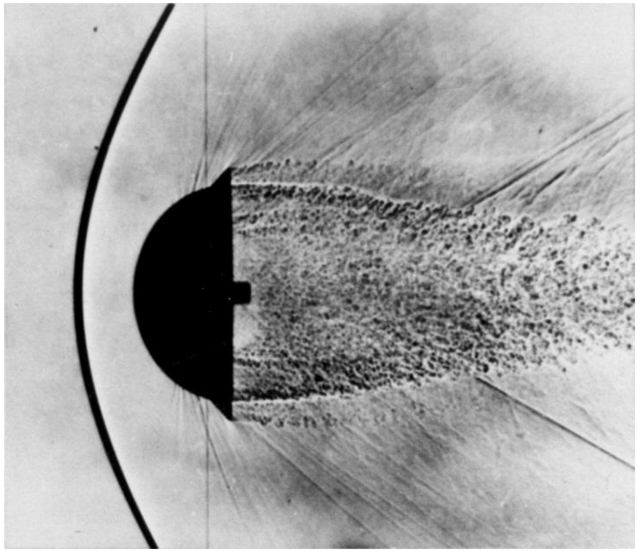
<u>Ασυμπίεστη ροή</u> $(c = \infty)$: Το πεδίο πίεσης διαδίδεται ακαριαία (ελλειπτική συμπεριφορά) $\rightarrow$ Η ροή εκτρέπεται ομαλά

<u>Υπερηχητική ροή</u> $(c < \infty\,, u > c)$: Διαταραχές διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου. (υπερβολική συμπεριφορά) $\rightarrow$ Το εμπόδιο κατάντη δεν επηρεάζει τη ροή

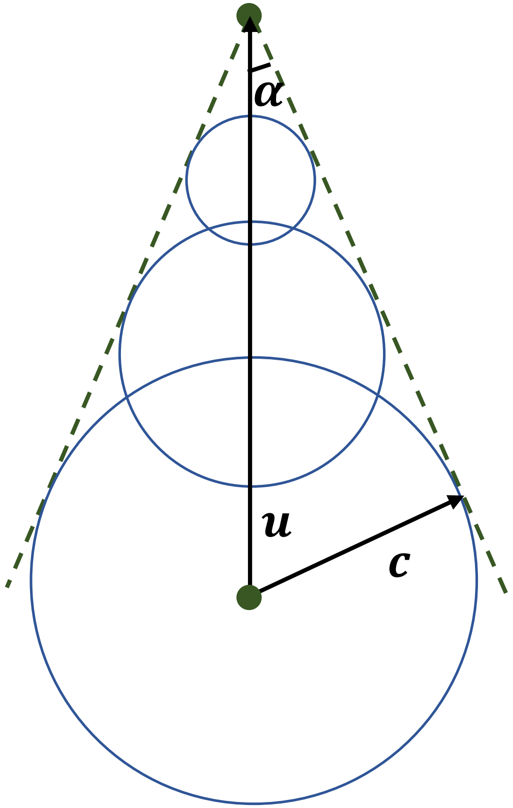
Κρουστικό κύμα

Δημιουργείται όταν η ροή δεν μπορεί να εκτραπεί ομαλά (ισεντροπικά)





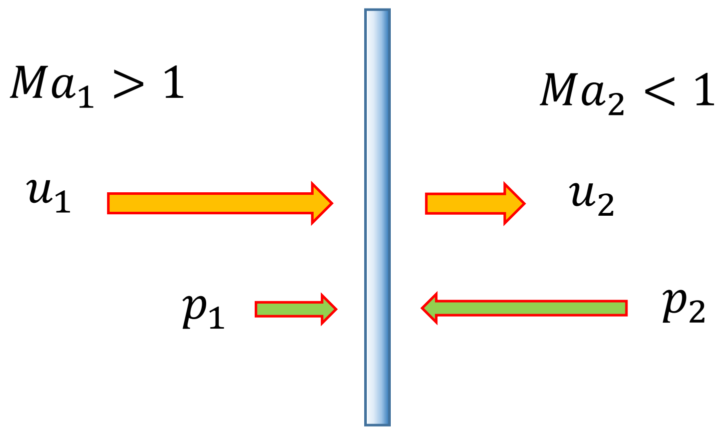
Κύματα Mach-Κώνος επιρροής



$$\boxed{\sin\alpha = \frac{c}{u} = \frac{1}{Ma}}$$

Συστήματα αναφοράς με το βλήμα κινούμενο ή ακίνητο (στάσιμο κρουστικό κύμα)

Ορθό κρουστικό κύμα

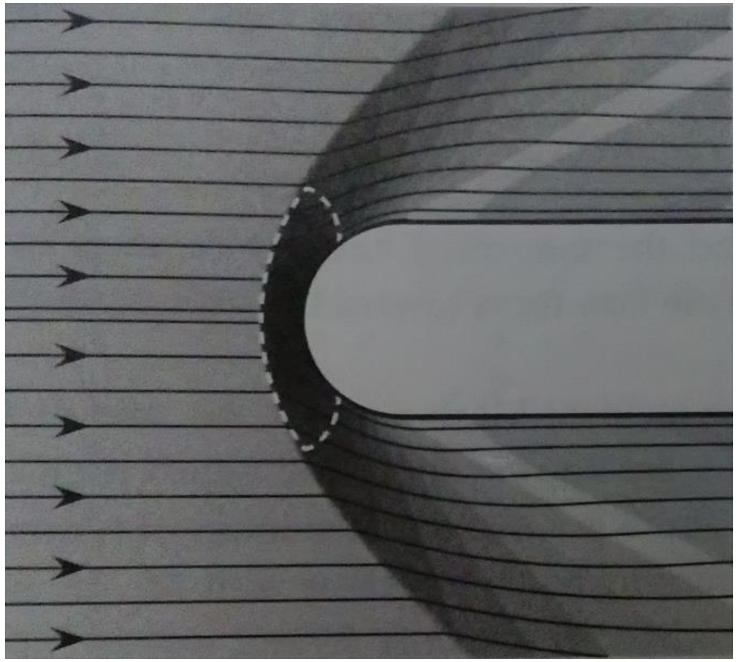


- *Ισχύουν οι ατριβείς εξισώσεις (Re>>1)*
- *Η επίδραση του ιξώδους περιορίζεται στο κρουστικό κύμα (ασυνέχεια)*

$$\boldsymbol{u_1 = Ma_1 c_1}$$

- *Ταχύτητα προσέγγισης ροής σε στάσιμο κρουστικό κύμα*
- *Ταχύτητα διάδοσης κρουστικού κύματος*

$$Ma_1 \to 1 \Rightarrow S_2 - S_1 \sim (Ma_1 - 1)^3$$



<u>Ισοζύγιο μάζας</u>

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

<u>Ισοζύγιο ορμής</u>

$$p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$$

<u>Ισοζύγιο ενέργειας</u>

$$h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}u_2^2$$

$$p = \rho RT, h = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

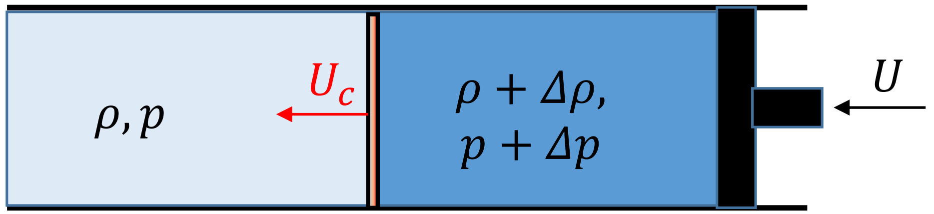
$$\boxed{Ma_2^2 = \frac{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}{2\gamma Ma_1^2 - (\gamma - 1)}}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(Ma_1^2 - 1)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2} \qquad (u_2 = Ma_2 c_2)$$

Έκρηξη στον αέρα, θερμοκρασίας 25°C, δημιουργεί κρουστικό κύμα. Αν μία στιγμή η πίεση στο χώρο έκρηξης είναι 12 atm, υπολογίστε την ταχύτητα διάδοσης του κύματος και την ταχύτητα του αέρα που ακολουθεί το κύμα.



$$\rho U_c = (\rho + \Delta\rho)(U_c - U)$$

$$\Rightarrow U = \frac{\Delta\rho}{\rho + \Delta\rho} U_c$$

$$\rho \equiv \rho_1 \, , (\rho + \Delta\rho) \equiv \rho_2$$

Για αέρα $\gamma = 1{,}4 \quad R = 286{,}7 \ J/kgK$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1}(Ma_1^2 - 1)$$

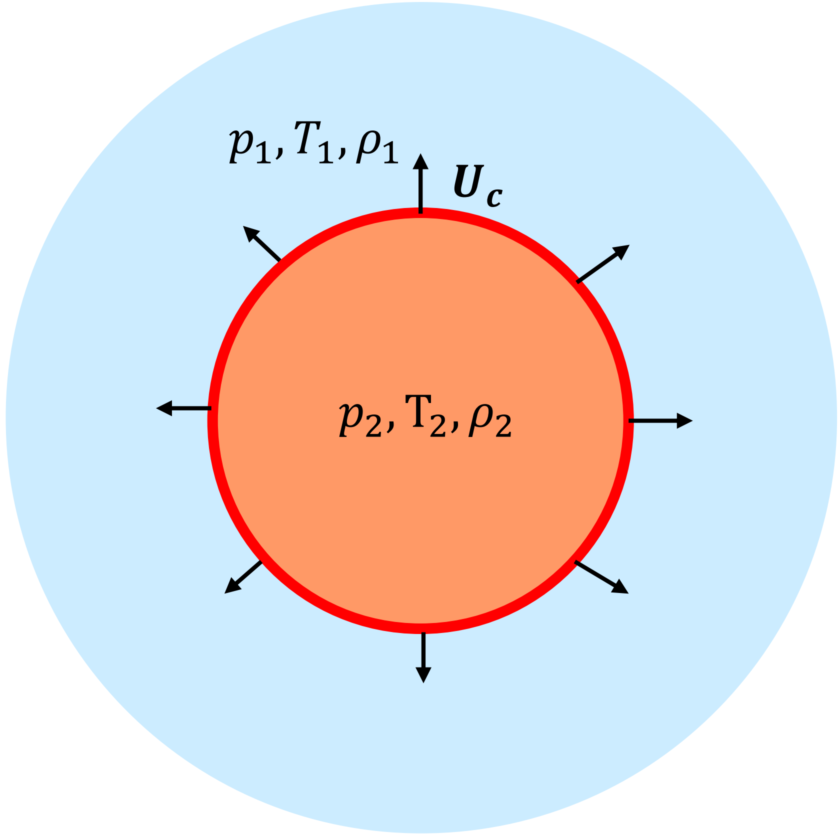
$$\frac{p_2}{p_1} = 12 \Rightarrow Ma_1 = 3{,}229$$

$$c_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 346 \ m/s$$

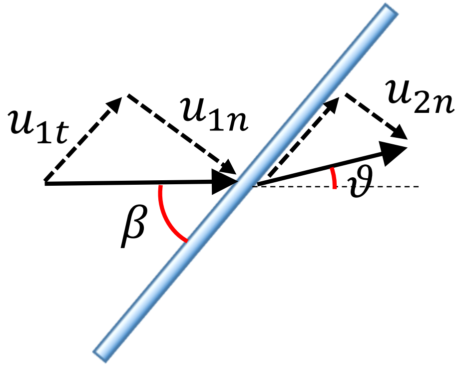
$$\boxed{u_1 \equiv U_c = Ma_1 c_1 = 1117 \ m/s}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)Ma_1^2}{2 + (\gamma - 1)Ma_1^2} = 4{,}05 \Rightarrow$$

$$\boxed{U = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} U_c = 841 \ m/s}$$



Πλάγιο κρουστικό κύμα



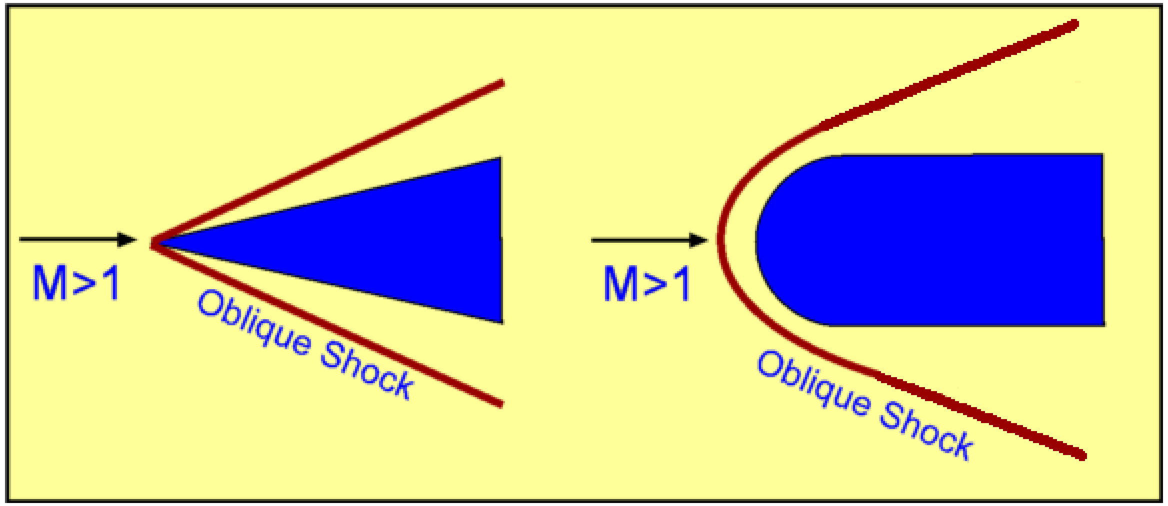
$$u_{1t} = u_{2t}$$

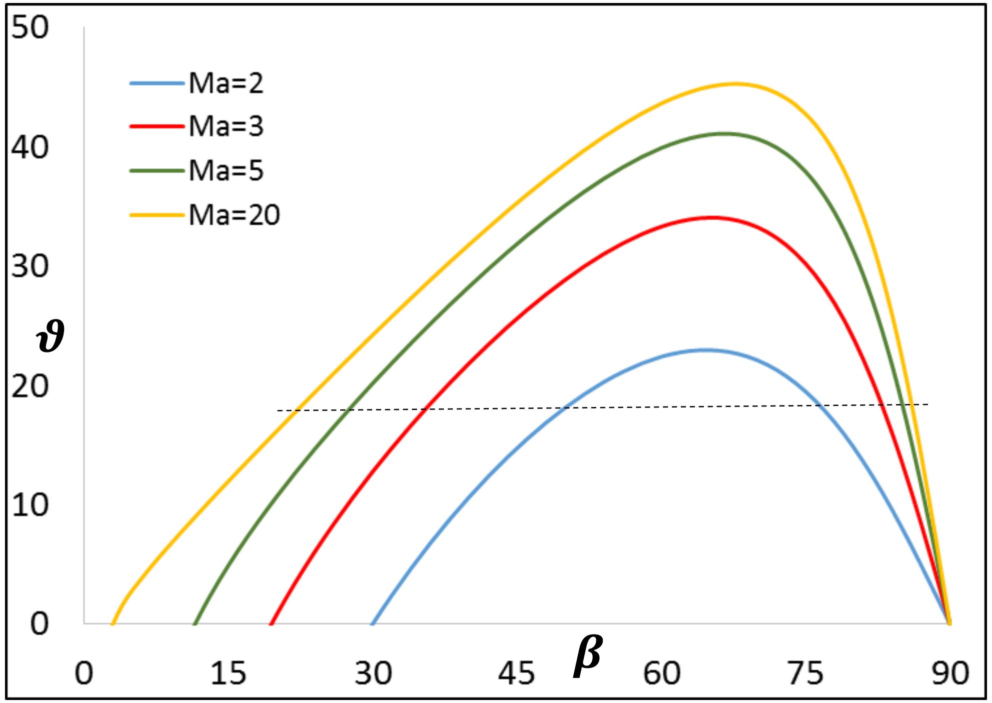
$$u_{1n} > u_{2n}$$

$$\boxed{Ma_1 \rightarrow Ma_{1n} = Ma_1 \sin\beta}$$

ϑ: Γωνία εκτροπής

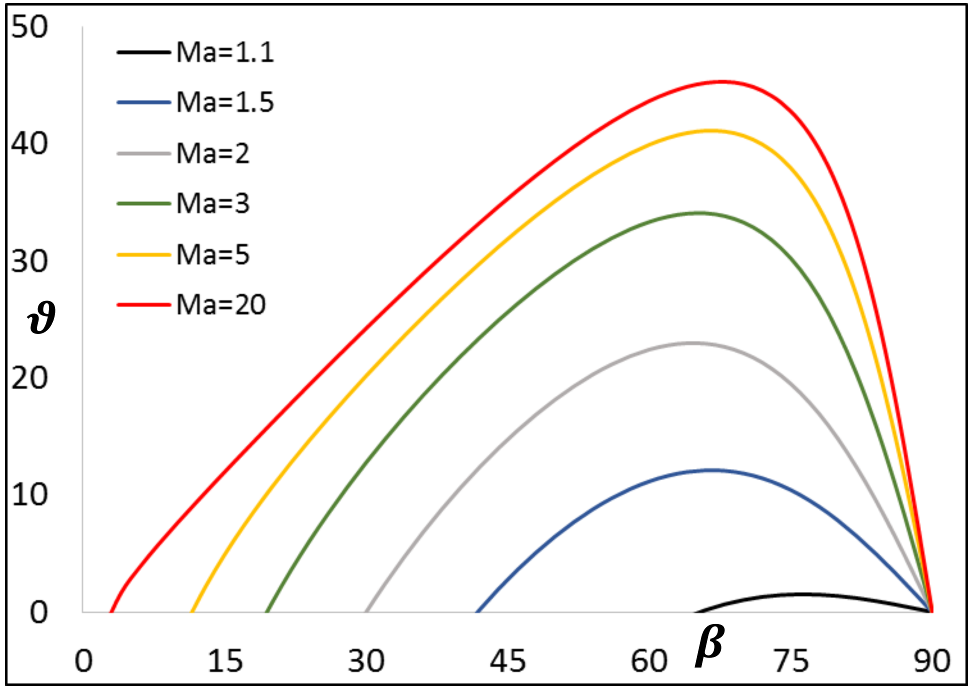
$$\boxed{\frac{u_{1n}}{u_{2n}} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1)(Ma_1 \sin\beta)^2}{2+(\gamma-1)(Ma_1 \sin\beta)^2} = \frac{\tan\beta}{\tan(\beta-\vartheta)}}$$



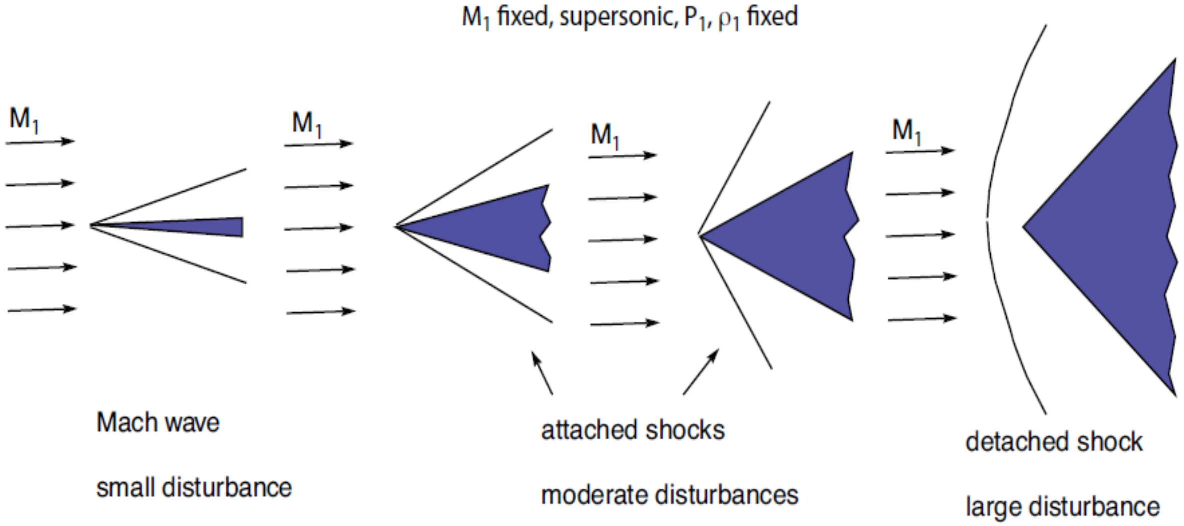


- Ασθενές (Ma_2>1) και ισχυρό (Ma_2<1) πλάγιο κρουστικό κύμα
- $\vartheta \rightarrow 0 \Rightarrow \beta = 90^o\ or\ \beta \rightarrow \sin^{-1}(1/Ma_1) \equiv \alpha$
- Μέγιστη γωνία εκτροπής, ϑ_{max}
- *Τι συμβαίνει για* $\beta < \sin^{-1}(1/Ma_1) \Rightarrow \vartheta < 0$;

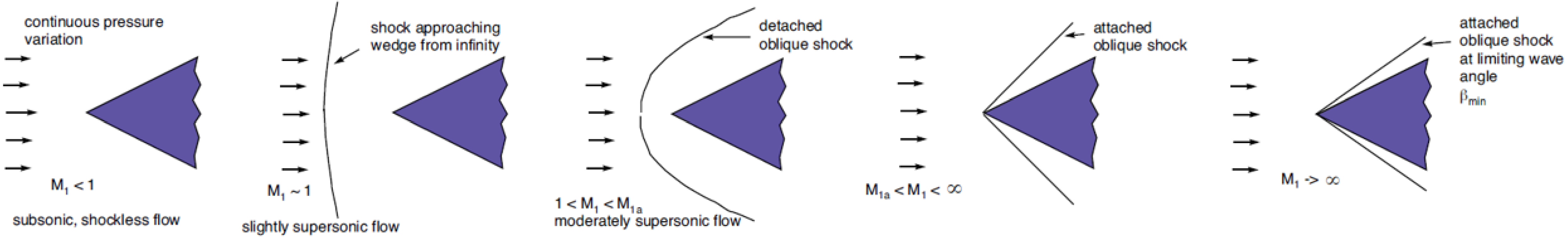
Εξάρτηση εκτροπής από αριθμό Mach και γωνία προσβολής

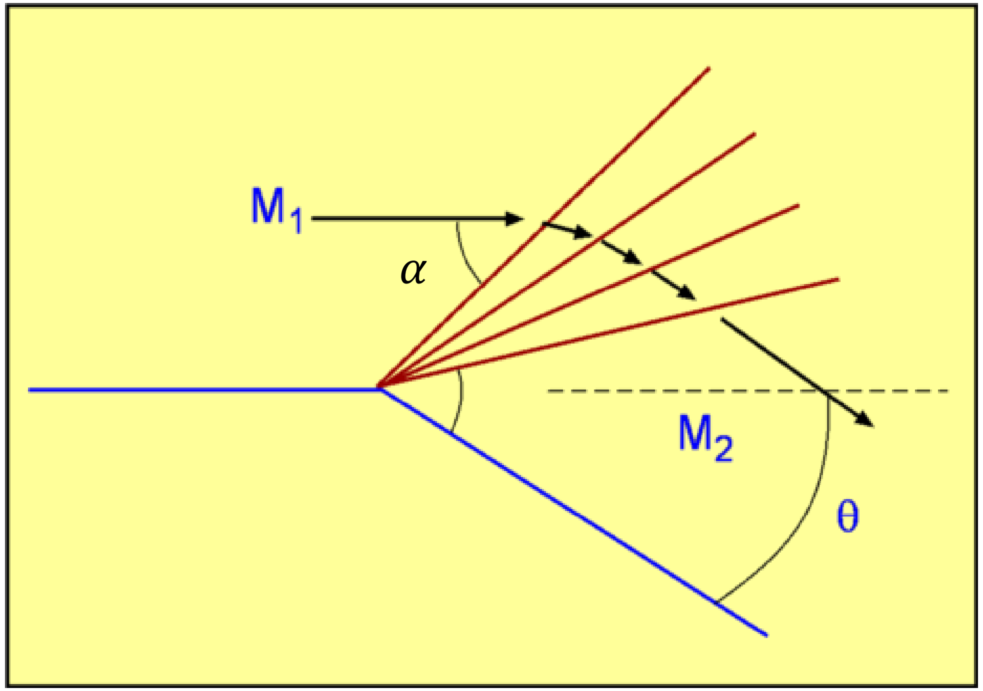


Αύξηση γωνίας σφήνας με σταθερό αριθμό Mach (Ma_1)



Αύξηση αριθμού Mach προσβολής (Ma_1)





Μικρή (αρνητική) γωνία εκτροπής μέσω αλληλουχίας κυμάτων Mach με σταδιακά μεταβαλλόμενη γωνία $\beta \approx \alpha = \sin^{-1}(1/M_1)$

$$\frac{|u+du|}{|u|} = \frac{\cos\alpha}{\cos(a-d\vartheta)} \approx 1 - \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-M^2}} \Rightarrow \frac{d|u|}{|u|} \approx \frac{-d\vartheta}{\sqrt{1-M^2}}$$

Ισεντροπική μεταβολή

$$\frac{M+dM}{M} = \frac{|u+du|}{|u|}\sqrt{\frac{T}{T+dT}} = \frac{|u+du|}{|u|}\sqrt{\frac{2+(\gamma-1)(M+dM)^2}{2+(\gamma-1)M^2}}$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{-d\vartheta}{\sqrt{1-M^2}} + \frac{(\gamma-1)MdM}{2+(\gamma-1)M^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{-\vartheta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{2\sqrt{1-M^2}}{2+(\gamma-1)M^2}\frac{dM}{M} = \nu(M_2) - \nu(M_1)}$$

$(M_1, \vartheta \ \to \nu(M_2) \to M_2)$

$$\nu(M) = \sqrt{\frac{(\gamma+1)}{(\gamma-1)}}\, tan^{-1}\sqrt{\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}(M^2-1)} - tan^{-1}\sqrt{M^2-1}$$

Παραδείγματα αποκόλλησης λόγω κρουστικού κύματος