

1 ΕΡΓΑΣΙΑ Ι

ΘΕΜΑ 1

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 202, Ασκ. 1 βρείτε την περιστροφή (στροφή) $rot\vec{F}(x, y, z)$ ($Curl\vec{F}(x, y, z)$) και την απόκλιση $div\vec{F}(x, y, z)$ του διανυσματικού πεδίου

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \sin \frac{y}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y z'_y + x z'_x = 0,$$

3. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης από το βιβλίο του Ρασσιά Θ. σελ. 290, Ασκ.1

4. βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$e^{yz} + y^2 = xz$$

5. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}$ στο σημείο $P_0(-4, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (2, -2, 1)$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D yx dx dy$, όπου $D : y \leq x + 1, y \leq -x + 1, y \geq 0$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, όπου $D : y, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 49$.

ΘΕΜΑ 2

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 203, Ασκ. 3 Βρείτε την περιστροφή (στροφή) $rot\vec{F}(x, y, z)$ ($Curl\vec{F}(x, y, z)$) και την απόκλιση $div\vec{F}(x, y, z)$ του διανυσματικού πεδίου

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{\frac{x}{y}}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z'_y + x z''_{xx} = 0$$

3. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x - 4y + 7$$

4. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$e^{y^4 z} + x^5 = yz$$

5. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = e^{xy^2} + z^3$ στο σημείο $P_0(4, -2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (1, -2, 2)$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D xy dx dy$, όπου $D : y = x^2, x = y^2$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 81$.

ΘΕΜΑ 3

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 290, Ασκ. 1 να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{\frac{x}{y}}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z'_y + xz''_{xx} = 0$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\sin yz + z^5 = x^4$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \cos x + y^6 z^7$ στο σημείο $P_0(0, 2, 3)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (-4, 3, 0)$.

5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = (x + y^3)\vec{i} - y^4 z \vec{j} + z^3 \vec{k}$$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x + y^2) dx dy$, όπου $D : 0 \leq x \leq 2, y = x, y = 2x$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_D \sqrt[3]{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : y, x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 100$.

ΘΕΜΑ 4

- Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 246, Ασκ. 10 βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y
- Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{\frac{x}{y}}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z'_y + xz''_{xx} = 0$$

- Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = 2y^2 - 7x + x^2 - xy + 1$.
- Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin x + 4y^3 + 3z$ στο σημείο $P_0(0, 2, 3)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (0, -3, 4)$.
- Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = x^4 \vec{i} - (z + y^2) \vec{j} + xz^4 \vec{k}$$

- Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D (x + y) dx dy$, όπου $D : y = -x^2, y = x - 2$
- Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 81$.
- Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_D \sqrt[4]{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4$.

ΘΕΜΑ 5

- Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{\frac{2y}{x}}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$yz''_{yy} + 2z'_x = 0$$

- Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = 4(x - 3)^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$.
- Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos(x + z) - 2xy^4 = z^3$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin y^2 + e^{x^2+z}$ στο σημείο $P_0(1, 0, -2)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (2, -2, 1)$.
5. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 203, Ασκ. 3 βρείτε την περιστροφή (στροφή) $rot\vec{F}(x, y, z)$ ($Curl\vec{F}(x, y, z)$) και την απόκλιση $div\vec{F}(x, y, z)$ του διανυσματικού πεδίου
6. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 393, Ασκ. 5 υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα
7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D: y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 64$.

ΘΕΜΑ 6

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = xy + x \cos \frac{y}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$xz'_x + yz'_y = xy + z$$

2. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 290, Ασκ. 1 να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης
3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos(x^2 - 3z^4) - 2x^7y^8 = 4z^9 \quad (*)$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin z^5 + 4x^4y^2$ στο σημείο $P_0(1, 3, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (-2, 2, 1)$.
5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = y \cos x \vec{i} - \cos y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D x^2 y dx dy$, όπου $D: y = 9 - x, y = 2x, x = 0$
7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, όπου $D: 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 36$.

ΘΕΜΑ 7

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \ln(x^2 + y^2)$, επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση Laplace στο επίπεδο \mathbb{R}^2 :

$$f''_{xx} + f''_{yy} = 0$$

2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$e^{yz} + y^2 = xz$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}$ στο σημείο $P_0(-4, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (2, -2, 1)$.

5. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 202, Ασκ. 1 βρείτε την περιστροφή (στροφή) και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D xy dx dy$, όπου $D : y = 4 - x, y = x, x = 0$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_{\Omega} \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, όπου $D : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$.

ΘΕΜΑ 8

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \sin \frac{y}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y z'_y + x z'_x = 0$$

2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 246, Ασκ. 10
4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin 3x - 5(y^2 + z^3)$ στο σημείο $P_0(0, 2, 3)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (0, -3, 4)$.
5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = x^2 y \vec{i} + y z \vec{j} + z \vec{k}$$

6. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 393, Ασκ. 3 υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα
7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_{\Omega} \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, όπου $D: x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 16$.

ΘΕΜΑ 9

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 290, Ασκ. 1 να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \cos(xy)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z''_{xx} - z''_{yy} = (x^2 - y^2)z,$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos(zy^3) + 2z^4 = \sin x$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin z + 3x^2 y^5 z^2$ στο σημείο $P_0(3, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (3, 0, -4)$.
5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = \sin x \vec{i} - (y^2 - z^5) \vec{j} - 2z^5 \vec{k}$$

6. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 393, Ασκ. 5 υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D: y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 25$.

ΘΕΜΑ 10

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \cos \frac{x}{y}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$xz'_x + yz'_y = 0$$

2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x, y) = 6x^2 + y^2 - 4xy + 20y + 1$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos y^3 z + 2z^4 = \sin x$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \cos 3x + 2y^4 z^5$ στο σημείο $P_0(0, 4, 2)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (-2, 1, 2)$.

5. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 203, Ασκ. 3 βρείτε την περιστροφή (στροφή) $rot \vec{F}(x, y, z)$ ($Curl \vec{F}(x, y, z)$) και την απόκλιση $div \vec{F}(x, y, z)$ του διανυσματικού πεδίου

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y^2) dx dy$, όπου $D: y = 2 - x, y = x, x = 0$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D: x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 49$.

ΘΕΜΑ 11

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = e^{x^2+y^3}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$z''_{xx} + z''_{yy} = (2 + 4x^2 + 6y + 9y^4)z$$

2. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 246, Ασκ. 10 βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y

3. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = 3y^2 + y(11 - x) + x^2 + 1$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin z - 7x^4 e^{2y}$ στο σημείο $P_0(1, 3, 0)$ κατά του διανύσματος $\vec{c} = (-2, 2, 1)$.
5. Βρείτε την περιστροφή (στροφή) και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου από το βιβλίο του Θ.Ρασσιά σελ. 202, Ασκ. 1
6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D xy^2 dx dy$, όπου $D : y = 1 - x, y = x, y = 0$
7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\int \int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, όπου $D : x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1$.

ΘΕΜΑ 12

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 290, Ασκ. 1 να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης
2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \sin \frac{y^2}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y z'_y + 2x z'_x = 0$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos(zy^3) + 2z^4 = \sin x$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \cos 5z + 3x^2 y^5$ στο σημείο $P_0(3, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (3, 0, -4)$.
5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = \sin x \vec{i} - (y^2 - z^5) \vec{j} - 2z^5 \vec{k}$$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D xy^2 dx dy$, όπου $D : y = 1 - x, y = x, x = 0$
7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\int \int_D x^2 y dx dy$, όπου $D : y = 8 - x^2, y = x^2$

8. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D: 0 \leq x \leq y, x^2 + y^2 \leq 25$.

ΘΕΜΑ 13

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \sin \frac{y^2}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$y z'_y + 2x z'_x = 0$$

2. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\cos(zy^3) + 2z^4 = \sin x$$

3. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 290, Ασκ. 1 να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = \sin z + 3(x^2y^5 + 1)$ στο σημείο $P_0(3, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (-3, -4, 0)$

5. Βρείτε την περιστροφή και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x, y, z) = \sin 4x \vec{i} - (y^6 + z^3) \vec{j} - xz^4 \vec{k}$$

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x+2y) dx dy$, όπου $D: y = x, y = 3x, x = 3$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_\Omega \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, όπου $D: x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 64$.

ΘΕΜΑ 14

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \cos x + (y - x) \sin y$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$\cos y z''_{xx} - \cos x z''_{yx} = 0$$

2. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της

$$f(x, y) = 2x^2 + y^3 + 16x - 12y - 7$$

3. Βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$\sin(z - y^2) - 7z^3 = \sin 3x$$

4. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}$ στο σημείο $P_0(-4, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (2, -2, 1)$

5. Βρείτε την περιστροφή (στροφή) και την απόκλιση του διανυσματικού πεδίου από το βιβλίο του Θ.Ρασσιά σελ. 202, Ασκ. 1

6. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D x^2 y dx dy$, όπου $D : y = 8 - x^2, y = x^2$

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : x^2 + y^2 \leq 4$.

ΘΕΜΑ 15

1. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 202, Ασκ. 1 βρείτε την περιστροφή (στροφή) $rot \vec{F}(x, y, z)$ ($Curl \vec{F}(x, y, z)$) και την απόκλιση $div \vec{F}(x, y, z)$ του διανυσματικού πεδίου

2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $z = \cos \frac{y}{x}$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

$$yz'_y + xz'_x = 0$$

3. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης από το βιβλίο του Ρασσιά Θ. σελ. 290, Ασκ.1

4. βρείτε τις μερικές παραγώγους z'_x, z'_y από την εξίσωση

$$e^{y^2 z} + xy^4 = z^7$$

5. Βρείτε την παράγωγο της $f(x, y, z) = e^{x+y^2+z^3}$ στο σημείο $P_0(-4, 2, 0)$ κατά κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{c} = (3, -4, 0)$

6. Από το βιβλίο του Θ. Ρασσιά σελ. 393, Ασκ. 5 υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

7. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες $\iint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, όπου $D : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 16$.