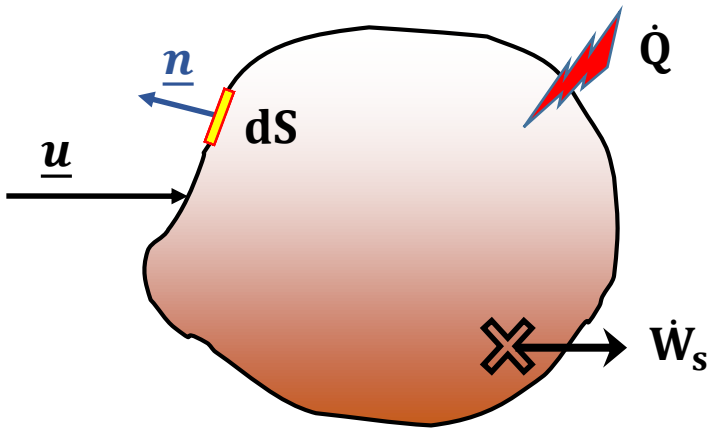


Μηχανική Ρευστών

Ολοκληρωτικά ισοζύγια στη μηχανική ρευστών (μόνιμες συνθήκες)



Ισοζύγιο μάζας (κινηματική)

$$\int \rho(\underline{u} \cdot \underline{n})dS = 0$$

$$\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \dot{m}$$

Ισοζύγιο ορμής (δυναμική)

$$\sum \underline{F} = \int \rho \underline{u}(\underline{u} \cdot \underline{n})dS$$

$$\sum \underline{F} = \dot{m}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) \quad \text{ή}$$

$$\sum \underline{F}_{other} = \dot{m}(\underline{u}_2 - \underline{u}_1) + p_1 A_1 \underline{n}_1 + p_2 A_2 \underline{n}_2$$

$$\sum F_{other} + p_1 A_1 - p_2 A_2 = \dot{m}(u_2 - u_1)$$

Ισοζύγιο ενέργειας

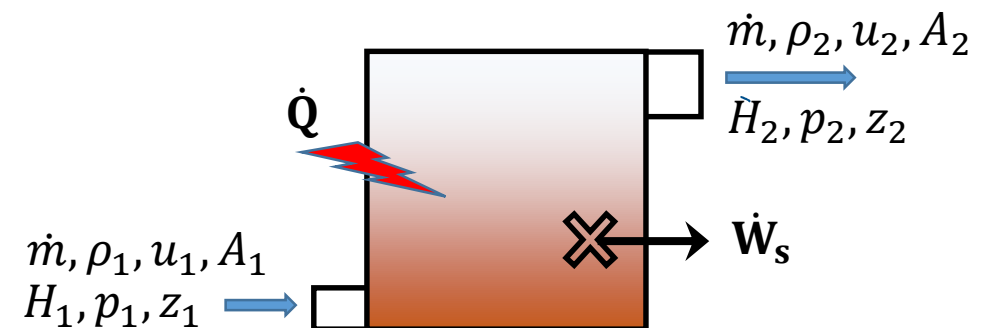
$$\int \left(H + \frac{1}{2} u^2 + gz \right) \rho(\underline{u} \cdot \underline{n})dS = \dot{Q} - \dot{W}_s$$

$$\dot{m} \left[(H_2 - H_1) + \frac{1}{2} (u_2^2 - u_1^2) + g(z_2 - z_1) \right] = \dot{Q} - \dot{W}_s$$

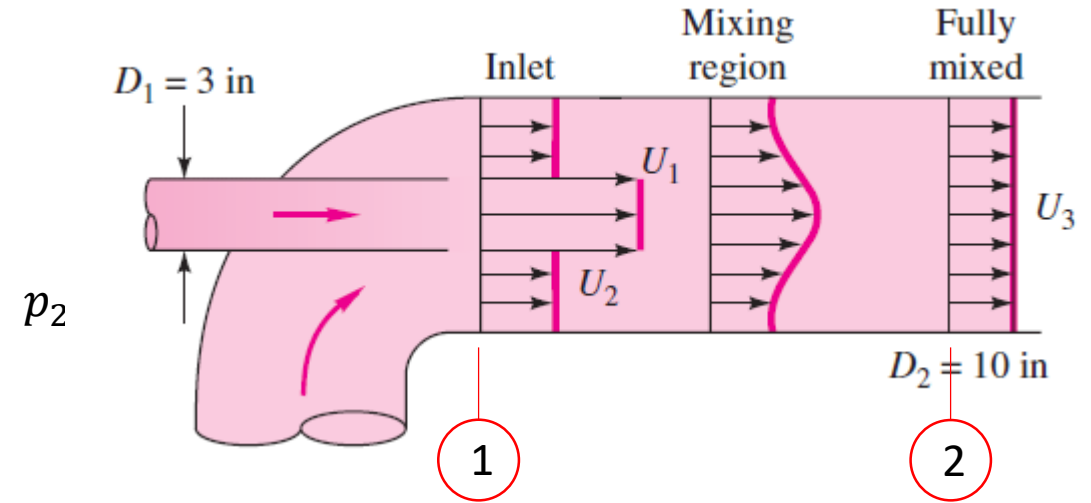
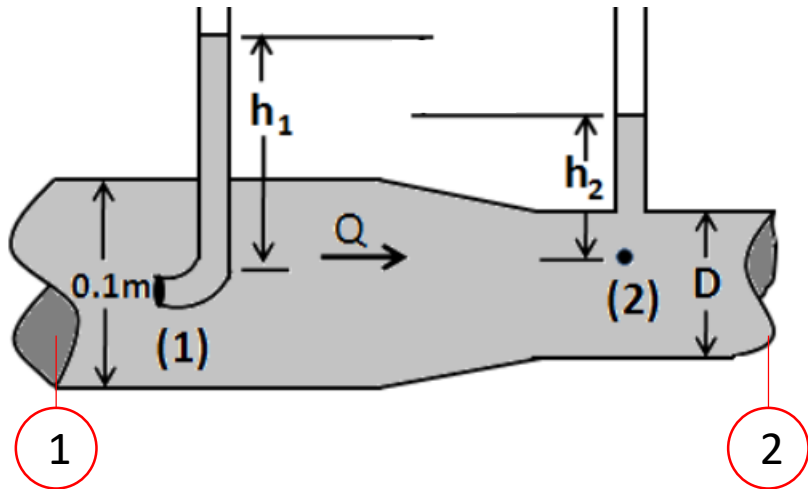
Ισοζύγιο μηχανικής ενέργειας

$$\dot{m} \left[\frac{1}{2} \Delta(u^2) + g\Delta z + \frac{\Delta p}{\rho} + l_w \right] + \dot{W}_s = 0$$

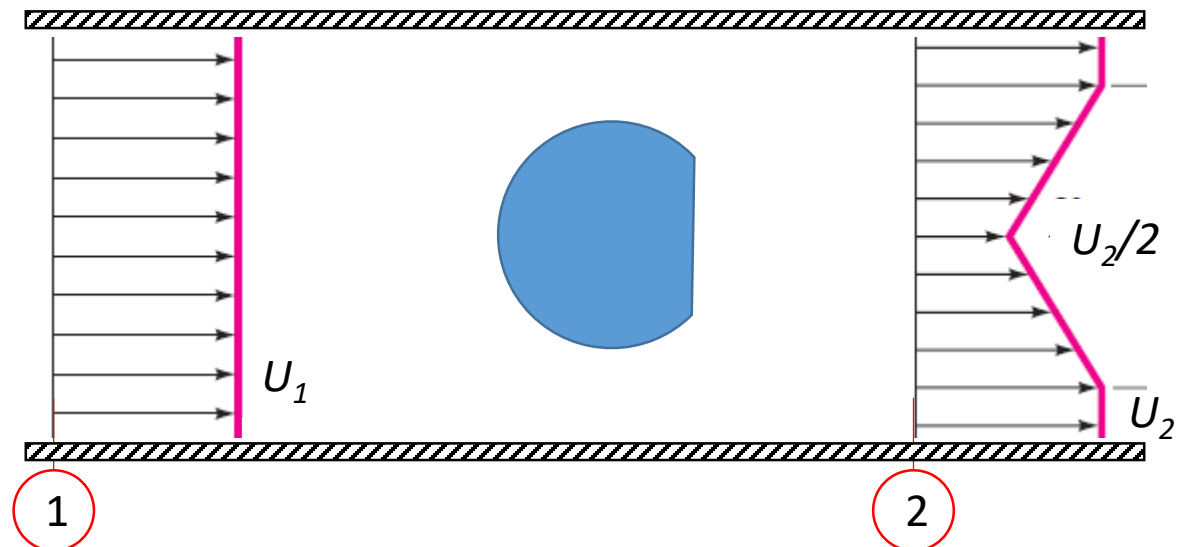
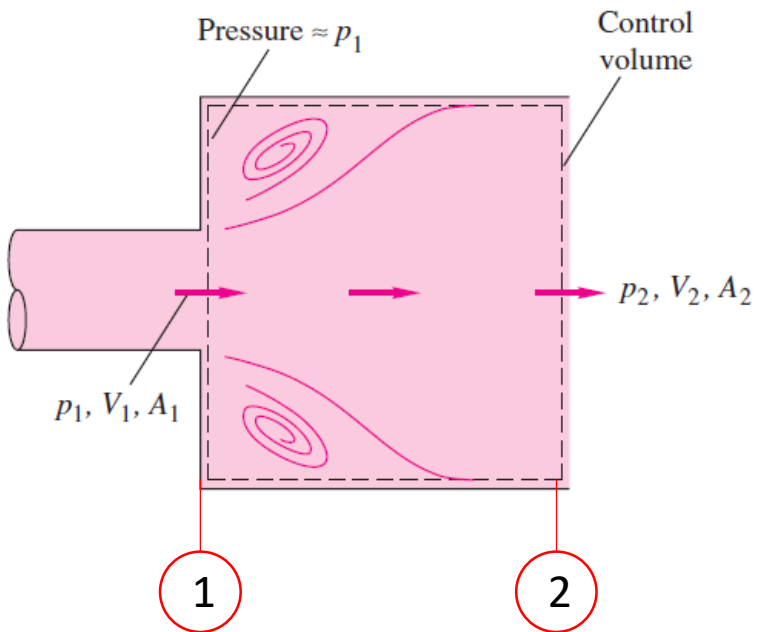
Άγνωστοι: p_2, l_w, F



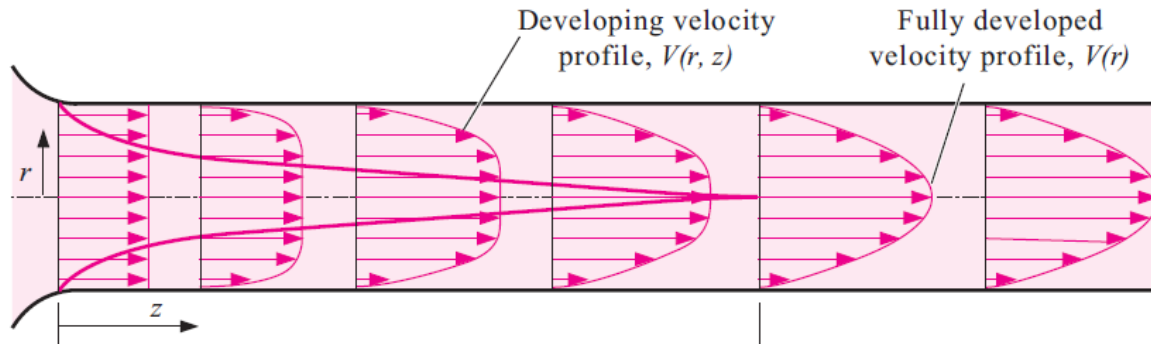
Παραδείγματα εφαρμογής ολοκληρωτικών ισοζυγίων



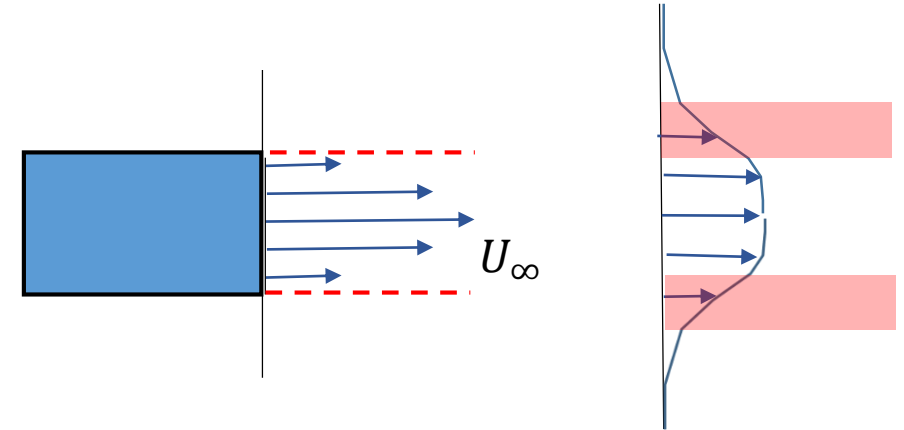
Άγνωστοι: p_2, l_w, F



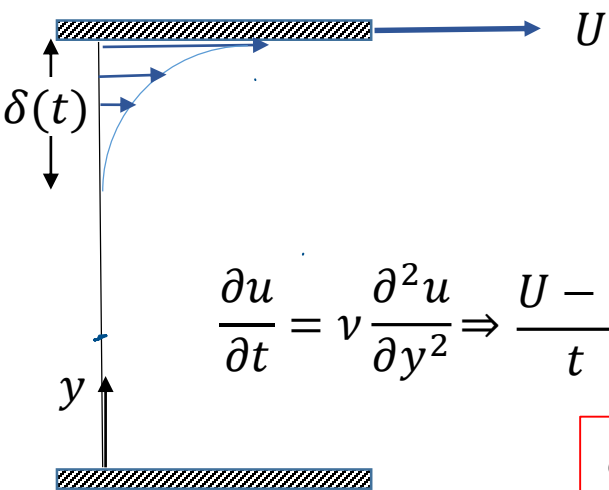
ΡΟΗ ΣΕ ΑΓΩΓΟ: Η επίδραση του ιξώδους εκτείνεται σε όλο το πεδίο



ΡΟΗ ΔΕΣΜΗΣ-ΣΤΡΩΜΑΤΟΣ ΔΙΑΤΜΗΣΗΣ

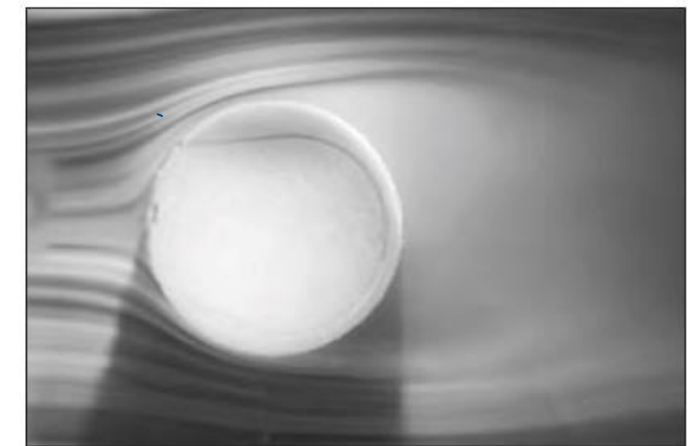
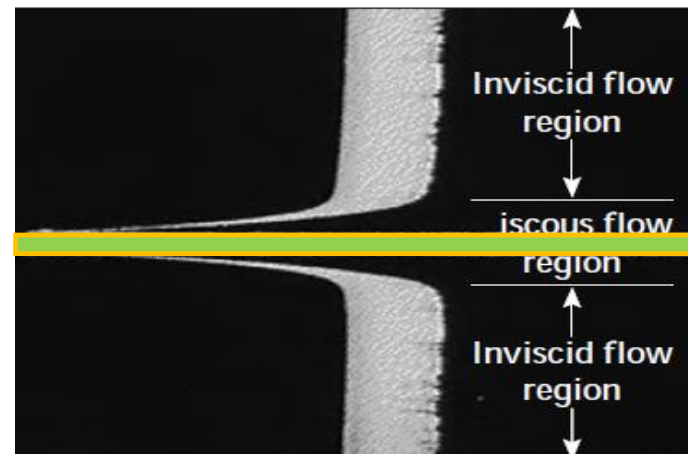


Βάθος διείσδυσης



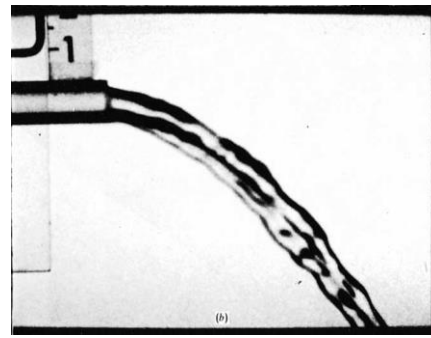
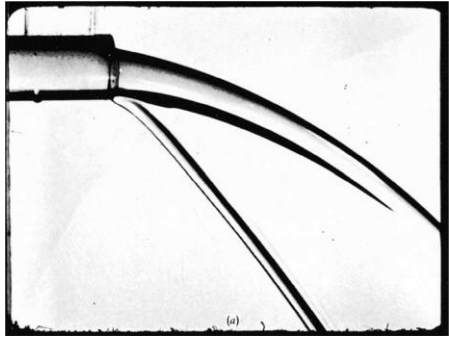
ΡΟΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΣΕ ΕΠΙΠΕΔΟ ΤΟΙΧΩΜΑ ΚΑΙ ΡΟΗ ΓΥΡΩ ΑΠΟ ΣΦΑΙΡΑ

Το ιξώδες καθορίζει τη ροή κοντά στο τοίχωμα και πίσω από το σώμα



(Έχω την εξίσωση αλλά δεν μπορώ να την λύσω)

Ο αριθμός Reynolds και η μετάπτωση σε τύρβη



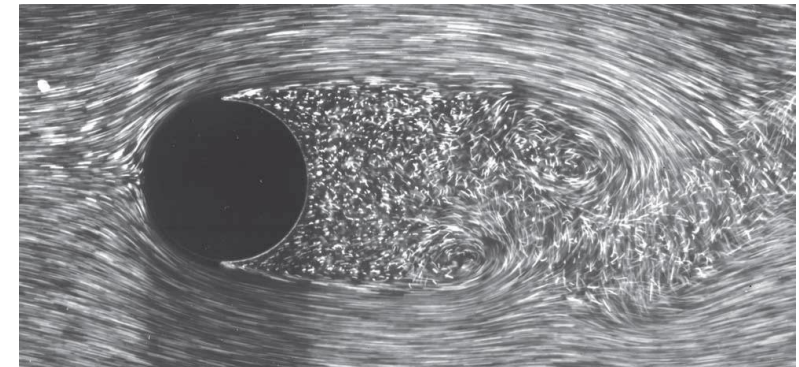
Αριθμός Reynolds

$$Re = \frac{\rho u d}{\mu} = \frac{u d}{\nu} = \frac{\text{(Αδρανειακές δυνάμεις)}}{\text{(Ιξώδεις δυνάμεις)}}$$

Οριακό στρώμα τοιχώματος	$Re \approx 3 - 5 \times 10^5$
Δέσμη-απόρρευμα	$Re \approx 10 - 100$
Ροή σε αγωγό	$Re \approx 2 - 100 \times 10^3$
Ροή γύρω από κύλινδρο	$Re \approx 5, 40, 200, 300000$

Θέματα έρευνας

- Εξέλιξη της ροής μέσω μίας (υπο-κρίσιμης) ή περισσότερων (υπερ-κρίσιμων) υδροδυναμικών ασταθειών
- Γραμμική και ασθενώς μη-γραμμική θεωρία
- Μεταβατική ενίσχυση διαταραχών (nonmodal growth)
- Δυναμικά συστήματα και χάος



Διανύσματα

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3 = u_i \underline{e}_i$$

Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (b_j \underline{e}_j)$$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$a_i \delta_{ij} = a_j$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = a_i b_i$$

Σύμβαση επαναλαμβανόμενων δεικτών

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

$$\underline{a} \times \underline{b} = (a_i \underline{e}_i) \times (b_j \underline{e}_j)$$

$$\underline{e}_i \times \underline{e}_j = \varepsilon_{ijk} \underline{e}_k$$

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i = j \text{ or } j = k \text{ or } i = k \\ +1, & ijk = 123 \text{ or } 231 \text{ or } 312 \\ -1, & ijk = 132 \text{ or } 213 \text{ or } 321 \end{cases}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \underline{e}_k$$

Τανυστής 2^{ης} τάξης

$$\underline{\underline{T}} = \tau_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j \quad \underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} = (a_i \underline{e}_i) \cdot (\tau_{jk} \underline{e}_j \underline{e}_k) = a_j \tau_{jk} \underline{e}_k$$

Χρήσιμη ιδιότητα: $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}$

Διαφορικοί τελεστές

$$\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

Κλίση

$$\underline{\nabla} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

$$\underline{\nabla} \underline{u} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

Απόκλιση

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{T}} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \underline{e}_j$$

Στροφή

$$\underline{\nabla} \times \underline{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_k$$

Τελεστής Laplace

$$\nabla^2 \varphi = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_i}$$

Διαφορική μεταβολή

$$\varphi(x_i, t) \Rightarrow d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i$$

Κινηματική Ροών

Περιγραφή κίνησης ρευστού

Περιγραφή κατά Euler: $\underline{u} = \underline{u}(\underline{x}, t)$, $p = p(\underline{x}, t)$

και κατά Lagrange: $\underline{x} = \underline{x}(\underline{X}_0, t)$, $\underline{x}(t = 0) = \underline{X}_0$

$$\underline{u}(\underline{x}, t) \equiv \underline{u}(\underline{X}_0, t)$$

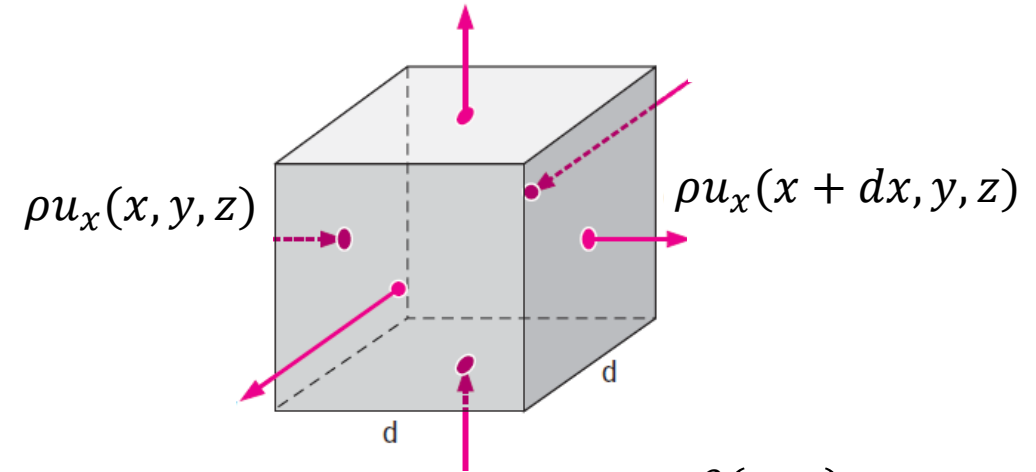
Υλική ή σωματιδιακή παράγωγος

$$\begin{aligned} T = T(\underline{x}, t) \rightarrow dT &= \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x} dx + \frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{\partial z} dz \\ &= \frac{\partial T}{\partial t} dt + \frac{\partial T}{\partial x_i} dx_i \end{aligned}$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} T$$

(Σύμβαση επαναλαμβανόμενων δεικτών)

Ισοζύγιο μάζας (εξίσωση συνέχειας)



$$\rho u_x(x + dx, y, z) dydz = \rho u_x(x, y, z) dydz + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx dydz$$

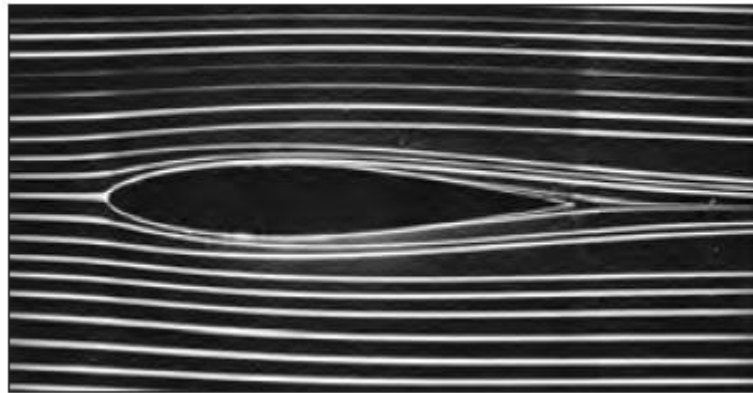
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho dx dy dz) + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) dx dy dz = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho + \rho (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho (\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = 0$$

$$(\underline{\nabla} \cdot \underline{u}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{V} \frac{DV}{Dt}$$

Ρυθμός μεταβολής όγκου
σωματιδίου ρευστού

Ροϊκές γραμμές: στιγμιαία απεικόνιση πεδίου ροής
(φωτογράφιση με υψηλή ταχύτητα)



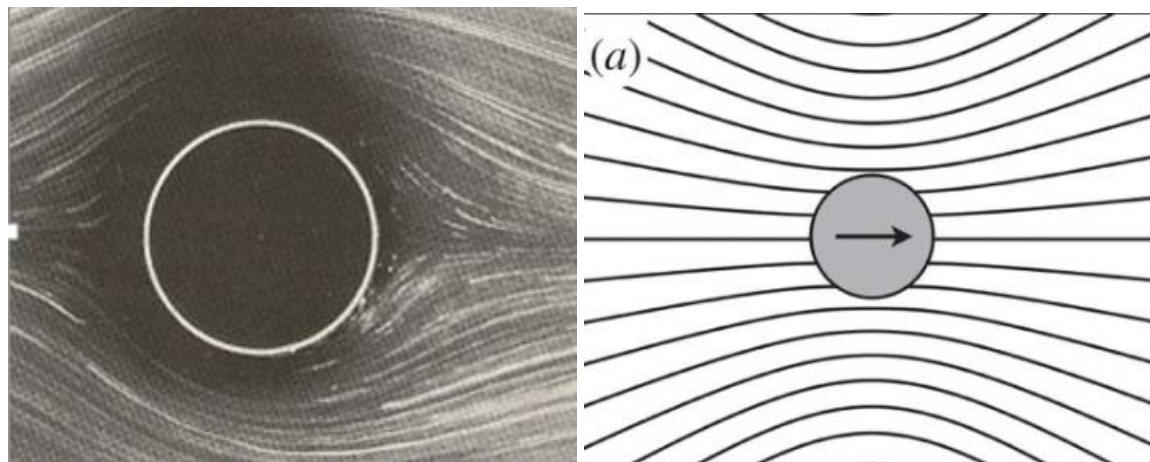
$$d\underline{x} \parallel \underline{u} \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

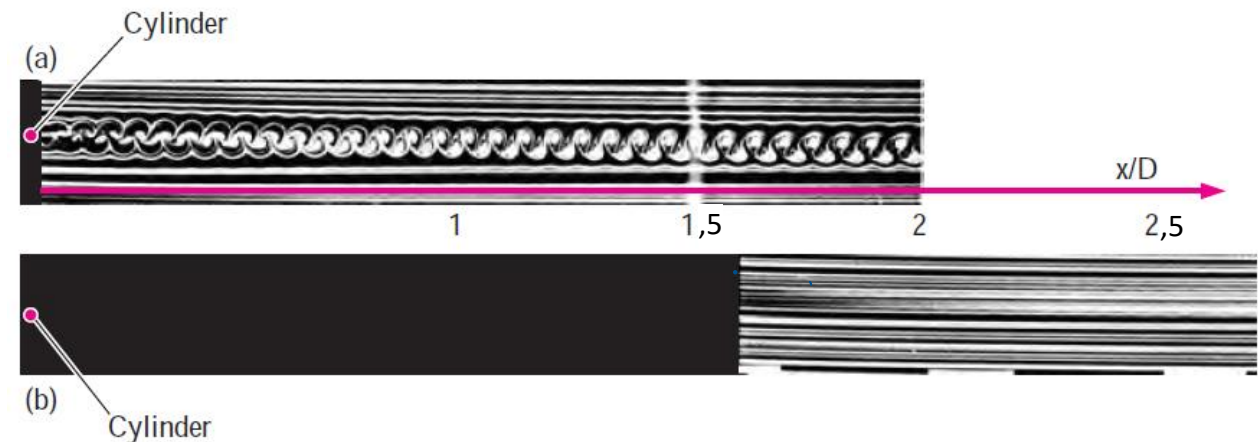
Τροχιές σωματιδίων: ολοκλήρωση χρονικής εξέλιξης
(φωτογράφιση με ανοικτό διάφραγμα)



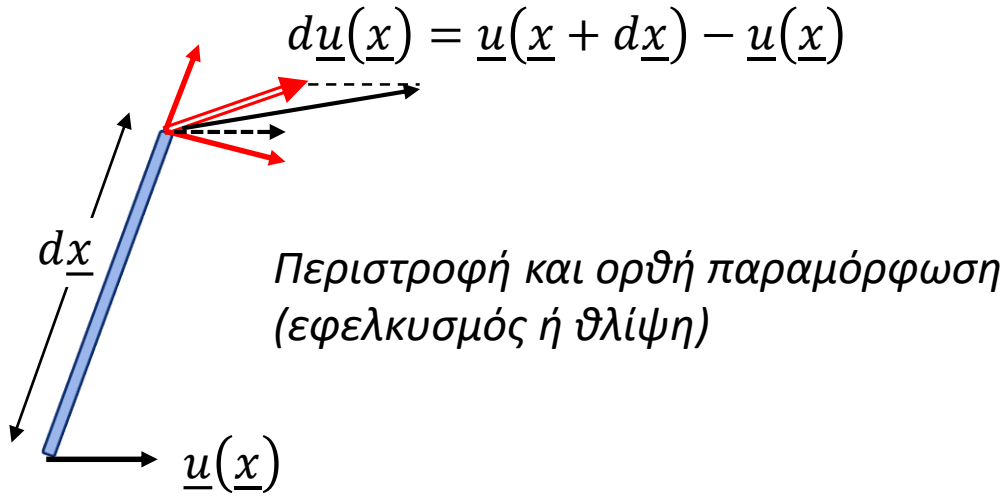
Ροϊκές γραμμές: κύλινδρος σε έρπουσα ροή



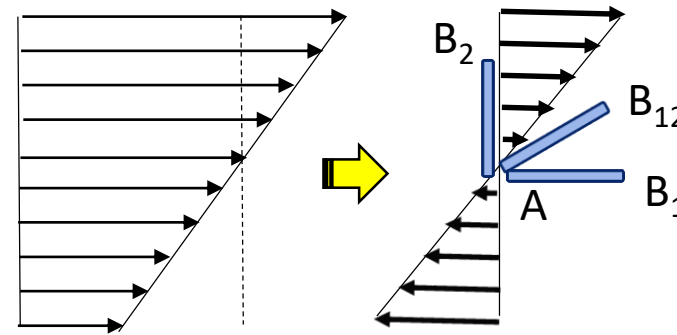
Γραμμές ιχνηθέτη: έγχυση χρωστικής



Ανάλυση κίνησης ρευστού



Ροή Couette (απλή διάτμηση-το όριο κάθε πεδίου ταχύτητας)

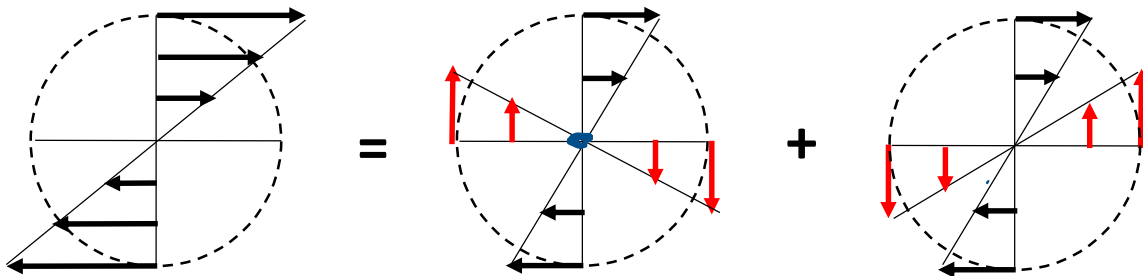


AB_1 : μετατόπιση
 AB_2 : περιστροφή
 AB_{12} : επιμήκυνση
 και περιστροφή

περιστροφή στερεού σώματος = μέση περιστροφή δύο ινών σε ορθή γωνία:

απλή παραμόρφωση = σχετική κίνηση - περιστροφή στερεού σώματος

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{AB_2} &= -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \Omega_{AB_1} &= 0 \end{aligned} \right\} \Omega_z = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$



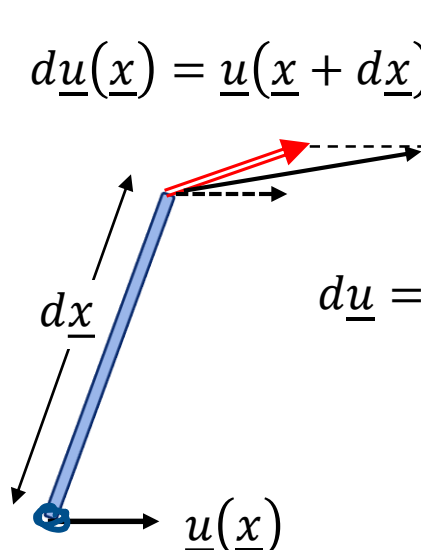
ΣΧΕΤΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

ΑΠΛΗ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ

απλή παραμόρφωση $\xrightarrow{\text{ιξώδες}}$ εσωτερικές τάσεις

Μαθηματική περιγραφή σχετικής κίνησης ρευστού



$$d\underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}(\underline{x} + d\underline{x}) - \underline{u}(\underline{x}) \quad \left[d\underline{u} = du_1 \underline{e}_1 + du_2 \underline{e}_2 + du_3 \underline{e}_3 \quad du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \right]$$

$$d\underline{u} = du_i \underline{e}_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \underline{e}_i = \left[\underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{d_{ij}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dx_j \underline{e}_i = d_{ij} dx_j \underline{e}_i + a_{ij} dx_j \underline{e}_i = \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} + \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{x}$$

a_{ij} : Αντισυμμετρικός τανυστής στροφής. Αξονικό διάνυσμα: $\Omega_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} a_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \underline{\underline{\Omega}} \times \underline{b} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot d\underline{x} = \underline{\underline{\Omega}} \times d\underline{x} \quad (\text{περιστροφή στερεού σώματος με γωνιακή ταχύτητα } \Omega)$$

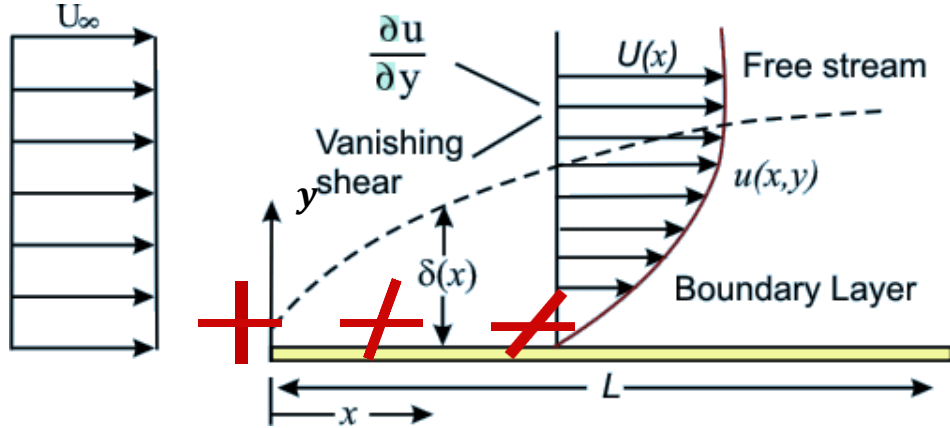
d_{ij} : Συμμετρικός τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης. Χαρακτηριστικές διευθύνσεις.

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{n}_1 = \lambda_1 \underline{n}_1 \Rightarrow \underline{\underline{D}} \cdot (dx \underline{n}_1) = \lambda_1 dx \underline{n}_1 \Rightarrow \underline{\underline{D}} \cdot d\underline{x} = \lambda_1 d\underline{x} \quad (\text{απλή επιμήκυνση})$$

ΣΤΡΟΒΙΛΟΤΗΤΑ: $\underline{\underline{\omega}} = \underline{\nabla} \times \underline{u} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \underline{e}_k = 2\underline{\underline{\Omega}}$

π.χ. $\omega_3 = \varepsilon_{ij3} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$

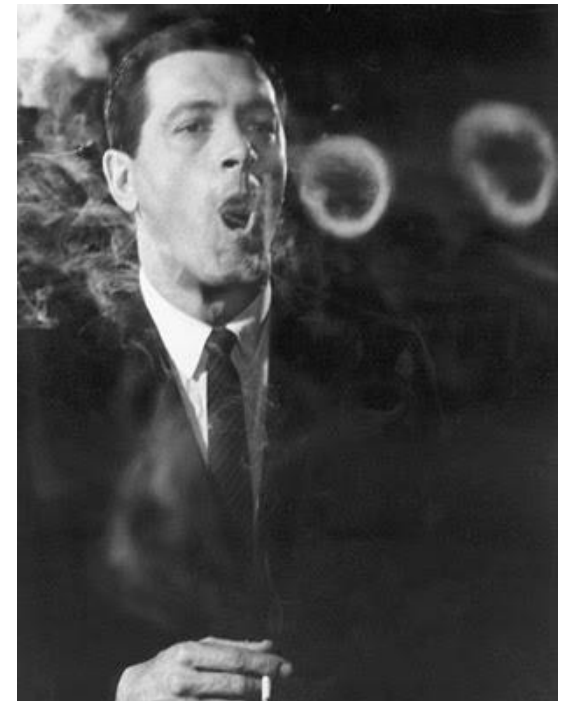
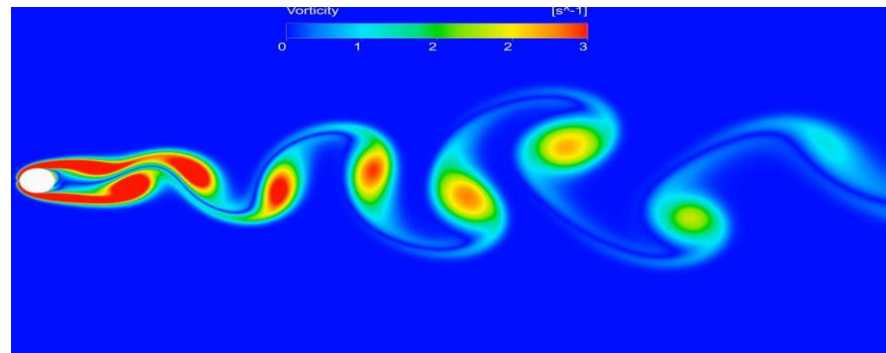
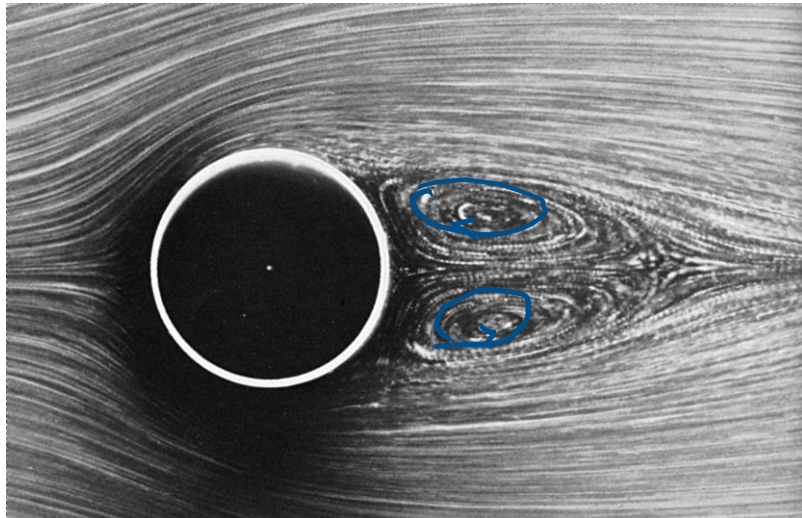
Δημιουργία στροβιλότητας



- Σωματίδια ρευστού κοντά στο τοίχωμα αποκτούν στροβιλότητα λόγω της συνοριακής συνθήκης μη-ολίσθησης
- Η στροβιλότητα μεταφέρεται με τη ροή και απλώνεται κάθετα στη ροή (διαχέεται με διαχυτότητα $\nu = \mu/\rho$). Ατριβείς ροές είναι συνήθως αστρόβιλες
- Ρευστό με στροβιλότητα συχνά αποκολλάται και σχηματίζει στροβίλους (περιοχές συγκεντρωμένης στροβιλότητας με κλειστές ροϊκές γραμμές)

Σχηματισμός στροβίλων

- Παραδείγματα: απόρευμα μη-αεροδυναμικών σωμάτων, δίνες vonKarman, smoke rings
<https://www.youtube.com/watch?v=3mULL6O6f38>
<https://www.youtube.com/watch?v=IDeGDFZSYo8>

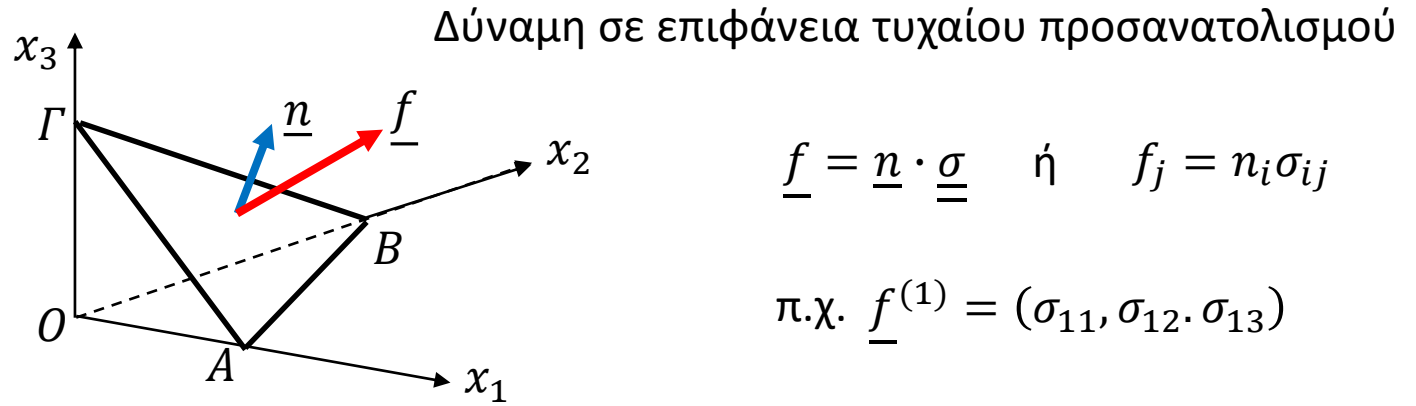
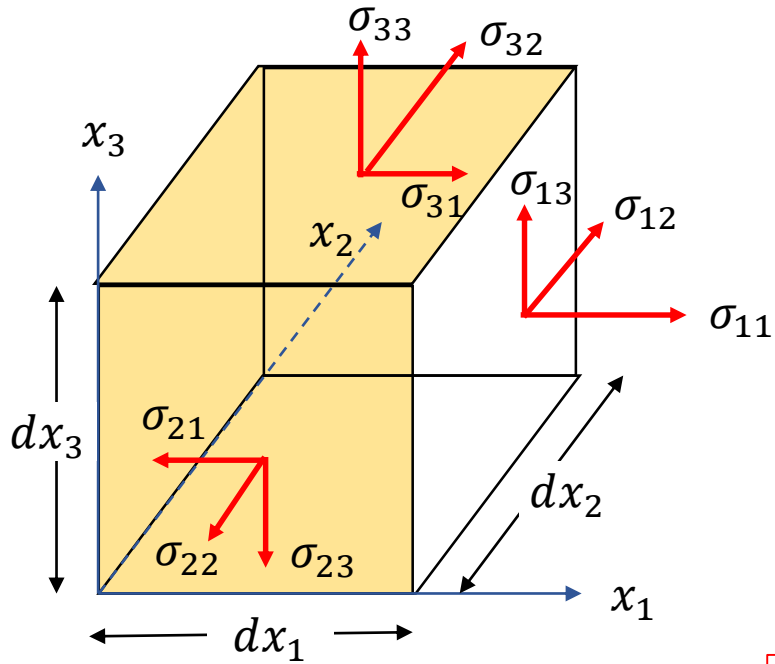


<https://www.youtube.com/watch?v=54Dm3IMwIL4> (Σχηματισμός «μανιταριού» σε θερμικό πλούμιο)
<https://www.youtube.com/watch?v=5YwnY0wPphA> (Αεροτομή σε απώλεια στήριξης)

Δυναμική Ροών

Ανάλυση εσωτερικών δυνάμεων στη ροή

Συνιστώσες τανυστή τάσης



Γενική καταστατική εξίσωση ρευστού

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} \quad p = -\frac{1}{3}\sigma_{ii} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \tau_{ii} = 0$$

Η ιξώδης τάση τ_{ij} σε ένα σημείο εξαρτάται από τη σχετική κίνηση σε μια μικρή γειτονία του σημείου και είναι ανεξάρτητη της μεταφοράς ή περιστροφής του συστήματος αναφοράς

Τανυστής ιξώδους τάσης

$$\tau_{ij} = F(d_{ij}) = \kappa_0 \delta_{ij} + \kappa_1 d_{ij} (+\kappa_2 d_{il} d_{lj})$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2 = f(I_D, II_D, III_D) \quad (\text{αναλλοίωτες του τανυστή})$$

$$I_D = tr(\underline{\underline{D}}) = d_{ii} \quad II_D = tr(\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{D}}) = d_{ij} d_{ij} \quad III_D = det(\underline{\underline{D}})$$

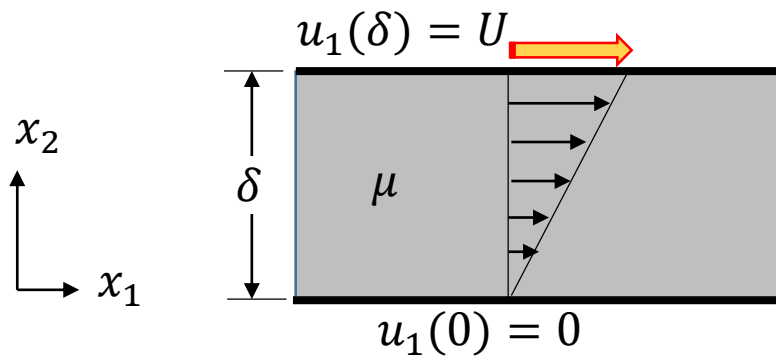
Ορθές/διατμητικές παραμορφώσεις προκαλούν -ή προκαλούνται από- αντίστοιχα ορθές/διατμητικές τάσεις.

$$\tau_{ij} = \kappa_0 \delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \Rightarrow \kappa_0 = -\frac{2\mu}{3} d_{kk}$$

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} - \frac{2\mu}{3} d_{kk} \delta_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

ασυμπίεστο

Ιξώδης διατμητική τάση

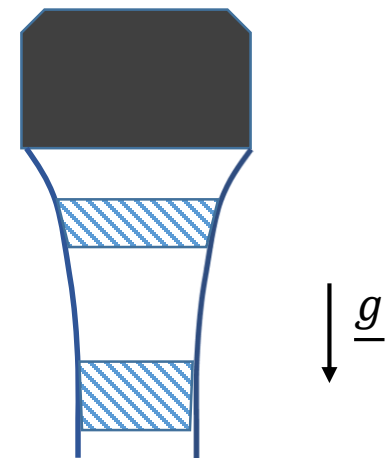


$$\tau_{21} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{(U - 0)}{\delta}$$

Ορισμός ιξώδους : $\mu [=] \text{ kg/m} \cdot \text{s}$



Ιξώδης ορθή τάση

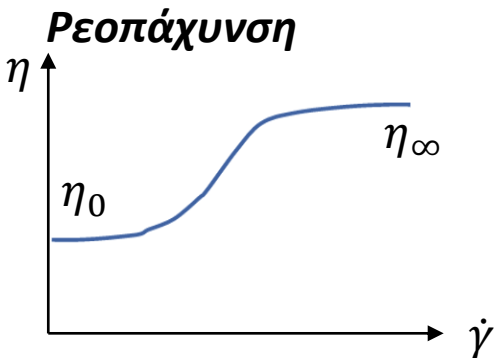
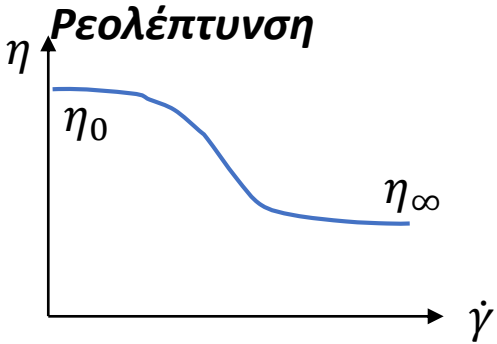


$$\tau_{22} = 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

Γενικευμένα Νευτωνικά ρευστά

$$\tau_{ij} = 2\eta(\dot{\gamma}) d_{ij}$$

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\text{II}_D} = \sqrt{d_{ij}d_{ij}} \text{ (ένταση διάτμησης)}$$



Rheology_Markovitz(NatlComFluidMech)

https://www.youtube.com/watch?v=Ol6bBB3zuGc&list=PL0EC6527BE871ABA3&index=3&feature=plpp_video

Μη-Νευτωνικά ρευστά (απόκριση σε διάτμηση)

Διάτμηση μη-Νευτωνικού ρευστού προκαλεί ορθές τάσεις

Ιξωδοπλαστική συμπεριφορά

$$\tau = \mu\dot{\gamma} + \tau_y$$

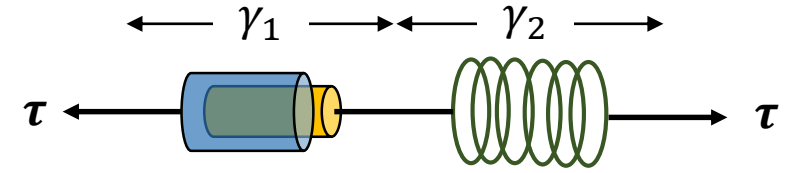
$$\tau \leq \tau_y \Rightarrow \dot{\gamma} = 0$$

Ιξωδοελαστική συμπεριφορά (μοντέλο Maxwell)

$$\tau = \mu\dot{\gamma}_1$$

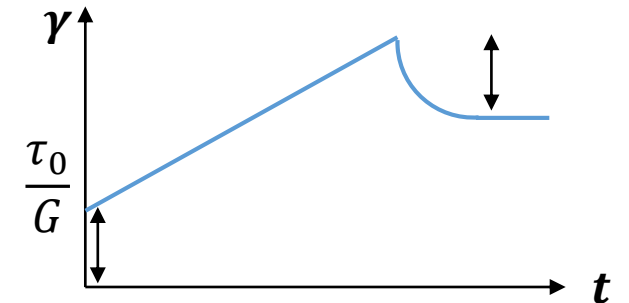
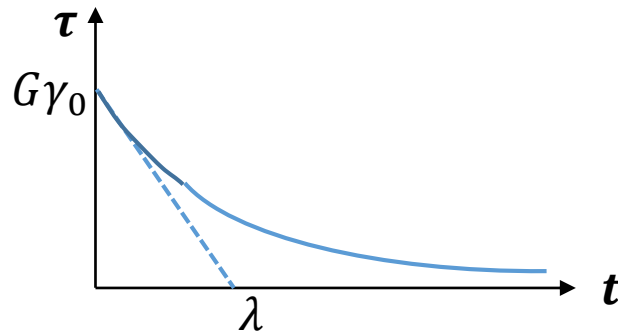
$$\tau = G\gamma_2 \quad (\dot{\gamma}_2 = G\dot{\gamma}_1)$$

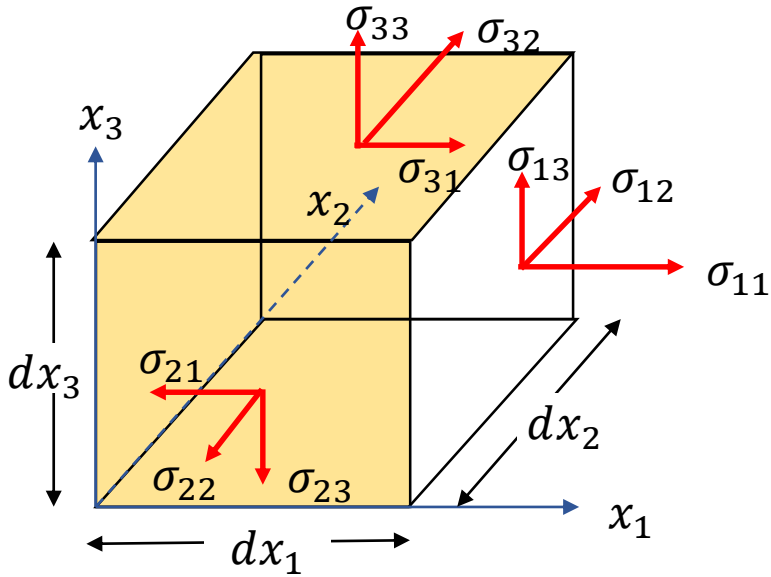
$$\tau + \lambda\dot{\tau} = \mu\dot{\gamma}$$



$\lambda = \mu/G$: χρόνος χαλάρωσης

$$De = \lambda/t_{flow}$$





$$\sigma_{1j}(\underline{x} + dx_1 \underline{e}_1) = \sigma_{1j}(\underline{x}) + \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_1} dx_1 \Rightarrow \rho \frac{Du_j}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho g_j \quad (\text{εξίσωση Cauchy})$$

Ασυμπίεστο Νευτώνικό ρευστό

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \rho \frac{Du_j}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_i} \right) + \rho g_j$$

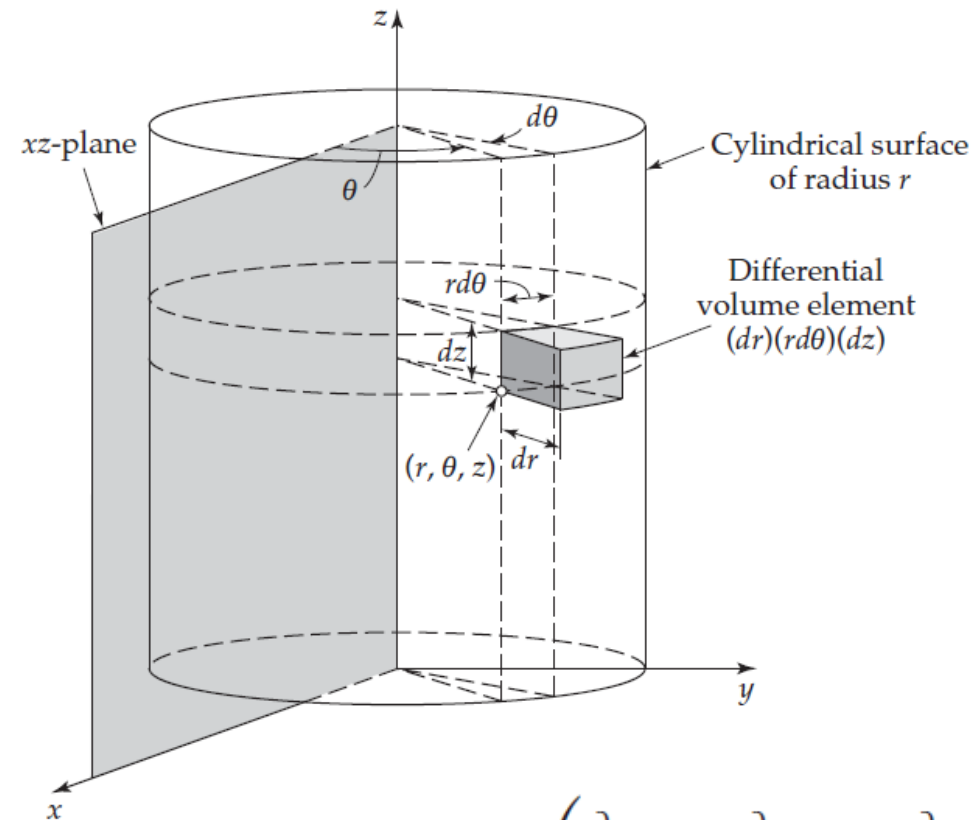
$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] + \rho g_x$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] + \rho g_y$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες



Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0$$

Εξισώσεις \$r, \theta, z\$ ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

Εξισώσεις συνέχειας και Navier-Stokes σε σφαιρικές συντεταγμένες

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho v_\phi) = 0$$

Εξισώσεις r, θ, φ ορμής

$$\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\theta^2 + v_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

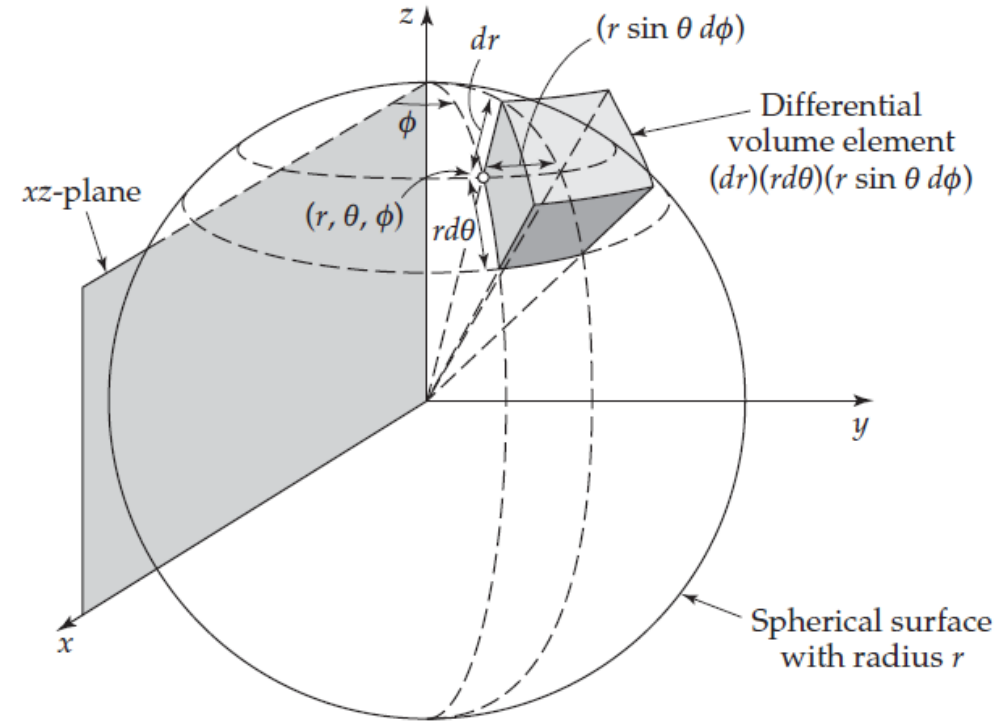
$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^2 v_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \phi^2} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_r v_\theta - v_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r + v_\theta v_\phi \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi}$$

$$+ \mu \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\phi \sin \theta) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\phi}{\partial \phi^2} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cot \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi$$



Χαρακτηριστικές κλίμακες-Ανάλυση τάξης μεγέθους

ή $\rho \left(\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \underline{u} + \rho \underline{g}$ (Εξίσωση Navier-Stokes)

αδρανειακές δυνάμεις (επιτάχυνση)

δυνάμεις πίεσης

Ιξώδεις δυνάμεις

Βαρυτικές (εξωτερικές) δυνάμεις

Σύγκριση αδρανειακών με ιξώδεις δυνάμεις

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\mu \nabla^2 \underline{u}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\mu U/L^2} = \frac{\rho UL}{\mu} = \mathbf{Re}$$

Σύγκριση αδρανειακών με βαρυτικές δυνάμεις
(για ροές με ελεύθερη επιφάνεια)

$$\frac{|\rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}|}{|\rho \underline{g}|} \sim \frac{\rho U(U/L)}{\rho g} = \frac{U^2}{gL} = \mathbf{Fr}$$

Η πίεση εξισορροπεί την κυρίαρχη δύναμη

$$\mathbf{Re} \gg 1 \Rightarrow \Delta p \sim \rho U^2$$

$$\mathbf{Re} \ll 1 \Rightarrow \Delta p \sim \mu U/L$$

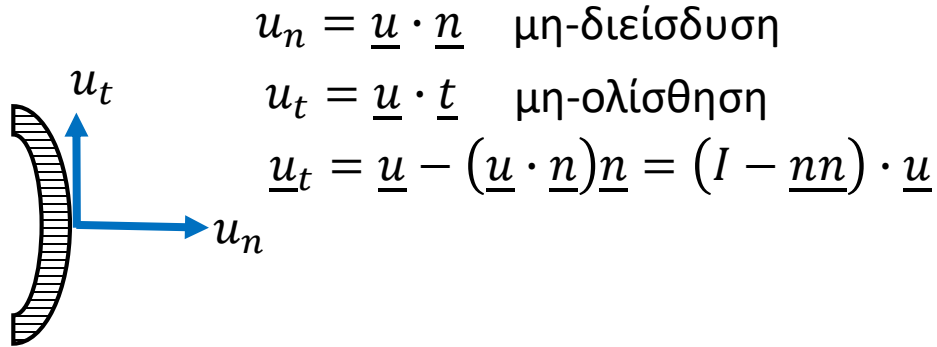
Ανάλυση τάξης μεγέθους

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{\Delta u}{\Delta x} \sim \frac{U - 0}{L - 0} \sim \frac{U}{L}$$

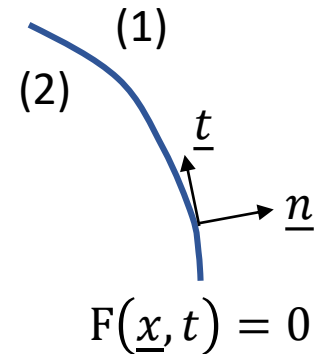
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \frac{(\Delta u / \Delta x) - 0}{\Delta x} \sim \frac{\Delta u}{(\Delta x)^2} \sim \frac{U}{L^2}$$

Συνοριακές συνθήκες

ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΙΧΩΜΑ



ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ-ΑΕΡΙΟΥ



$$u_n^{(1)} = u_n^{(2)}$$

$$u_t^{(1)} = u_t^{(2)}$$

$$\frac{DF}{Dt} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \underline{u}^{(i)} \cdot \underline{\nabla} F = 0, i = 1, 2$$

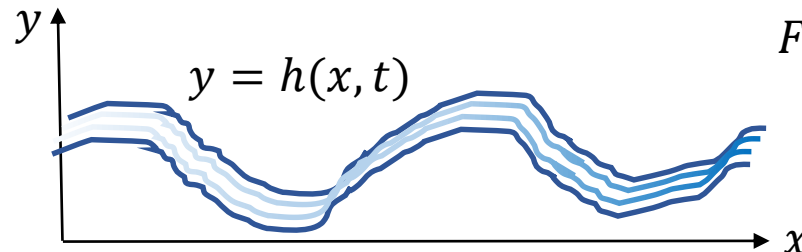
Συνθήκη ολίσθησης σε τοίχωμα

- Ατριβές ρευστό
- Αραιά αέρια (μοριακή ολίσθηση)
- Μικροφουσαλίδες
- Ηλεκτρικό πεδίο (ζ-δυναμικό τοιχωμάτων)

$$u_{slip} = \lambda \left(\frac{du}{dy} \right)_w$$

Παράδειγμα: Διδιάστατα κύματα στο νερό

Ένα σωματίδιο στην ελεύθερη επιφάνεια κινείται παραμένοντας πάντα στην επιφάνεια, άρα $DF/Dt = 0$



$$F(\underline{x}, t) = h(x, t) - y \Rightarrow$$

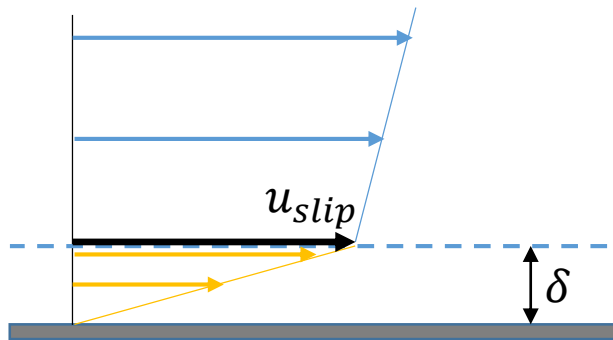
$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v$$

Δυναμικές συνοριακές συνθήκες

ΣΤΕΡΕΟ ΤΟΙΧΩΜΑ Οι τάσεις παραλαμβάνονται από το στερεό υλικό

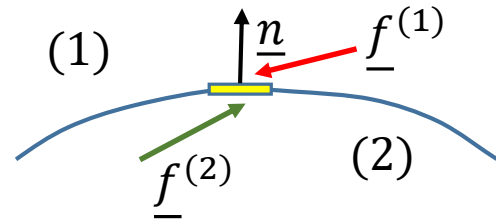
ΔΙΕΠΙΦΑΝΕΙΑ ΥΓΡΟΥ-ΑΕΡΙΟΥ Οι δυνάμεις ισορροπούν (μηδενική μάζα στη διεπιφάνεια)

Μικροφυσαλίδες στο τοίχωμα



$$\mu_w \left(\frac{du}{dy} \right)_w = \mu_{air} \frac{u_{slip}}{\delta} \Rightarrow$$

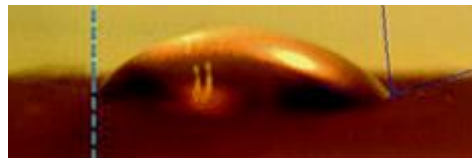
$$u_{slip} = \left(\frac{\mu_w \delta}{\mu_{air}} \right) \left(\frac{du}{dy} \right)_w$$



$$\underline{f}^{(1)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{n}$$

$$\underline{f}^{(2)} = \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{n})$$

Η σημασία της επιφανειακής τάσης



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{n} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{n}) + \gamma(-2\kappa_m \underline{n}) + \underline{\nabla}_s \gamma = 0$$

γ : επιφανειακή τάση

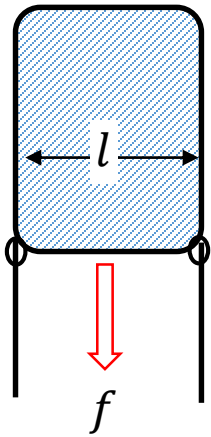
κ_m : μέση καμπυλότητα διεπιφάνειας

$\gamma(-2\kappa_m \underline{n})$: κάθετη δύναμη

$\underline{\nabla}_s \gamma$: τάση Marangoni

Επιφανειακή τάση-τριχοειδής πίεση

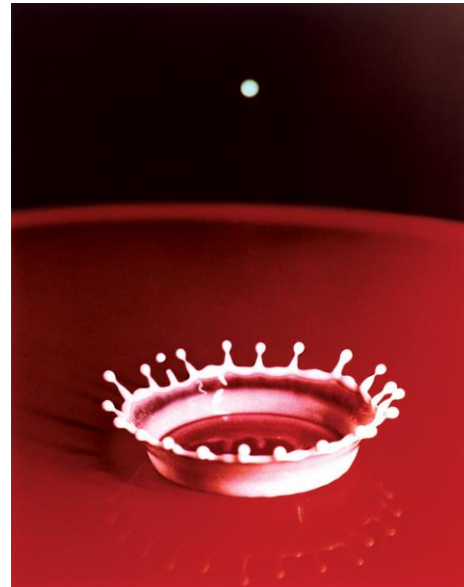
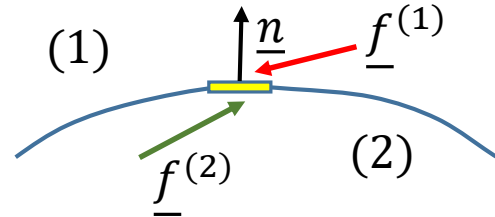
Ορισμός επιφανειακής τάσης



$$f = \gamma \cdot 2l \Rightarrow \gamma = \frac{f}{2l}$$

$$\begin{aligned} \delta W_s &= f dx = (\gamma \cdot 2l) dx \\ &= \gamma dA \Rightarrow \gamma = \frac{\delta W_s}{\delta A} \end{aligned}$$

γ : ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας

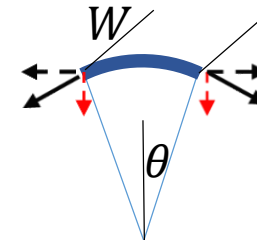


Σφαιρική σταγόνα ή φυσαλίδα

$$P_{in} - P_{out} = \frac{2\gamma}{R}$$

Ισορροπία χωρίς ροή

$$\frac{\underline{\sigma}^{(1)} \cdot \underline{n}}{-p_1 \underline{n}} + \frac{\underline{\sigma}^{(2)} \cdot (-\underline{n})}{p_2 \underline{n}} + \gamma(-2\kappa_m \underline{n}) + \underline{\nabla}_s \gamma = 0$$

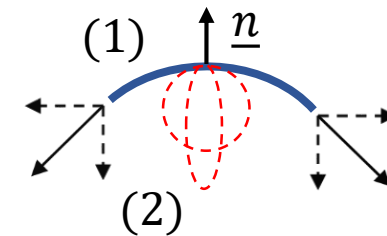


Καμπυλότητα σε μία διάσταση

$$2(\gamma W \sin \theta) = \Delta p (W \cdot 2\theta R)$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\gamma}{R} = \kappa \gamma$$

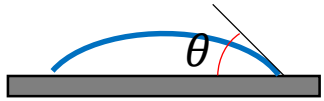
Μέση καμπυλότητα



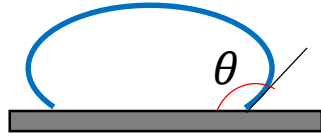
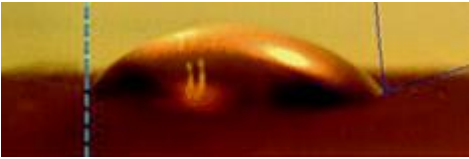
$$2\kappa_m = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

https://www.youtube.com/watch?v=MUImkSnrAzM&list=PL0EC6527BE871ABA3&index=4&feature=plpp_video

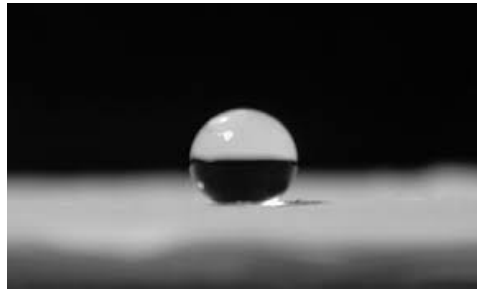
ΔΙΑΒΡΟΧΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΑΠΟ ΥΓΡΟ



Διαβρεχόμενη επιφάνεια

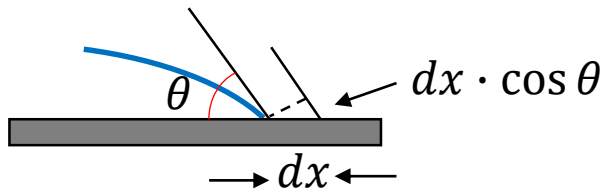


Μη-διαβρεχόμενη επιφάνεια



Γωνία επαφής

$$\cos \theta = \frac{\gamma_{SV} - \gamma_{SL}}{\gamma}$$



$$dE = (\gamma_{SL} - \gamma_{SV})2\pi R \cdot dx + \gamma 2\pi R dx \cdot \cos \theta = 0$$

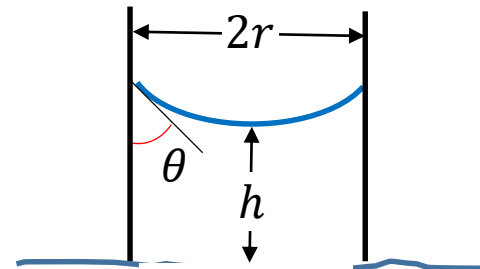
$$S = (\gamma_{SV} - \gamma_{SL}) - \gamma$$

$S \geq 0$: τέλεια διαβροχή

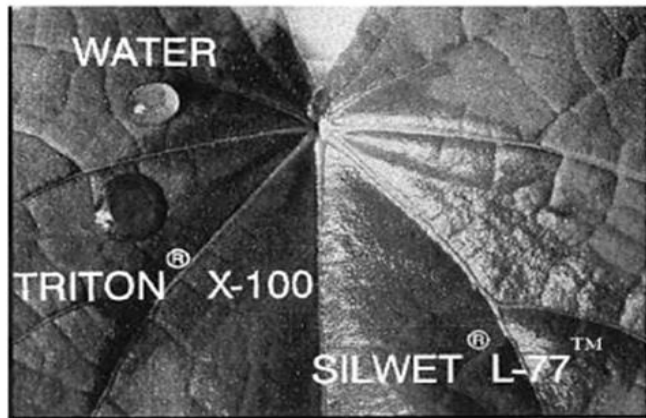
$S < 0$: μερική διαβροχή



ΤΡΙΧΟΕΙΔΗΣ ΑΝΥΨΩΣΗ ΥΓΡΟΥ



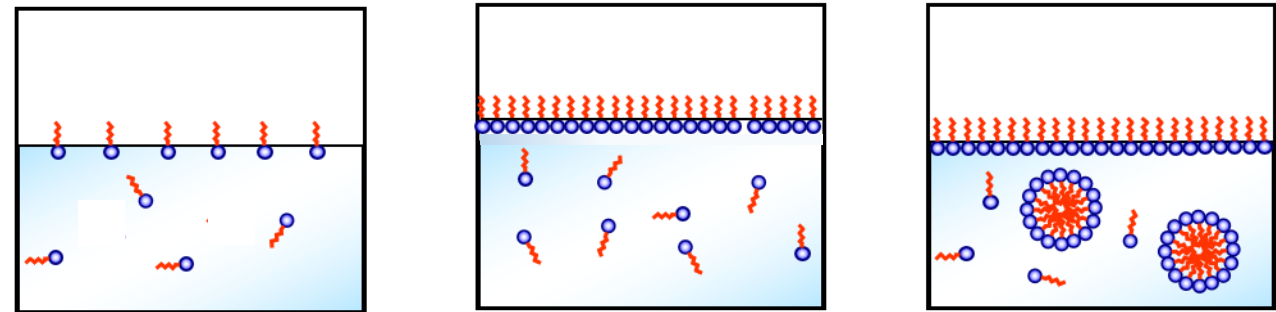
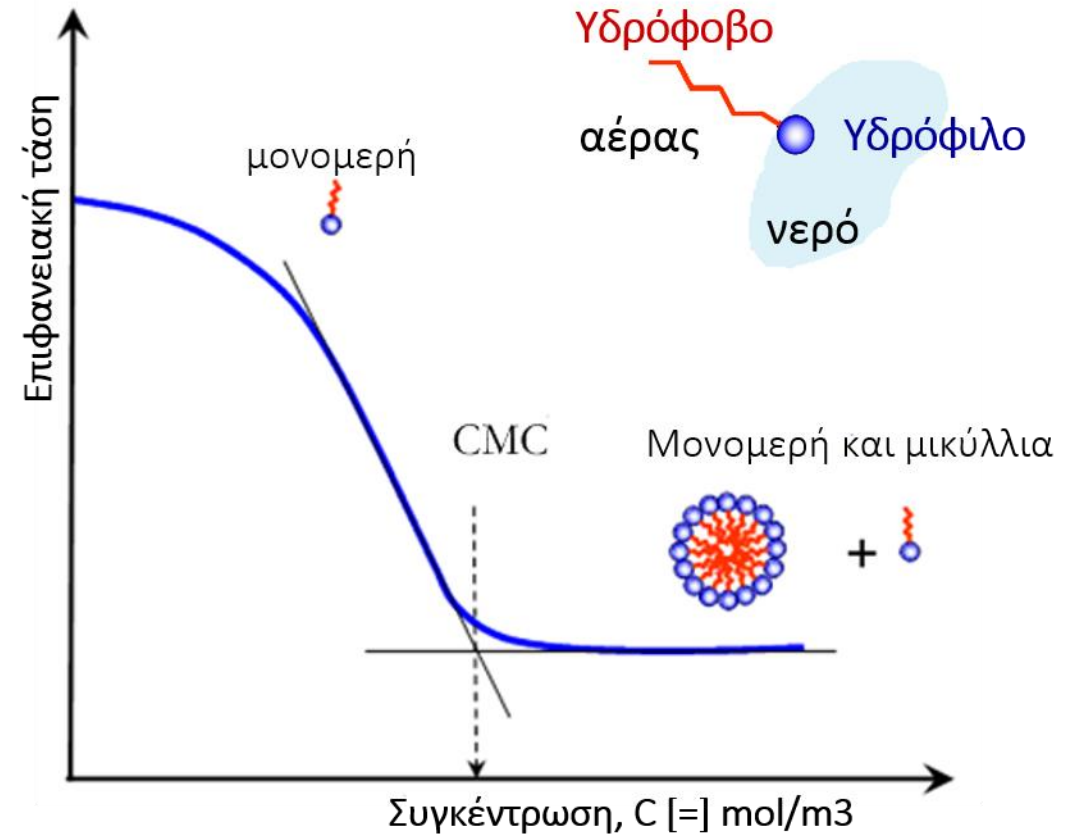
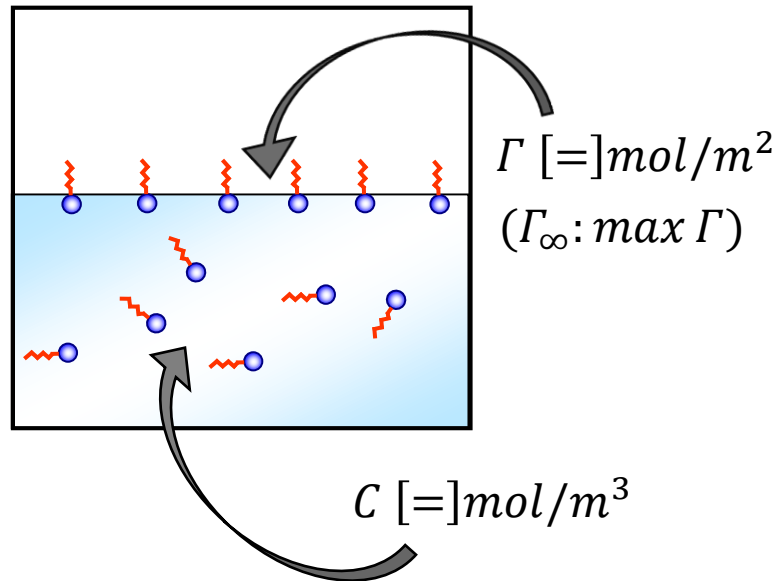
$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{rg(\rho_l - \rho_v)}$$



$$\gamma = \gamma(\Gamma)$$

$$\Gamma \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow$$

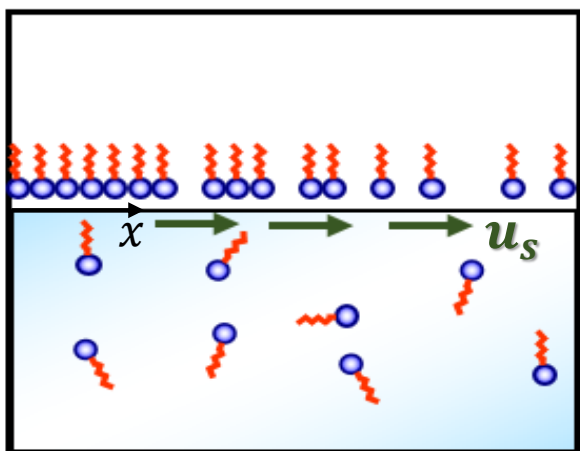
$$k_a C (\Gamma_\infty - \Gamma) = k_d \Gamma$$



$$\underline{\underline{\sigma}}^{(1)} \cdot \underline{\underline{n}} + \underline{\underline{\sigma}}^{(2)} \cdot (-\underline{\underline{n}}) + \gamma(-2\kappa_m \underline{\underline{n}}) + \underline{\underline{\nabla}}_s \gamma = 0$$

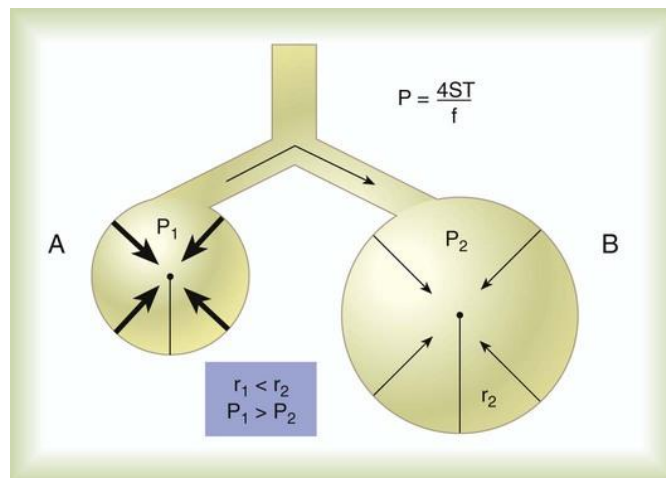
Δύο πηγές σχηματισμού τάσεων Marangoni

$$\gamma = \gamma(\Gamma, T) : \Gamma \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow \text{ or } T \uparrow \Rightarrow \gamma \downarrow \quad \longrightarrow$$

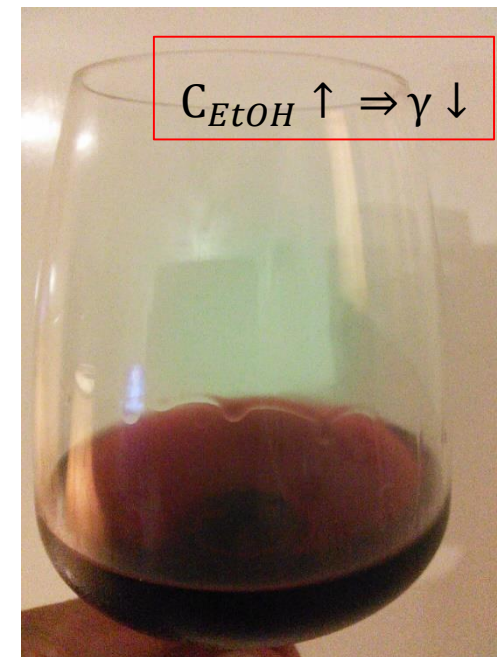


$$\begin{aligned} \gamma &\longleftarrow \overbrace{\hspace{2cm}}^{dx} \longrightarrow \gamma + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) dx \\ &= \gamma + \left(\frac{d\gamma}{d\Gamma}\right) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right) dx \end{aligned}$$

Πνευμονικές κυψελίδες



Το κρασί που δακρύζει



<https://www.youtube.com/watch?v=FeUdsyRZdTs>

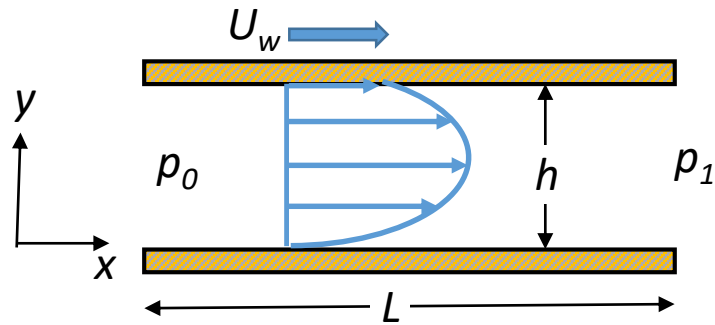
Ευθύγραμμες ροές και υδραυλικά δίκτυα

The art of the engineer (Richard Feynman)

We know what physical laws mean. We have the mathematical tools to derive exact solutions for a few simple situations. To combine the two in order to estimate precisely enough what will happen in a complex situation is the art of the engineer. This frequently involves the ability to know which simple situation (from the solvable ones) best approaches the real-life problem faced.

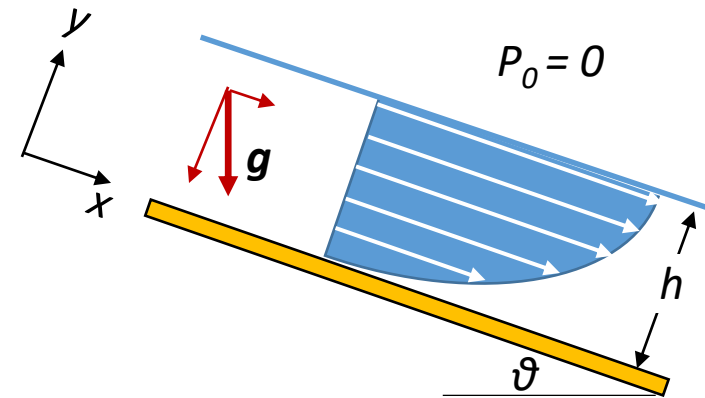
$$\underline{u}(x, y, z) = (u_x, 0, 0) \quad (\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow u_x(x, y, z) = u_x(y)$$

Ροή Couette-Poiseuille σε κανάλι



Ισοζύγια;
Συνοριακές συνθήκες;

Βαρυτική ροή υγρού υμένα



$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{dp}{dx} + \mu \frac{d^2 u_x}{dy^2} \\ \frac{dp}{dx} &= \frac{p_1 - p_0}{L} = -\frac{\Delta P}{L} \end{aligned} \right\} \Rightarrow u_x(y) = U_w \frac{y}{h} + \frac{\Delta P}{2\mu L} y(h - y)$$

$$g_y = -g \cos\theta \Rightarrow p(x, y) = \rho g \cos\theta (h - y)$$

$$g_x = g \sin\theta \Rightarrow u_x(y) = \frac{\rho g \sin\theta}{2\mu} y(2h - y)$$

$$V = \frac{\rho g \sin\theta h^2}{3\mu} = \frac{2}{3} u_x(h), \quad Re = \frac{Vh}{\nu} = \frac{\rho g \sin\theta h^3}{3\nu^2}$$

Μονοδιάστατη ροή

$$(\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

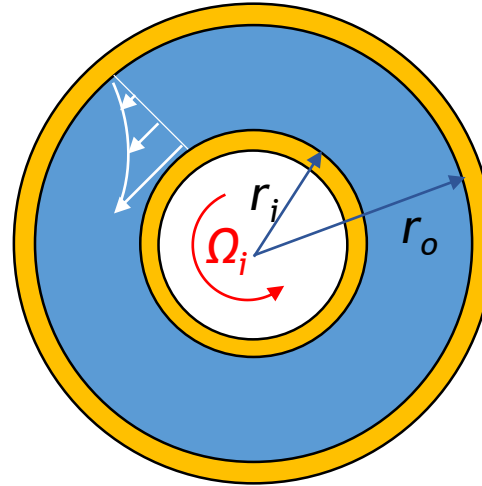
Συμμετρία ως προς ϑ

$$u_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{u}(r, \theta, z) = (0, u_\theta, 0) \\ u_\theta(r, \theta, z) = u_\theta(r) \end{cases}$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) \right) \right] \Rightarrow u_\theta = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

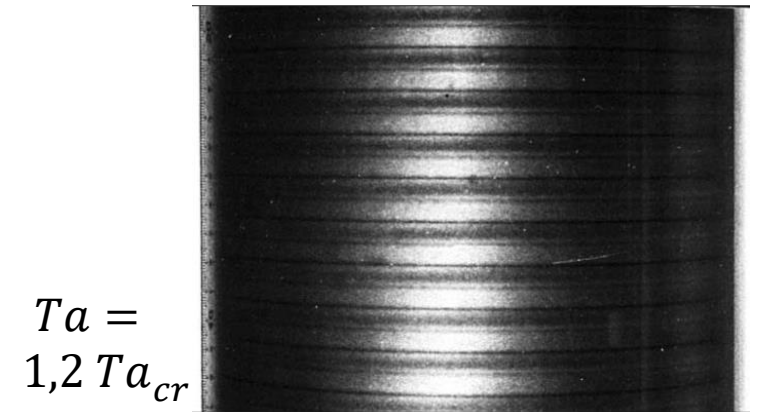
Συμμετρία ως προς ϑ

$$\left. \begin{array}{l} u_\theta(r_i) = r_i \Omega_i \\ u_\theta(r_o) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow u_\theta = r_i \Omega_i \frac{\left(\frac{r_o}{r} - \frac{r}{r_o} \right)}{\left(\frac{r_o}{r_i} - \frac{r_i}{r_o} \right)}$$

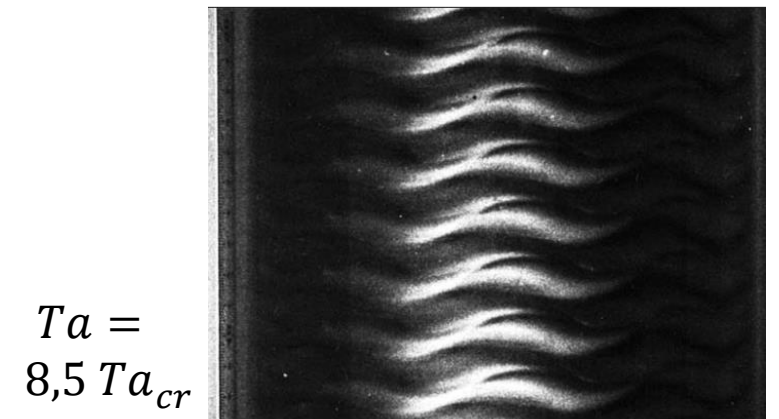


Αστάθεια Couette-Taylor

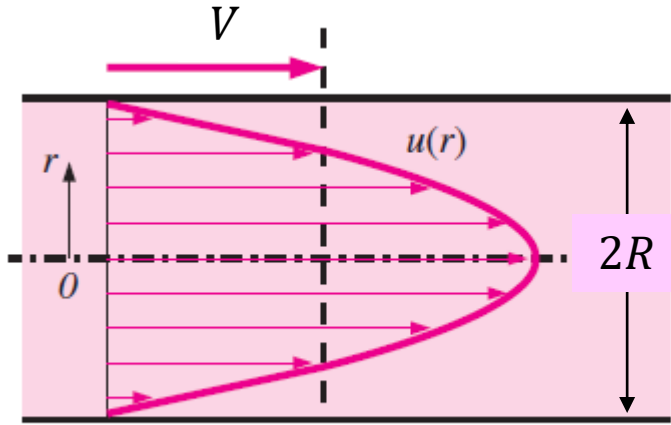
$$Ta_{cr} = \frac{r_i (r_o - r_i)^3 \Omega_i^2}{\nu^2} \approx 1700$$



$Ta = 1,2 Ta_{cr}$



$Ta = 8,5 Ta_{cr}$



Laminar flow

$$\underline{u}(r, \theta, z) = (0, 0, u_z)$$

Εξίσωση συνέχειας

$$(\nabla \cdot \underline{u}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow u_z(r, \theta, z) = u_z(r)$$

Εξίσωση Navier-Stokes σε κυλινδρικές συντεταγμένες (z-ορμή)

$$0 = -\frac{dp}{dz} + \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right), \quad \frac{dp}{dz} = \text{const} = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow u_z(r) = \frac{\Delta P}{4\mu L} (R^2 - r^2)$$

Συνοριακές συνθήκες $u_z(R) = 0, \left(\frac{du_z}{dr} \right)_{r=0} = 0$

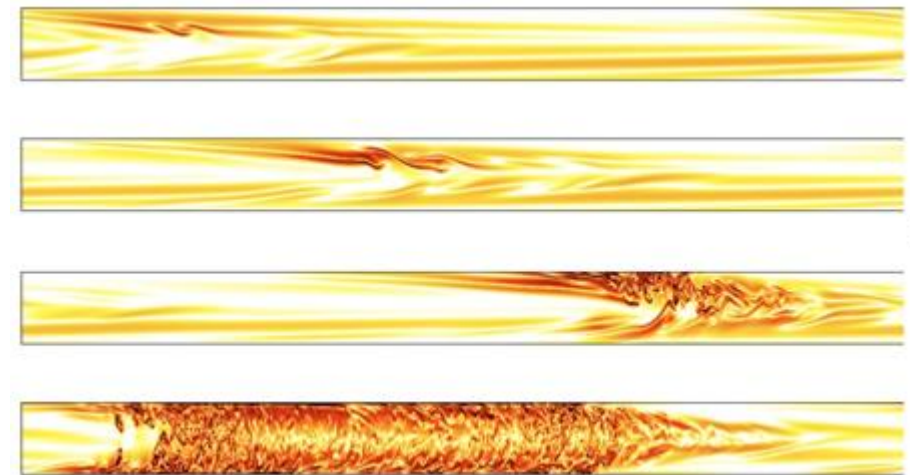
$$Q = V(\pi R^2) = \int_0^R u_z(r) 2\pi r dr \Rightarrow$$

$$V = \frac{\Delta P R^2}{8\mu L} = \frac{u_z(0)}{2} \Rightarrow$$

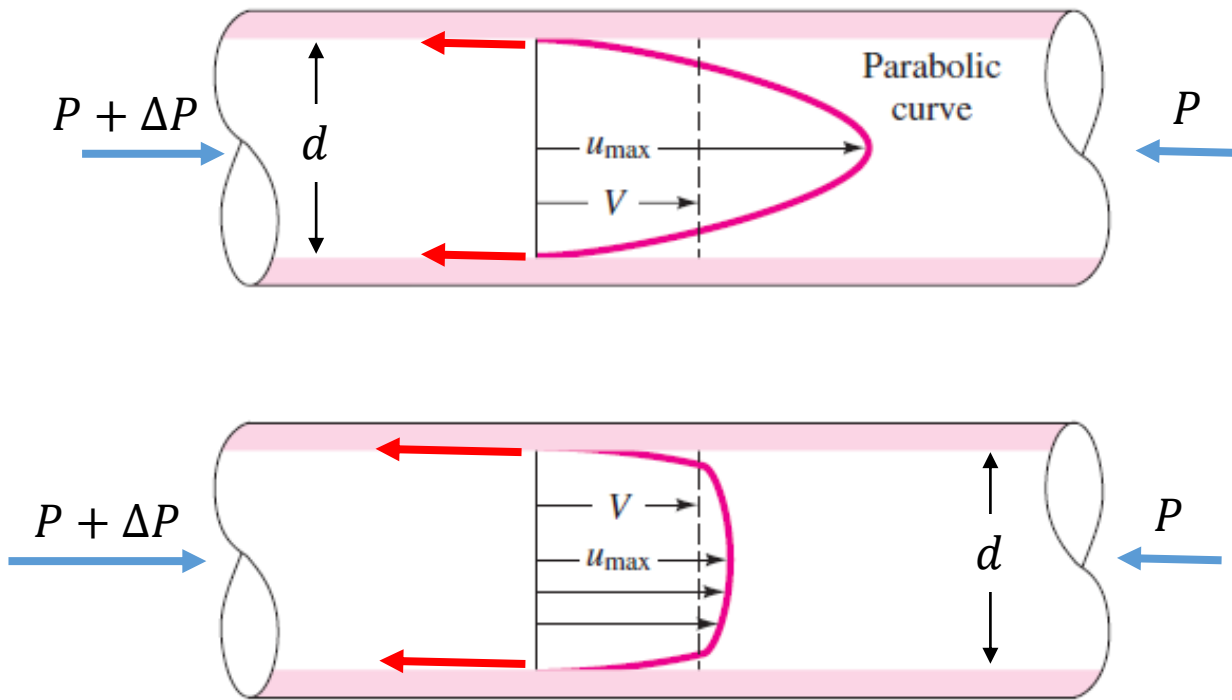
$$\Delta P = \frac{8\mu L V}{R^2}$$

Αστάθεια και τύρβη

(Turbulent puffs and slugs)



Συντελεστής τριβής και πτώση πίεσης σε αγωγό

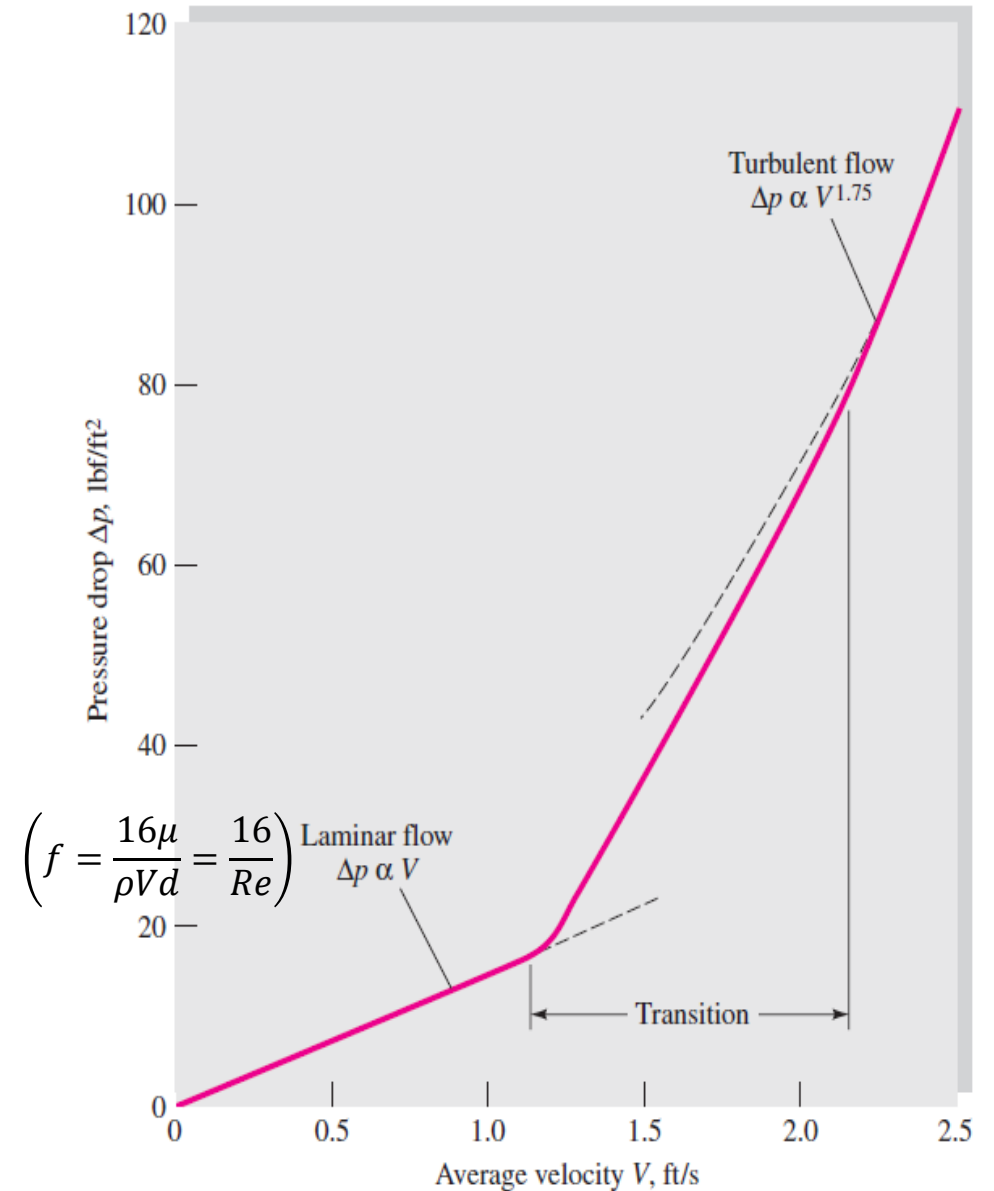


Ισοζύγιο δυνάμεων στο ρευστό

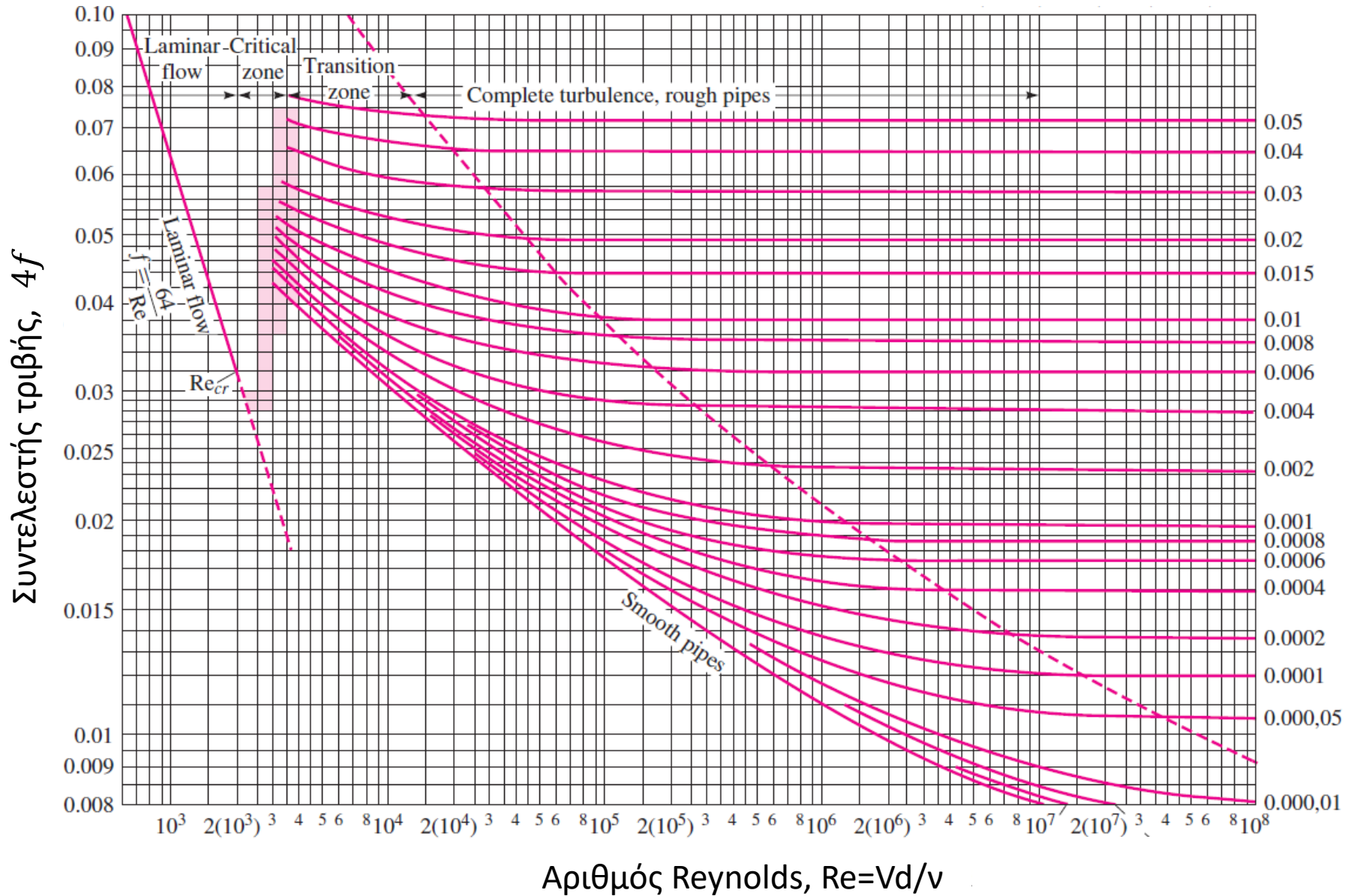
$$\Delta P \frac{\pi d^2}{4} = \tau_w (\pi d L) \Rightarrow \Delta P = \frac{L}{d} 4\tau_w$$

$$\tau_w \sim f \frac{1}{2} \rho V^2 \Rightarrow f = \frac{2\tau_w}{\rho V^2} \begin{array}{l} \text{Συντελεστής} \\ \text{τριβής Moody} \end{array}$$

$$\Delta P = 4f \frac{L}{d} \frac{\rho V^2}{2}$$



Διάγραμμα Moody



$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{4f}} + \frac{\epsilon/d}{3,7} \right)$$

Σχετική τραχύτητα, ϵ/d

ΙΣΟΖΥΓΙΟ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\left[\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{in} = \left[\dot{m} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{out} + \dot{W}_s + \dot{m} l_{\tau\rho}$$

$$\left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{in} = \left[\dot{m} \left(H + \frac{u^2}{2} + gz \right) \right]_{out} + \dot{W}_s + (-\dot{Q})$$

Παραδείγματα



$$(\dot{m}/\rho)(p_2 - p_1) = -\dot{W}_s$$

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΙΣΧΥΟΣ

$$(p_2 - p_3)/\rho = l_{\tau\rho}$$

ΑΠΩΛΕΙΕΣ ΤΡΙΒΩΝ

$$(bhp) = \dot{W}_s/\eta_p, \quad \dot{W}_{s,electric} = \dot{W}_s/(\eta_p\eta_m)$$

η_p : υδραυλικός βαθμός απόδοσης

η_m : βαθμός απόδοσης κινητήρα (0,90-0,95)

Υδραυλικές αντιστάσεις

$$l_{\tau\rho} = \left(4f \frac{L}{d} + \sum_i K_i \right) \left(\frac{1}{2} u^2 \right)$$

$$f = \frac{16}{Re}, \quad Re = \frac{\rho u d}{\mu} < 2100$$

$$\frac{1}{\sqrt{4f}} = -2,0 \log \left(\frac{2,51}{Re\sqrt{4f}} + \frac{\varepsilon/d}{3,7} \right) \approx$$

$$\approx -1,8 \log \left[\frac{6,9}{Re} + \left(\frac{\varepsilon/d}{3,7} \right)^{1,11} \right], Re > 4000$$

Απώλειες εξαρτημάτων (βάνες, γωνίες, συστολές)

$$K = \frac{K_1}{Re} + K_\infty \left(1 + \frac{K_d}{d_{nom,inch}^{0,3}} \right)$$

Απώλειες εξαρτημάτων

90° Elbow	K1	K _∞	Kd
Threaded, r/D = 1	800	0.14	4.0
Threaded, Long Radius, r/D = 1.5	800	0.071	4.2
Flanged, Welded, Bend, r/D = 1	800	0.091	4.0
Flanged, Welded, Bend, r/D = 2	800	0.056	3.9
Flanged, Welded, Bend, r/D = 4	800	0.066	3.9
Flanged, Welded, Bend, r/D = 6	800	0.075	4.2
Mitered, 1 Weld, 90°	1000	0.270	4.0
Mitered, 2 Weld, 45°	800	0.068	4.1
Mitered, 3 Weld, 30°	800	0.035	4.2

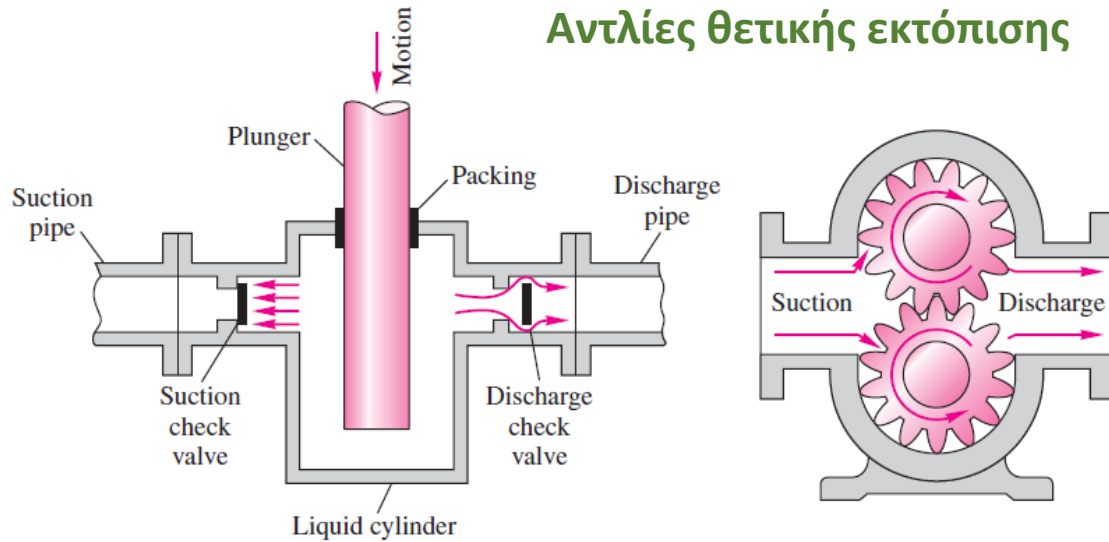
45° Elbow	K1	K _∞	Kd
Standard, r/D = 1	500	0.071	4.2
Long Radius, r/D = 1.5	500	0.052	4.0
Mitered, 1 Weld, 45°	500	0.086	4.0
Mitered, 2 Weld, 22.5°	500	0.052	4.0

180° Bend	K1	K _∞	Kd
Threaded, r/D = 1	1000	0.230	4.0
Flanged/ Welded, r/D = 1	1000	0.120	4.0
Long Radius, r/D = 1.5	1000	0.100	4.0

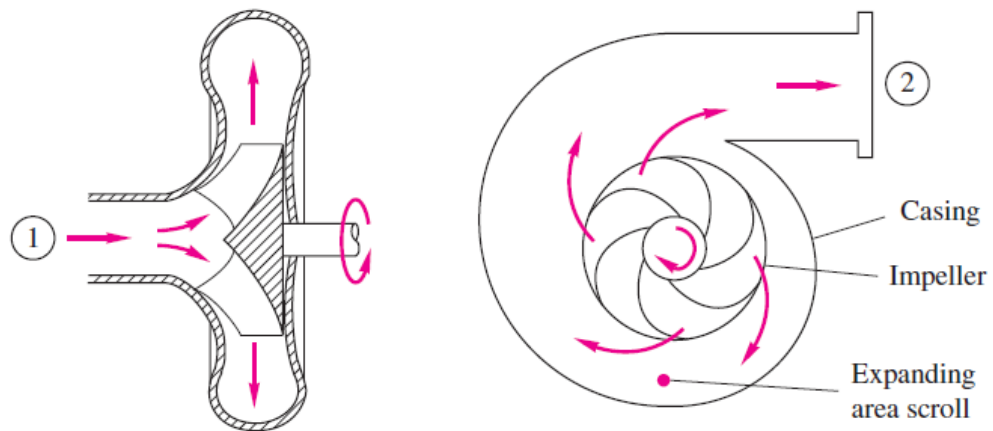
$$K = \frac{K_1}{Re} + K_{\infty} \left(1 + \frac{K_d}{d_{nom,inch}^{0,3}} \right)$$

Valves	K1	K _∞	Kd
Angle Valve = 45°, β = 1	950	0.250	4.0
Angle Valve = 90°, β = 1	1000	0.690	4.0
Globe Valve, β = 1	1500	1.700	3.6
Plug Valve, Branch Flow	500	0.410	4.0
Plug Valve, Straight Through	300	0.084	3.9
Plug Valve, 3-way, Flow Through	300	0.140	4.0
Gate Valve, β = 1	300	0.037	3.9
Ball Valve, β = 1	300	0.017	3.5
Butterfly Valve	1000	0.690	4.9
Swing Check Valve	1500	0.460	4.0
Lift Check Valve	2000	2.850	3.8

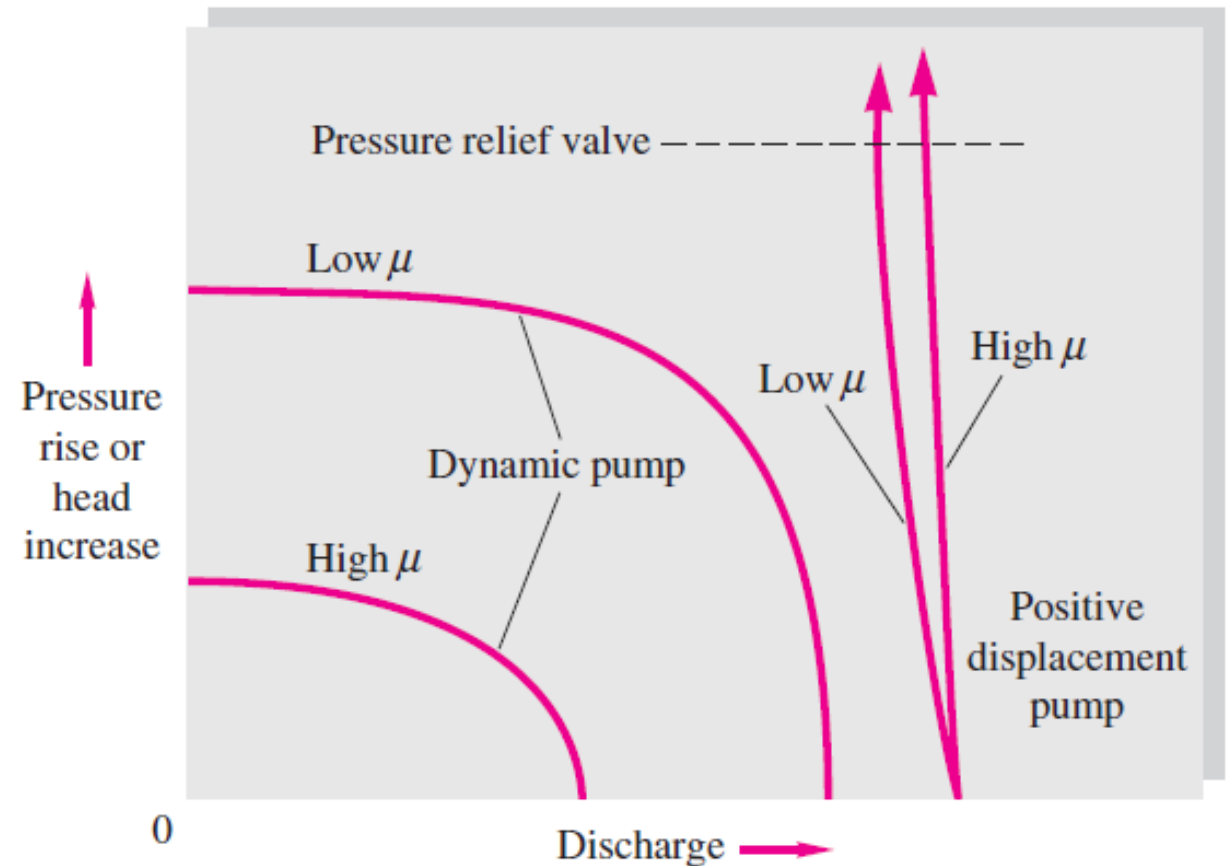
Αντλίες θετικής εκτόπισης



Φυγοκεντρικές αντλίες



Χαρακτηριστική καμπύλη αντλίας



Χαρακτηριστικά φυγοκεντρικών μηχανών

N : αριθμός στροφών

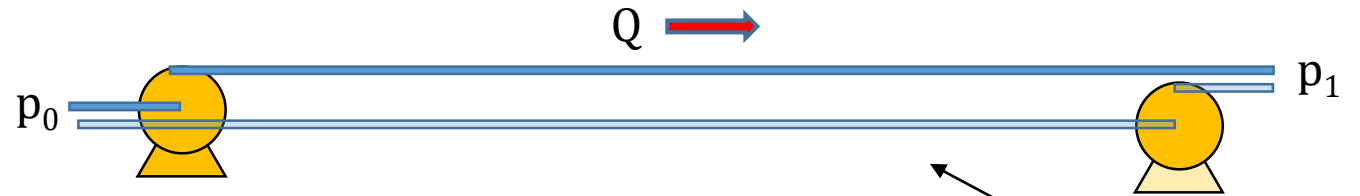
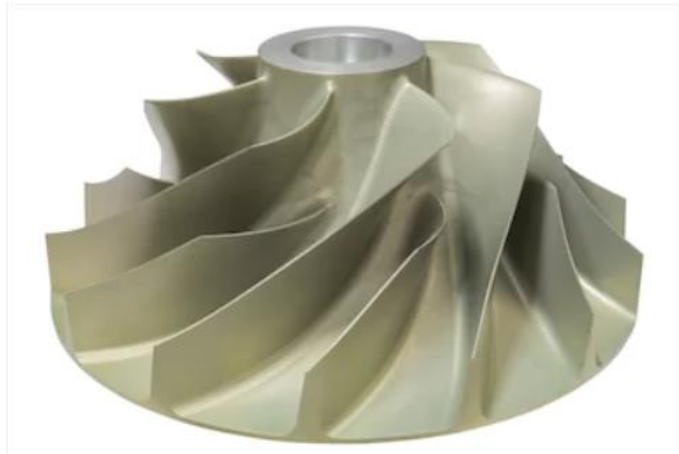
D : διάμετρος φτερωτής

u_{tip} : ταχύτητα ακμής

$\Delta P / \rho g$: μανομετρικό ύψος

$$u_{tip} \sim ND$$

$$\Delta P \sim \rho u_{tip}^2$$



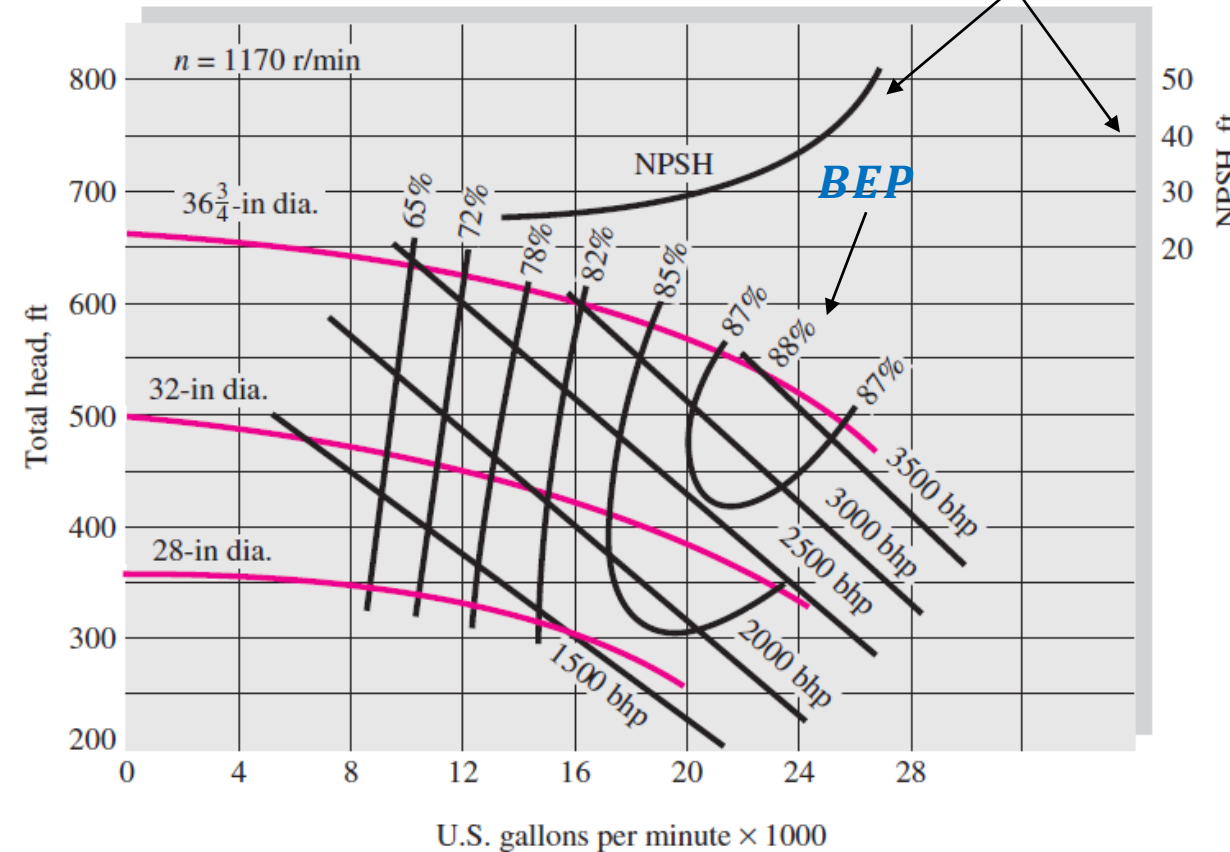
Σπηλαίωση

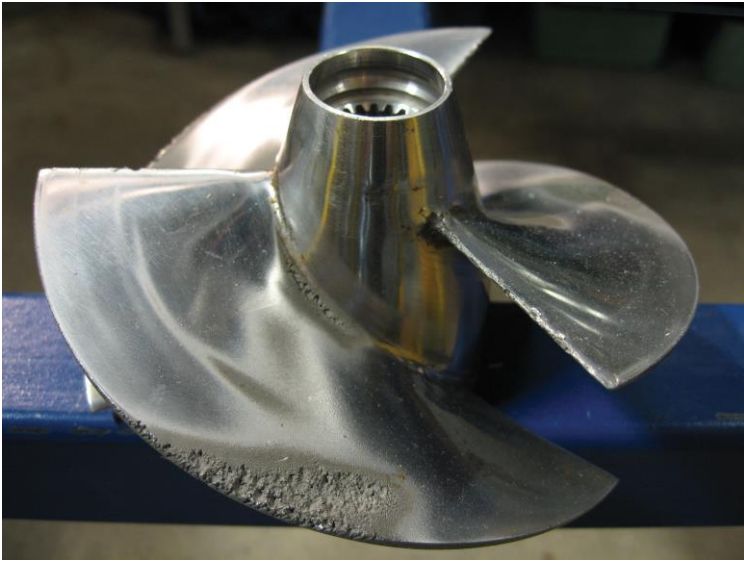
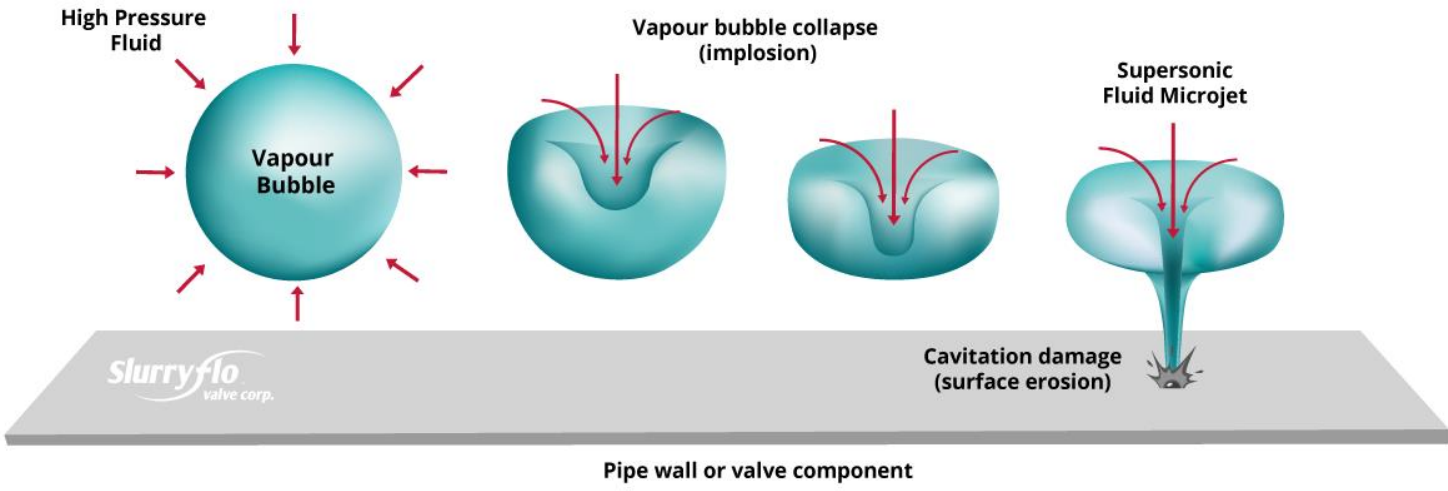
Ανάλυση τάξης μεγέθους

$$Q \sim u_{tip} A_{flow} \sim ND D^2 \sim ND^3 \quad (\text{Ογκομετρικές συσκευές})$$

$$gH = \frac{\Delta P}{\rho} \sim u_{tip}^2 \sim N^2 D^2$$

$$I = Q \Delta P \sim \rho N^3 D^5 \quad (\text{Ωφέλιμη ισχύς})$$





Αδιάστατες παράμετροι και ειδική ταχύτητα

Αδιάστατες παράμετροι

$$C_Q = Q / (ND^3)$$

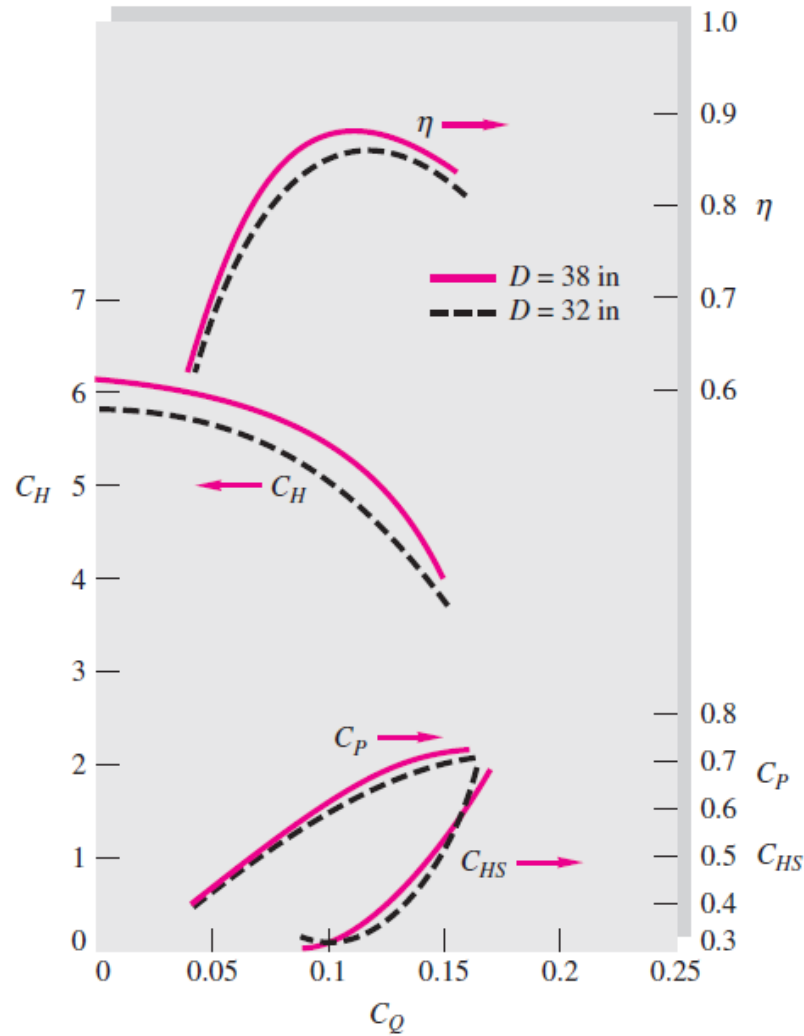
$$C_H = gH / (N^2 D^2)$$

$$C_I = bhp / (\rho N^3 D^5)$$

$$\eta = C_Q C_H / C_I$$

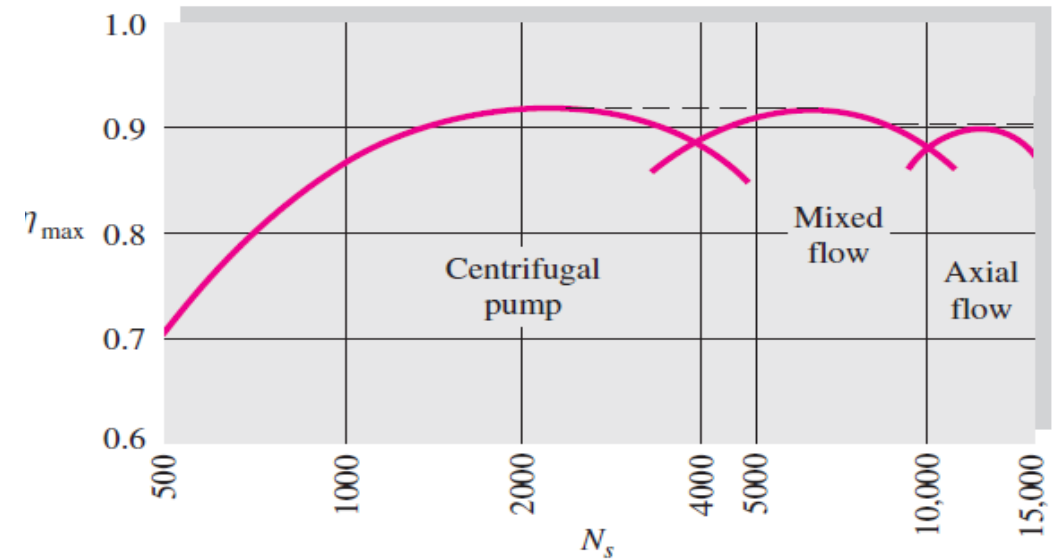
Γεωμετρικά όμοιες αντλίες έχουν σε ομόλογα σημεία λειτουργίας ίδιες τιμές των αδιάστατων παραμέτρων

(BEP : C_{Q*} , C_{H*} , C_{I*})



$$S_p = \frac{C_{Q*}^{1/2}}{C_{H*}^{3/4}} = \frac{NQ^{1/2}}{(gH)^{3/4}}$$

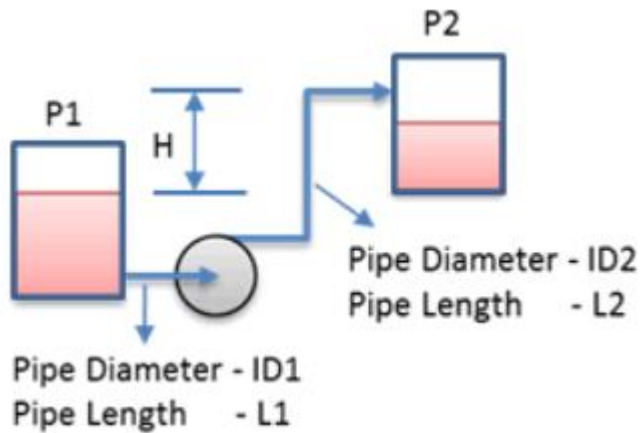
Ειδική ταχύτητα



$$r/\text{min} (\text{gal}/\text{min})^{1/2} / (H, \text{ft})^{3/4}$$



Σημείο λειτουργίας υδραυλικού δικτύου



Καμπύλη υδραυλικής αντίστασης δικτύου

$$H_{sys} = \frac{-\dot{W}_s}{\rho g Q} = \frac{p_{out} - p_{in}}{\rho g} + \frac{u_{out}^2 - u_{in}^2}{2g} + (z_{out} - z_{in}) + \sum_j \left(4f_j \frac{L_j}{d_j} + \sum_i K_{ji} \right) \frac{u_j^2}{2g}$$

$$= F(Q)$$

Καμπύλη αντλίας

$$H_{head} = G(Q)$$

Βάνα ελέγχου



$$Q = C_v f(x) \sqrt{\frac{\Delta p}{\rho / \rho_{H_2O}}}$$

