1 ΆΛΓΕΒΡΑ και ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Ορισμός 1. Κάθε ορθογώνια διάταξη $m \times n$ αριθμών $m, n \in \mathbb{N}$ σε m γραμμές και n στήλες λέγεται *ορθογώνιος πίνακας* και παριστάνεται με $A = [a_{ij}]$ ή $A = (a_{ij})$ ή $A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{mn}$ ή με

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Έστω ότι $A = ||a_{ij}||_{i,j=1}^{mn}$ και $B = ||b_{ij}||_{i,j=1}^{mn}$. Τότε
$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ για $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$
Αν ο αριθμός στηλών είναι ίσον με τον αριθμό γραμμών, τότε ο πίνακας λέγεται *τετραγωνικός*. Ο πίνακας

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ονομάζεται } \textit{μηδενικός πίνακας}$$

και ο πίνακας

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{λέγεται } \textit{μοναδιαίος πίνακας.}$$

Έστω ότι

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \qquad \text{τότε}$$

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Ορισμός 1. Σε κάθε τετραγωνικό πίνακα A αντιστοιχεί ένας αριθμός που λέγεται *ορίζουσα* και συμβολίζεται με $|A|$, ή $\det A$, ή $D(A)$.

$$\text{Για} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{4}$$

Κανόνας του Sarrus

$$\text{Για} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{5}$$

Ανάπτυγμα κατά Laplace

$$\text{Για} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\big(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}\big) - a_{12}\big(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}\big) + a_{13}\big(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}\big)$$

Ορισμός 1. Ευθύγραμμα τμήματα που έχουν μέτρο (μήκος), διεύθυνση και φορά (βέλη), λέγονται *διανύσματα*.

Διανύσματα στο επίπεδο

Έστω δύο διανύσματα

$$\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \vec{b} = (b_1, b_2) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$$

και c είναι σταθερά. Τότε

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2) \tag{7}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2), \tag{8}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2), \tag{9}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{10}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \tag{11}$$

Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο

Το εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο δυο δυανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ ορίζεται από την σχέση

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\phi \tag{12}$$

όπου ϕ είναι η μικρότερη γωνία μεταξύ $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Απ την (12) προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

$$\begin{aligned}
&\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}\\
&\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}|\,|\vec{a}| = |\vec{a}|^2 \quad \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}\\
&\vec{i}\,\vec{j} = 0, \quad \vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = 1\\
&\vec{a}\,\vec{b} = (a_1, a_2)(b_1, b_2) = a_1b_1 + a_2b_2\\
&\vec{a}\,(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\,\vec{b} + \vec{a}\,\vec{c}\\
&(\vec{a}+\vec{b})\,(\vec{c}+\vec{d}) = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{a}\,\vec{d} + \vec{b}\,\vec{d}
\end{aligned}$$

Διανύσματα στο χώρο

Έστω δύο διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
και c είναι σταθερά. Τότε

$$c\vec{a} = (ca_1, ca_2, ca_3) \tag{13}$$

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3), \tag{14}$$

$$\vec{a}-\vec{b} = (a_1-b_1, a_2-b_2, a_3-b_3), \tag{15}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{16}$$

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ a_3 = b_3 \tag{17}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1, a_2, a_3)(b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{18}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3} \tag{19}$$

$$\vec{i}\,\vec{i} = \vec{j}\,\vec{j} = \vec{k}\,\vec{k} = 1, \quad \vec{i}\,\vec{j} = \vec{i}\,\vec{k} = \vec{j}\,\vec{k} = 0, \tag{20}$$

$$\vec{a}\,\vec{b} = 0, \quad \text{αν} \quad \vec{a} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{b} = 0 \quad \text{ή} \quad \vec{a}\perp\vec{b} \tag{21}$$

Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Έστω δυο διανύσματα $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι το διάνυσμα $\vec{c}$ που είναι κάθετο και στο $\vec{a}$ και στο $\vec{b}$, συμβολίζεται με $\vec{a}\times\vec{b}$ και ορίζεται ως εξής

$$\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{22}$$

Απ την (22) προκύπτουν οι εξής ιδιότητες:

$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\phi, \quad$ όπου $\quad \phi \quad$ είναι η μικρότερη γωνία μεταξύ $\vec{a}$, $\vec{b}$.

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

$\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} + \vec{d}) = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{d} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{d}$

2 Στοιχεία Αναλυτικής Γεωμετρίας στο επίπεδο

Εξίσωση ευθείας στο επίπεδο που περνάει από τα δυο σημεία $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ είναι

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \tag{23}$$

Εξίσωση ευθείας που περνάει από το σημείο $A(x_0, y_0)$ παράλληλα προς το διάνυσμα $\vec{c} = (m, n)$ είναι

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{24}$$

3 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ

ΑΝΑΛΥΣΗΣ

1.1. Όρια συναρτήσεων

Ορισμός 1. Ένας πεπερασμένος αριθμός A λέγεται *όριο της συνάρτησης* $f(x)$ καθώς $x \to x_0$ και γράφουμε

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

αν $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists$ ο αριθμός $\delta > 0$, τέτοιος ώστε για όλα τα $x \in D(f)$ που ικανοποιούν τη σχέση : $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \epsilon$

Ιδιότητες των ορίων :

Αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B, \quad \text{τότε}$$

$$\lim_{x\to x_0} C = C, \quad \text{όπου} \qquad C \quad \text{σταθερά} \tag{25}$$

$$\lim_{x\to x_0} C\cdot f(x) = C\cdot \lim_{x\to x_0} f(x) = C\cdot A, \tag{26}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = A+B, \tag{27}$$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A\cdot B, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{A}{B}, \qquad B\neq 0, \tag{29}$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{A}, \tag{30}$$

$$\lim_{x\to x_0} f^{\,n}(x) = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^n = A^n, \tag{31}$$

$$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |\lim_{x\to x_0} f(x)| = |A|. \tag{32}$$

Απροσδιόριστες μορφές :

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0\cdot\infty, \quad \infty-\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Πλευρικά όρια :

Αν $x<a$ και $x\to a$, τότε συμβολικά γραφουμε $x\to a^-$ ή $x\to a-0$
Αν $a<x$ και $x\to a$, τότε συμβολικά γραφουμε $x\to a^+$ ή $x\to a+0$
Οι αριθμοί

$$f(a-0) = \lim_{x\to a^-} f(x) \quad \text{και} \quad f(a+0) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

εφόσον υπάρχουν, λέγονται αντίστοιχα *όριο από αριστερά και όριο από δεξιά.*

Θεώρημα 1.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = A.$$

Χαρακτηριστικά όρια :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{33}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \tag{34}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a, \quad a>0 \tag{35}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \tag{36}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \tag{37}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e \tag{38}$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. *Να βρεθεί το όριο :*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8x+1}-3}{x^2-1}=$$

Λυση:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8x+1}-3}{x^2-1}&=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{8x+1}-3)(\sqrt{8x+1}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{8x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{8x+1-9}{(x^2-1)(\sqrt{8x+1}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{8(x-1)}{(x-1)(x+1)(\sqrt{8x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{8}{(x+1)(\sqrt{8x+1}+3)}=\frac{8}{2\cdot 6}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

2. *Να βρεθεί το όριο :*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}=$$

Λυση:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{x-2}&=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}-3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{4x+1-9}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{4}{\sqrt{4x+1}+3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

3. *Να βρεθεί το όριο :*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=$$

Λυση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=\left|\begin{array}{c}\text{Θέτω}\ t=5x,\ \text{τότε}\\ t\to 0\quad \text{καθώς}\quad x\to 0\end{array}\right|=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin t}{t}=5\cdot 1=5.$$

4. *Να βρεθεί το όριο :*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}=$$

Λυση:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{4x}=1^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{4x}=\left|\begin{array}{c}\text{Θέτω}\ t=x/3,\ \text{τότε}\ x=3t,\\ t\to\infty\quad \text{καθώς}\quad x\to\infty\end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4\cdot 3t}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{12}\overset{(31)}{=}\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{12}\overset{(37)}{=}e^{12}$$

5. *Να βρεθεί το όριο :*

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=$$

Λυση:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{4}}\right)^{\frac{x}{2}}=1^{\infty}=\left|\begin{array}{c}\text{Θέτω}\ t=x/4,\ \text{τότε}\ x=4t,\\ t\to\infty\quad \text{καθώς}\quad x\to\infty\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{4t\cdot\frac{1}{2}}=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\overset{(31)}{=}\left[\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right]^{2}\overset{(37)}{=}e^{2}$$

Άλυτες Ασκήσεις

$$
\begin{array}{ll}
1. & \lim_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-7x}-3}{x+1}= \\
2. & \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x}= \\
3. & \lim_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{4+2x}-4}{x-6}= \\
4. & \lim_{x\to 0}\dfrac{1-e^{2x}}{\sin x}= \\
5. & \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3^x-1}= \\
6. & \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{e^{5x}-1}= \\
7. & \lim_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{4-x}= \\
8. & \lim_{x\to 0} x\cot x= \\
9. & \lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{8}{x}\right)^{3x}= \\
10. & \lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{4x}\right)^{7x}= \\
11. & \lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}= \\
12. & \lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 2x}
\end{array}
$$

1.2. Συνέχεια συναρτήσεων

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται *συνεχής στο σημείο* x_0 αν $x_0 \in D(f)$ και

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

ή αν

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων

1. Αν οι συναρτήσεις $f(x), g(x)$ είναι συνεχείς στο σημείο $x = a$, τότε οι συναρτήσεις

$$cf(x), \quad f(x) \pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

είναι συνεχείς συναρτήσεις, όπου $g(a) \neq 0$, και c είναι σταθερά.
2. Η σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση, δηλαδή αν $y = f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο $x = x_0$, και $z = g(y)$ είναι συνεχής στο

σημείο $y = y_0$, και $y_0 = f(x_0)$, τότε η συνάρτηση $z = g(f(x))$ είναι συνεχής στο σημείο $x = x_0$.

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *συνεχής στο διάστημα* $[a, b]$ αν η $f(x)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του διαστήματος $[a, b]$ και τότε γράφουμε $f(x) \in C[a, b]$.

1.3. Παράγωγοι συναρτήσεων και οι εφαρμογές τους

Ορισμός 1. Το όριο

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

εφόσον υπάρχει, είναι η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο x_0 και λέγεται *παράγωγος της* $f(x)$ *στο σημείο* x_0 και γράφουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx} = \frac{dy(x_0)}{dx} = y'(x_0),$$

δηλαδή αν η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = kx + \lambda$, τότε

$$k = \tan \alpha = f'(x_0),$$

όπου α είναι η θετική γωνία μεταξύ της εφαπτομένης και άξονα $0x$.

Ορισμός 2. Μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται *παραγωγίσιμη στο σημείο* x αν έχει παράγωγο στο σημείο αυτό.

Ορισμός 3. Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται *παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[a, b]$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $[a, b]$

Ορισμός 4. Μια συνάρτηση $f(x)$ καλείται *συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα* $[a, b]$ αν είναι παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ και η παράγωγός της $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και τότε γράφουμε $f(x) \in C^1[a, b]$.

1.3.1. Πίνακας παραγώγων βασικών συναρτήσεων

$$(C)' = 0, \qquad C \quad constant \tag{39}$$
$$(x^a)' = ax^{a-1}, \qquad \text{α σταθερά} \tag{40}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{41}$$
$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad a > 0 \tag{42}$$
$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \tag{43}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}\,, \qquad a > 0 \tag{44}$$
$$(\sin x)' = \cos x \tag{45}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \tag{46}$$
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \tag{47}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \tag{48}$$

1.3.2. Κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων

$$\big(f(x) + g(x)\big)' = f'(x) + g'(x), \tag{49}$$
$$\big(Cf(x)\big)' = Cf'(x), \qquad C \quad constant, \tag{50}$$
$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{51}$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{52}$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. $(x^4 + 5\sin x)' = (x^4)' + (5\sin x) = 4x^{4-1} + 5(\sin x)' = 4x^3 + 5\cos x,$

2. $(2e^x - 7\cos x)' = (2e^x)' - (7\cos x)' = 2(e^x)' - 7(\cos x)'$
   $= 2e^x - 7(-\sin x) = 2e^x + 7\sin x,$

3. $(x^8 \sin x)' = (x^8)' \sin x + x^8(\sin x)' = 8x^7 \sin x + x^8 \cos x,$

4. $$\left(\frac{e^x}{\cos x}\right)' = \frac{(e^x)'\cos x - e^x(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{e^x \cos x - e^x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$
$$= \frac{e^x \cos x + e^x \sin x}{\cos^2 x}.$$

Ορισμός 5. Το *διαφορικό της συνάρτησης* $f(x)$ συμβολίζεται με $df(x)$ και ορίζεται ως εξής

$$df(x) = f'(x)dx \tag{53}$$

Π.χ. $dx^4 = (x^4)'dx = 4x^3dx, \quad d\sin 7x = (\sin 7x)'dx = 7\cos 7x dx$

1.3.3. Κανόνας του D' Hospital

Έστω ότι

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad ή \quad \frac{\infty}{\infty},$$

όπου οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες και $g(x) \neq 0$ για κάθε x ενός διαστήματος
$0 < |x-a| < \delta$, στο οποίο δ είναι αυθαίρετος αριθμός, τότε

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{54}$$

1.3.4. Παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Αν η $z = f(y)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του y και η $y = g(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε η $z = f(g(x))$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και υπολογίζεται ως εξής

$$z'(x) = f'(y)\,y'(x) \qquad ή \qquad z'(x) = f'(g(x))\,g'(x). \tag{55}$$

Απ τους τύπους (55) συνεπάγονται οι τύποι:

$$\big(f^a(x)\big)' = af^{a-1}(x)f'(x), \qquad a \quad \text{είναι σταθερά,} \tag{56}$$
$$\big(e^{f(x)}\big)' = f'(x)e^{f(x)}, \tag{57}$$
$$\big(a^{f(x)}\big)' = a^{f(x)}f'(x)\ln a, \qquad a > 0 \tag{58}$$
$$\big(\ln f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \tag{59}$$
$$(\log_a x)' = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}, \qquad a > 0, \tag{60}$$
$$\big(\sin f(x)\big)' = f'(x)\cos f(x), \tag{61}$$
$$\big(\cos f(x)\big)' = -f'(x)\sin f(x), \tag{62}$$
$$\big(\tan f(x)\big)' = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}, \tag{63}$$
$$\big(\cot f(x)\big)' = -\frac{f'(x)}{\sin^2 f(x)}. \tag{64}$$

Χρήσιμοι τύποι

$$\mathbf{f^a(x) = [f(x)]^a},$$

$$\mathbf{f(x) = [f(x)]^1},$$

$$\sqrt[n]{x^m} = \mathbf{x^{\frac{m}{n}}}.$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$\left((2x^3 - 4x + 5)^7\right)' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τον τύπο (2.26), παίρνω $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ και $a = 7$, τότε βρίσκω

$$\left((2x^3 - 4x + 5)^7\right)' = 7(2x^3 - 4x + 5)^{7-1}(2x^3 - 4x + 5)' = 7(2x^3 - 4x + 5)^6(6x^2 - 4).$$

$$(2x^3 - 4x + 5)' = (2x^3)' - (4x)' + 5' = 2(x^3)' - 4(x)' + 0 = 2 \cdot 3x^2 - 4.$$

2. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$\left(\sqrt[3]{2x^3 - 4x + 5}\right)' =$$

Λυση : επειδή

$$2x^3 - 4x + 5 = (2x^3 - 4x + 5)^1,$$

$$\sqrt[3]{2x^3 - 4x + 5} = (2x^3 - 4x + 5)^{1/3},$$

τότε συγκρίνοντας με τον τύπο (2.26), παίρνω $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ και $a = 1/3$, τότε βρίσκω

$$\left(\sqrt[3]{2x^3 - 4x + 5}\right)' = \left((2x^3 - 4x + 5)^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}(2x^3 - 4x + 5)^{\frac{1}{3}-1}(2x^3 - 4x + 5)'$$

$$= \frac{1}{3}(2x^3 - 4x + 5)^{-\frac{2}{3}}(6x^2 - 4).$$

3. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$(\sin^3 x)' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τον τύπο (2.26), παίρνω $f(x) = \sin x$ και $a = 3$, τότε βρίσκω

$$(\sin^3 x)' = 3\sin^{3-1} x\,(\sin x)' = 3\sin^2 x \cos x.$$

4. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$(\sin(8x-4))' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τον τύπο (2.31), παίρνω $f(x) = 8x-4$, τότε βρίσκω

$$(\sin(8x-4))' = (8x-4)'\cos(8x-4) = 8\cos(8x-4).$$

5. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$\left(e^{5x-2}\right)' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τον τύπο (2.27), παίρνω $f(x) = 5x-2$, τότε

$$\left(e^{5x-2}\right)' = (5x-2)'e^{5x-2} = 5e^{5x-2}.$$

6. *Δείξτε ότι*

$$\left(z^a(g(x))\right)' = az^{a-1}(g(x))z'(g(x))g'(x). \qquad (*)$$

Λυση : παίρνω $f(x) = z(g(x))$. Τότε με τον τύπο (2.26) έχω

$$\left(z^a(g(x))\right)' = (f^a(x))' = af^{a-1}(x)f'(x)$$
$$= a\left(z(g(x))\right)^{a-1}\left(z(g(x))\right)' = az^{a-1}(g(x))z'(g(x))g'(x).$$

7. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$(\sin^7(8x-4))' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τους τύπους (2.26) και (2.31) παίρνω
$f(x) = \sin(8x-4)$, $a = 7$. Τότε έχω

$$\left(\sin^7(8x-4)\right)' = \left(f^7(x)\right)' = 7f^{7-1}(x)f'(x) = 7\sin^6(8x-4)\left(\sin(8x-4)\right)'$$
$$= 7\sin^6(8x-4)[\cos(8x-4)](8x-4)' = 56\sin^6(8x-4)\cos(8x-4).$$

8. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$\left(\cos^9(4x+3)\right)' =$$

Λυση : συγκρίνοντας με τους τύπους (2.26) και (2.32) παίρνω
$f(x) = \cos(4x+3)$ και $a = 9$, τότε

$$\left(\cos^9(4x+3)\right)' = 9\cos^8(4x+3)\left(\cos(4x+3)\right)'$$
$$= 9\cos^8(4x+3)[-\sin(4x+3)](4x+3)' = -36\cos^8(4x+3)\sin(4x+3).$$

9. *Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της συνάρτησης*

$$\left(\sqrt[6]{(8x^2-4x-6)^5}\right)' =$$

Λυση : επειδή

$$\sqrt[6]{(8x^2-4x-6)^5} = (8x^2-4x-6)^{5/6},$$

τότε συγκρίνοντας με τον τύπο (2.26), παίρνω $f(x) = 8x^2 - 4x - 6$ και $a = 5/6$. Άρα

$$\left(\sqrt[6]{(8x^2-4x-6)^5}\right)' = \left((8x^2-4x-6)^{5/6}\right)' = \frac{5}{6}(8x^2-4x-6)^{\frac{5}{6}-1}(8x^2-4x-6)' =$$
$$= \frac{5}{6}(8x^2-4x-6)^{-\frac{1}{6}}(16x-4) = \frac{5}{6}(8x^2-4x-6)^{-\frac{1}{6}}(16x-4)$$
$$= \frac{5}{3}(8x^2-4x-6)^{-\frac{1}{6}}(8x-4).$$

2.3.5. Παράγωγος σύνθετης εκθετικής συνάρτησης

Χρήσιμοι τύποι:

$$\ln \mathbf{x^a} = \mathbf{a} \ln \mathbf{x}, \qquad (*)$$
$$\mathbf{h(x)} = \mathbf{e}^{\ln \mathbf{h(x)}}, \qquad \text{για} \quad h(x) > 0, \quad (**)$$
$$\left(\ln f(x)\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \qquad (***).$$

Ορισμός: Η συνάρτηση

$$y = f(x)^{g(x)},$$

όπου $f(x) > 0$ λέγεται *σύνθετη εκθετική*.

Πρώτος τρόπος: Με λογαριθμοποίηση βρίσκουμε την παράγωγό της

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad \ln y = g(x)\ln f(x) \quad \Rightarrow \quad (\ln y)' = \left(g(x)\ln f(x)\right)' \quad \Rightarrow$$
$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\left(\ln f(x)\right)' \quad \Rightarrow$$
$$\frac{y'}{y} = g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \quad \Rightarrow$$
$$y' = y\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] \quad \Rightarrow$$
$$y' = f(x)^{g(x)}\left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Δεύτερος τρόπος: με τον τύπο (**)

Λύση: χρησιμοποιώντας τους τύπους (**), (*) και (2.27), (2.29), έχουμε

$$\Big(f(x)^{g(x)}\Big)' = \Big(e^{\ln f(x)^{g(x)}}\Big)' = \Big(e^{g(x)\ln f(x)}\Big)' = (g(x)\ln f(x))' e^{g(x)\ln f(x)}$$

$$= [g'(x)\ln f(x) + g(x)(\ln f(x))']e^{\ln f(x)^{g(x)}} = \left[g'(x)\ln f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right] f(x)^{g(x)}.$$

Άσκηση 1. Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της σύνθετης εκθετικής συνάρτησης

$$y = x^{\sin x}, \qquad x > 0.$$

Λυση :

$$\begin{aligned}
&y = x^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \ln x^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad (\ln y)' = \big(\sin x \ln x\big)' \quad \Rightarrow \\
&\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x (\ln x)' \quad \Rightarrow \\
&\frac{y'}{y} = \cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \\
&y' = y\Big(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\Big) \quad \Rightarrow \\
&y' = x^{\sin x}\Big(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\Big)
\end{aligned}$$

Άσκηση 2. Βρείτε την παράγωγο πρώτης τάξης της σύνθετης εκθετικής συνάρτησης

$$y = x^{x^3}, \qquad x > 0.$$

Λυση : χρησιμοποιώντας τους τύπους (**), (*) και (2.27), (2.29), έχουμε

$$\Big(x^{x^3}\Big)' = \Big(e^{\ln x^{x^3}}\Big)' = \Big(e^{x^3 \ln x}\Big)' = (x^3 \ln x)' e^{\ln x^{x^3}}$$

$$= [(x^3)' \ln x + x^3 (\ln x)']x^{x^3} = \left(3x^2 \ln x + x^3 \frac{1}{x}\right) x^{x^3} = x^2(3\ln x + x)x^{x^3}$$

$$= (3\ln x + x)x^{x^3+2}.$$

2.3.6. Παράγωγος συνάρτησης σε πλεγμένη μορφή

Ορισμός: Κάθε σχέση μεταξύ δυο μεταβλητών x και y που εκφράζεται στη μορφή $F(x,y)=0$ ονομάζεται πλεγμένη συνάρτηση των x και y.
Για να βρούμε την παράγωγο $y' = y'(x)$ από την $F(x,y)=0$ αντικαθυστούμε τη y με $y(x)$, στην $F(x,y)=0$ και έτσι έχουμε $F(x,y(x))=0$. Με παραγώγιση αυτής της εξίσωσης και με επύληση ως προς $y' = y'(x)$, λαμβάνουμε

$$F'_x + F'_y\, y'(x)) = 0, \qquad \Rightarrow F'_y\, y'(x) = -F'_x, \quad \Rightarrow$$

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}. \tag{65}$$

Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται όταν η εξίσωση $F(x,y) = 0$ δεν μπορεί να λυθεί ως προς y .

Άσκηση 1. Βρείτε την παράγωγο $y' = y'(x)$ από την εξίσωση :

$$y^2 + e^y = x.$$

Λύση: αντικαθυστόντας y με $y(x)$, στην παραπάνω εξίσωση και παραγωγίζοντας, θα λάβουμε

$$y^2(x) + e^{y(x)} = x \quad \Rightarrow (y^2(x))' + (e^{y(x)})' = 1 \quad \Rightarrow$$

$$2y(x)y'(x) + e^{y(x)}y'(x) = 1 \quad \Rightarrow y'(2y + e^y) = 1 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1}{2y + e^y},$$

επειδή $y = y(x)$, και $y' = y'(x)$.

Άσκηση 2. Βρείτε την παράγωγο $y' = y'(x)$ από την εξίσωση :

$$y^3x^5 - 2\sin y = 1.$$

Λύση: αντικαθυστόντας y με $y(x)$, στην παραπάνω εξίσωση και παραγωγίζοντας, θα λάβουμε

$$y^3(x)x^5 - 2\sin y(x) = 1 \quad \Rightarrow (y^3(x)x^5)' - 2(\sin y(x))' = 0 \quad \Rightarrow$$

$$3y^2(x)y'(x)x^5 + y^3(x)5x^4 - 2y'(x)\cos y(x) = 0 \quad \Rightarrow y'[3y^2x^5 - 2\cos y] = -5x^4y^3 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-5x^4y^3}{3y^2x^5 - 2\cos y},$$

επειδή $y = y(x)$, και $y' = y'(x)$.

2.3.7. Τοπικά Ακρότατα

Ορισμός: Σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $f(x)$, όπου η παράγωγος πρώτης τάξης $f'(x)$ είναι μηδέν ή δεν υπάρχει, λέγονται *κρίσιμα σημεία.*

Κριτήριο της Παραγώγου Πρώτης Τάξης για Τοπικά Ακρότατα

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης*

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 16x + 3 \tag{66}$$

Λυση :

$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 16 = 2(3x^2 + 5x - 8) \tag{67}$$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 3(-8) = 25 + 96 = 121 \Rightarrow$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 11}{6} \Rightarrow x_1 = \frac{-5-11}{6} = -\frac{8}{3}, \quad x_2 = \frac{-5+11}{6} = 1.$
Επειδή $\ -3 < -\frac{8}{3} < 0 < 1 < 2,\ $ και
$f'(-3) \overset{(73)}{=} 8 > 0, \quad f'(0) \overset{(73)}{=} -16 < 0, \quad f'(2) \overset{(73)}{=} 28 > 0,$ ο πίνακας μεταβολών συμπληρώνεται ως εξής:

x		$-\frac{8}{3}$		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Άρα η $\ f(x)\ $ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{8}{3}) \bigcup (1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\frac{8}{3}, 1)$,
στο σημείο $x = -\frac{8}{3}$ έχει τοπικό μέγιστο Τ.Μ.$=f(-\frac{8}{3}) \overset{(72)}{=} 2 \cdot (-\frac{8}{3})^3 + 5 \cdot (-\frac{8}{3})^2 - 16 \cdot (-\frac{8}{3}) + 3 = 43,3$
και στο σημείο $x = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο Τ.Ε.$=f(1) \overset{(72)}{=} 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 3 = -6.$
Τώρα θα βρούμε τα σημεία καμπής:

$$f''(x) = (f'(x))' \overset{(73)}{=} \big(2(3x^2 + 5x - 8)\big)' = 2(6x + 5) \tag{68}$$

$f''(x) = 0\ $ εαν $\ 6x = -5\ $ ή $\ x = -\frac{5}{6}$. Αν η παράγωγος $f''(x)$ αλλάζει πρόσιμο καθώς το x περνάει το $x = -\frac{5}{6}$, στο $x = -\frac{5}{6}$ θα έχουμε σημείο καμπής. Επειδή $-1 < -\frac{5}{6} < 0,\ $ και $f''(-1) \overset{(68)}{=} -2 < 0, \quad f''(0) \overset{(68)}{=} 10 > 0,$
στο $x_0 = -\frac{5}{6}\ $ έχουμε σημείο καμπής $K(x_0, y_0)$, όπου
$y_0 = f(x_0) = f(-\frac{5}{6}) \overset{(72)}{=} 2 \cdot (-\frac{5}{6})^3 + 5 \cdot (-\frac{5}{6})^2 - 16 \cdot (-\frac{5}{6}) + 3 = 18.64.$
Άρα $K(x_0, y_0) = K(-\frac{5}{6}, \quad 18.64)$ είναι σημείο καμπής.

Άσκηση 2. *Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής της συνάρτησης*

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 11 \tag{69}$$

Λυση :

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) \tag{70}$$

$\Rightarrow \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$. Επειδή $0 < 1 < 2 < 3 < 4$, και $f'(0) \overset{(75)}{=} 18 > 0$, $f'(2) \overset{(75)}{=} -6 < 0$, $f'(4) \overset{(75)}{=} 18 > 0$, ο πίνακας μεταβολών συμπληρώνεται ως εξής:

x		1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		Τ.Μ.		Τ.Ε.	

Άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 1) \bigcup (3, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, 3)$,
στο σημείο $x = 1$ έχει τοπικό μέγιστο Τ.Μ.$=f(1) \overset{(74)}{=} 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 11 = 19$
και στο σημείο $x = 3$ έχει τοπικό ελάχιστο Τ.Ε.$=f(3) \overset{(74)}{=} 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 11 = 11$.
Τώρα θα βρούμε τα σημεία καμπής:

$$f''(x) = (f'(x))' \overset{(73)}{=} \left(6(x^2 - 4x + 3)\right)' = 6(2x - 4) \tag{71}$$

$f''(x) = 0$ εαν $x = 2$. Αν η παράγωγος $f''(x)$ αλλάζει πρόσιμο καθώς το x περνάει το $x = 2$, στο $x = 2$ θα έχουμε σημείο καμπής. Επειδή $0 < 2 < 3$, και $f''(0) \overset{(71)}{=} -24 < 0$, $f''(3) \overset{(71)}{=} 12 > 0$,
στο $x_0 = 2$ έχουμε σημείο καμπής $K(x_0, y_0)$, όπου $y_0 = f(x_0) = f(2) \overset{(72)}{=} 2 \cdot 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 18 \cdot 2 + 11 = 15$.
Άρα $K(x_0, y_0) = K(1, 15)$ είναι σημείο καμπής.

Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου για Τοπικά Ακρότατα

1. Λύνουμε την εξίσωση $f'(x) = 0$, για να βρούμε τα κρίσιμα σημεία.
2. Σε ένα κρίσιμο σημείο $x = x_0$
η $f(x)$ έχει Τοπικό Μέγιστο (Τ.Μ.)$=f(x_0)$, αν $f''(x_0) < 0$,
η $f(x)$ έχει Τοπικό Ελάχιστο (Τ.Ε.)$=f(x_0)$, αν $f''(x_0) > 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Άσκηση 1. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 16x + 3. \tag{72}$$

Λυση :

$$f'(x) = 6x^2 + 10x - 16 = 2(3x^2 + 5x - 8) \tag{73}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 5^2 - 4 \cdot 3(-8) = 25 + 96 = 121 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 3} = \frac{-5 \pm 11}{6} \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-5 - 11}{6} = -\frac{8}{3}, \quad x_2 = \frac{-5 + 11}{6} = 1 \qquad \text{κρίσιμα σημεία.}$$

Βρίσκουμε

$$f''(x) = (f'(x))' = (6x^2 + 10x - 16)' = 12x + 10.$$

Επειδή

$$f''(-8/3) = 12(-8/3) + 10 = -26 < 0,$$

τότε η $f(x)$ στο σημείο $x = -\frac{8}{3}$ έχει τοπικό μέγιστο που βρίσκεται από (72):

$$T.M. = f\left(-\frac{8}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^3 + 5 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)^2 - 16 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) + 3 = 43,3$$

Επειδή

$$f''(1) = 12 + 10 = 22 > 0,$$

τότε η $f(x)$ στο σημείο $x = 1$ έχει τοπικό ελάχιστο που βρίσκεται από (72):

$$T.E. = f(1) = 2 \cdot 1^3 + 5 \cdot 1^2 - 16 \cdot 1 + 3 = -6.$$

Άσκηση 2. *Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης*

$$f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 11 \tag{74}$$

Λυση :

$$f'(x) = 6x^2 - 24x + 18 = 6(x^2 - 4x + 3) \tag{75}$$

$$\Rightarrow \; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 = 16 - 12 = 4,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2},$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{4 - 2}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{4 + 2}{2} = 3 \qquad \text{κρίσιμα σημεία.}$$

Βρίσκουμε

$$f''(x) = (f'(x))' = (6(x^2 - 4x + 3))' = 12x - 24.$$

Επειδή $f''(1) = 12 - 24 < 0$, τότε η $f(x)$ στο σημείο $x = 1$ έχει τοπικό μέγιστο που βρίσκεται από (74):

$$T.M. = f(1) = 2 \cdot 1^3 - 12 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 + 11 = 19.$$

Επειδή $f''(3) = 12 \cdot 3 - 24 = 12 > 0$, τότε η $f(x)$ στο σημείο $x = 3$ έχει τοπικό ελάχιστο που βρίσκεται από (74):

$$T.E. = f(3) = 2 \cdot 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 18 \cdot 3 + 11 = 11.$$

Άλυτες Ασκήσεις

Α. Βρείτε τις παραγώγους πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων

1. $\left(e^{8x+2} + \sqrt[6]{4x-3}\right)' =$
2. $\left((7x-3)\sin 4x\right)' =$
3. $\left(9x^4 - \sqrt[5]{2x-3}\right)' =$
4. $\left((\cos x)^{2x}\right)' =$
5. $\left(2x-5)^{4x}\right)' =$
6. $\left(x+1)^{x}\right)' =$
7. $\left(xe^{4x^2-x} + \sqrt[4]{x-7}\right)' =$
8. $\left(3^{4x} + \sqrt[7]{5x+7}\right)' =$
9. $\left(2e^{5x-3} - \ln^2 x + 3^{7x}\right)' =$
10. $\left(\dfrac{e^{5x}}{6x+3}\right)' =$

Γ. Βρείτε την παράγωγο $y' = y'(x)$ από την εξίσωση :

1. $2y^2 + \sin(4x+7) = e^{2y} - x$
2. $5x^3 + \ln y^2 = e^{3y}$
3. $y^3 + \sin y = x$
4. $x^9 + y^4 = xe^y + \cos 7x$
5. $7x^9 - 5y^3 = e^{5y} - x$

Δ. Να βρεθούν με το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου τα τοπικά ακρότατα *των παρακάτω συνάρτησεων:*

1. $f(x) = 8x^3 - 9x^2 - 6x - 1$
2. $f(x) = 7x^3 - 7x^2 - 7x + 1$
3. $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 3$
4. $f(x) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 5$
5. $f(x) = 5x^3 - 5x^2 - 5x + 1$
6. $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$
7. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

4 Αόριστα ολοκληρώματα

3.1 Πίνακας ολοκληρωμάτων βασικών συναρτήσεων:

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1 \tag{76}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \tag{77}$$

$$\int e^x dx = e^x + c \tag{78}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \qquad a > 0 \tag{79}$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c \tag{80}$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c \tag{81}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c \tag{82}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c \tag{83}$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c \tag{84}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + c \tag{85}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c \tag{86}$$

3.2 Ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \qquad c \quad constant, \tag{87}$$

$$\int \big[f(x) \pm g(x)\big]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{88}$$

Χρήσιμοι τύποι:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}, \qquad \frac{1}{x^m} = x^{-m}, \qquad df(x) = f'(x)dx.$$

Ασκησεις: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

1.

$$\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\cdot\frac{x^{2+1}}{2+1} + c = 3\cdot\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (76) με $a = 2$.

2.

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{x^{-1}}{-1} + c = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (76) με $a = -2$.

3.

$$\int \sqrt[4]{x^3}dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx = \frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}} + c$$
$$= \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} + c = \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (76) με $a = \frac{3}{4}$.

4.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{3}{4}}} = \int x^{-\frac{3}{4}}dx = \frac{x^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = 4x^{\frac{1}{4}} + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (76) με $a = -\frac{3}{4}$.

5.

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (85) με $a = 3$.

6.

$$\int \frac{dx}{x^2+3} = \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{3}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}} + c = \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{3} + c,$$

όπου εφαρμόσαμε τον τύπο (85) με $a = \sqrt{3}$.

3.3. Ολοκληρώματα της μορφής $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$

Όταν μέσα στο ολοκλήρωμα ο αριθμητής είναι παράγωγος του παρονομαστή, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + c \qquad (89)$$

Ασκησεις: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

1.

$$\int \frac{dx}{x+1} = ?$$

Λυση : επειδή $(x+1)' = 1$, τότε

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{1 \cdot dx}{x+1} = \int \frac{(x+1)'dx}{x+1} = \ln|x+1| + c.$$

2.

$$\int \frac{dx}{2x+1} = ?$$

Λυση : επειδή $(2x+1)' = 2$, τότε

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2 \cdot dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)'dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1| + c.$$

3.

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+7} = ?$$

Λυση : επειδή $(x^3+7)' = 3x^2$, τότε

$$\int \frac{x^2dx}{x^3+7} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2dx}{x^3+7} = \frac{1}{3}\int \frac{(x^3+7)'dx}{x^3+7} = \frac{1}{3}\ln|x^3+7| + c.$$

4.

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x - 3} = ?$$

Λυση : επειδή $(\sin x - 3)' = \cos x$, τότε

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x - 3} = \int \frac{(\sin x - 3)' \cdot dx}{\sin x - 3} = \ln|\sin x - 3| + c.$$

5.

$$\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+5}dx = ?$$

Λυση : επειδή $(9x^2+6x+5)' = 18x+6$, τότε

$$\int \frac{3x+1}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6(3x+1)}{9x^2+6x+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{(9x^2+6x+5)'}{9x^2+6x+5}dx$$

$$= \frac{1}{6}\ln|9x^2+6x+5|+c.$$

3.4. Ολοκληρώματα της μορφής $\int f(kx+l)dx$, όπου k, l σταθερές.

Αν ξέρουμε το ολοκλήρωμα

$$\int f(x)dx = F(x)+c,$$

τότε αμέσως βρίσκουμε

$$\int f(kx+l)dx = \frac{1}{k}F(kx+l)+c. \tag{90}$$

Ασκησεις: Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

1.

$$\int \frac{1}{2x+1}dx = ?$$

Λυση : εχουμε

$$f(kx+l) = \frac{1}{2x+1}, \quad k=2, \quad l=1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}.$$

Επειδή

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c,$$

τότε

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\ln|2x+1|+c.$$

2.

$$\int \cos(3x+4)dx = ?$$

Λυση : εχουμε

$$f(kx+l) = \cos(3x+4), \quad k=3, \quad l=4 \Rightarrow f(x) = \cos x.$$

Επειδή

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

τότε

$$\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(3x+4)+c.$$

3.

$$\int e^{7x-5}dx = ?$$

Λυση : εχουμε

$$f(kx+l) = e^{7x-5}, \quad k = 7, \quad l = -5 \Rightarrow f(x) = e^x.$$

Επειδή

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

τότε

$$\int e^{7x-5} dx = \frac{1}{7} e^{7x-5} + c.$$

4.

$$\int \sin(-x+4) dx =?$$

Λυση : εχουμε

$$f(kx+l) = \sin(-x+4), \quad k = -1, \quad l = 4 \Rightarrow f(x) = \sin x.$$

Επειδή

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

τότε

$$\int \sin(-x+4) dx = \frac{1}{-1} \sin(-x+4) + c = -\sin(-x+4) + c.$$

5.

$$\int \frac{dx}{\cos^2(5x-2)} =?$$

Λυση : εχουμε

$$f(kx+l) = \frac{1}{\cos^2(5x-2)}, \quad k = 5, \quad l = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Επειδή

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c,$$

τότε

$$\int \frac{dx}{\cos^2(5x-2)} = \frac{1}{5} \tan(5x-2) + c.$$

3.5. Ολοκλήρωση συναρτήσεων με αντικατάσταση

$$\int f(x) dx = \left| \begin{matrix} \text{Θέτω} \quad x = y(t), \text{ τότε} \\ dx = dy(t) = y'(t) dt \end{matrix} \right| = \int f\big(y(t)\big) y'(t) dt \tag{91}$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πιο εύκολο απ το αρχικό αν κάναμε τη σωστή αντικατάσταση $x = y(t)$.

Ασκήσεις : Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

1.
$$\int \sin(4x+7)dx = \tag{92}$$

Λυση : Θέτω $t = 4x+7$. Πρώτα αυτήν την εξίσωση λύνουμε ως προς x, μετά βρίσκουμε το διαφορικό dx και αντικαθυστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι έχουμε $t = 4x+7$,

$$4x = t-7 \Rightarrow x = \frac{1}{4}(t-7) \Rightarrow dx = d\frac{1}{4}(t-7) = \frac{1}{4}(t-7)'dt = \frac{1}{4}dt.$$

Αντικαθιστούμε στην (92) και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int \sin(4x+7)dx = \int \sin t \, \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int \sin t dt \\ &= \frac{1}{4}(-\cos t) + c = -\frac{1}{4}\cos(4x+7) + c \end{aligned}$$

2.
$$\int e^{4x+7}dx = \tag{93}$$

Λυση : Θέτω $t = 4x+7$. Πρώτα απ αυτήν την εξίσωση βρίσκουμε το διαφορικό dt, μετά λύνουμε τη νέα εξίσωση ως προς dx και αντικαθυστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι έχουμε

$$dt = d(4x+7) = (4x+7)'dx = 4dx \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt.$$

Αντικαθιστούμε στην (101) και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int e^{4x+7}dx = \int e^t \, \frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int e^t dt \\ &= \frac{1}{4}e^t + c = \frac{1}{4}e^{4x+7} + c. \end{aligned}$$

Χρήσιμος τύπος:
$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

Ασκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x-4}{x^2-6x+10}dx =$$

Λυση : $x^2 - 6x + 10 = 0, \quad \Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0.$
Άρα ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες.

$$\int \frac{x-4}{x^2-6x+9+1}dx = \int \frac{(x-3)-1}{(x-3)^2+1}dx$$

$$= \int \Big[\frac{x-3}{(x-3)^2+1} - \frac{1}{(x-3)^2+1}\Big] dx$$

$$= \int \frac{x-3}{(x-3)^2+1} dx - \int \frac{1}{(x-3)^2+1} dx$$

$$= \Big| \text{Θέτω } \ t = x-3 \Rightarrow dt = d(x-3) = (x-3)' dx = dx \Rightarrow dx = dt \Big| =$$

$$= \int \frac{t}{t^2+1} dt - \int \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt - \arctan t$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(t^2+1)'}{t^2+1} dt - \arctan t = \frac{1}{2} \ln|t^2+1| - \arctan t + c$$

$$= \frac{1}{2} \ln((x-3)^2+1) - \arctan(x-3) + c = \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+10) - \arctan(x-3) + c.$$

Ασκηση 4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} =$$

Λυση : θέτω $t = \ln x$. Τότε $dt = d\ln x = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx = \frac{dx}{x}$. Κάνω αντικατάσταση στον παραπάνω τύπο:

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\ln x| + c.$$

Χρήσιμος τύπος

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \qquad (*)$$

3.6. Παραγωντική ολοκλήρωση

Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int g(x) f'(x) dx \tag{94}$$

ή

$$\int f(x) dg(x) = f(x) g(x) - \int g(x) df(x) \tag{95}$$

Αν $g(x) = x$ τότε απ τον τύπο (94) συνεπάγεται

$$\int f(x) dx = x f(x) - \int x f'(x) dx \tag{96}$$

Άσκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int x e^x dx = ?$$

Λυση : επειδή $(e^x)' = e^x$, τότε χρησιμοποιώ τον τύπο της παραγωντικής ολοκλήρωσης (94), όπου $f(x) = x$, $g(x) = e^x$ και έχω

$$\int xe^x dx = \int x(e^x)' dx = xe^x - \int e^x (x)' dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c.$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int (7x-1)\cos x dx = ?$$

Λυση : Συγκρίνοντας με τον τύπο της παραγωντικής ολοκλήρωσης (94) παίρνω $f(x) = 7x-1$, $g'(x) = \cos x$. Επειδή $(\sin x)' = \cos x$, τότε $g(x) = \sin x$. Τώρα εφαρμόζω τον τύπο της παραγωντικής ολοκλήρωσης (94), όπου $f(x) = 7x-1$, $g(x) = \sin x$ και έχω:

$$\int (7x-1)\cos x dx = \int (7x-1)(\sin x)' dx = (7x-1)\sin x - \int (7x-1)' \sin x dx$$

$$= (7x-1)\sin x - 7\int \sin x dx = (7x-1)\sin x - 7(-\cos x) + c = (7x-1)\sin x + 7\cos x + c.$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int (4x+2)\cos(6x+7) dx = ?$$

Λυση : Συγκρίνοντας με τον τύπο της παραγωντικής ολοκλήρωσης (94) παίρνω $f(x) = 4x+2$, $g'(x) = \cos(6x+7)$. Τότε ολοκληρώνω την τελευταία εξίσωση:

$$\int g'(x) dx = \int \cos(6x+7) dx.$$

Λόγω του τύπου (*) και (90) έχω

$$g(x) = \int \cos(6x+7) dx = \frac{1}{6}\sin(6x+7).$$

Τώρα εφαρμόζω τον τύπο της παραγωντικής ολοκλήρωσης (94) και έχω:

$$\begin{aligned}
&\int (4x+2)\cos(6x+7) dx = \int (4x+2)\left(\frac{1}{6}\sin(6x+7)\right)' dx \\
=&\frac{1}{6}(4x+2)\sin(6x+7) - \frac{1}{6}\int \sin(6x+7)(4x+2)' dx = \\
=&\frac{1}{6}(4x+2)\sin(6x+7) - \frac{4}{6}\int \sin(6x+7) dx \\
=&\frac{1}{6}(4x+2)\sin(6x+7) - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}\big(-\cos(6x+7)\big) + c \\
=&\frac{1}{6}(4x+2)\sin(6x+7) + \frac{1}{9}\cos(6x+7) + c.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int (8x-3)\sin(9x+3)dx =$$

Λυση : Χρησιμοποιώ τον τύπο παραγωντικής ολοκλήρωσης (94), όπου θέτω $f(x) = 8x-3$ και $g'(x) = \sin(9x+3)$. Τότε $\int g'(x)dx = \int \sin(9x+3)dx \quad \Rightarrow$ $g(x) = -\frac{1}{9}\cos(9x+3)$. Αντικαθυστούμε τις τιμές των $f(x)$ και $g(x)$ στον τύπο (94) και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int (8x-3)\sin(9x+3)dx &= -\frac{1}{9}\int (8x-3)\big(\cos(9x+3)\big)'dx = \\
&= -\frac{1}{9}(8x-3)\cos(9x+3) - \left(-\frac{1}{9}\right)\int [\cos(9x+3)](8x-3)'dx \\
&= -\frac{1}{9}\Big[(8x-3)\cos(9x+3) - 8\int \cos(9x+3)dx\Big] \\
&= -\frac{1}{9}\Big[(8x-3)\cos(9x+3) - 8\cdot\frac{1}{9}\sin(9x+3)\Big] + c \\
&= -\frac{1}{9}(8x-3)\cos(9x+3) + \frac{8}{81}\sin(9x+3) + c.
\end{aligned}$$

Άσκηση 5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int \ln x dx =$$

Λυση : Χρησιμοποιώ τον τύπο παραγωντικής ολοκλήρωσης (96), όπου θέτω $f(x) = \ln x$ και έχω

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x(\ln x)'dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx + c = x\ln x - x + c.$$

3.7. Ολοκλήρωση ρητών συναρτήσεων με ανάλυση σε απλά κλάσματα

3.7.1. Μέθοδος τεχνασμάτων

Ασκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} =$$

Λυση : Ο παρονομαστής έχει απλές πραγματικές ρίζες. Προσθέτουμε και αφαιρούμε x στον αριθμητή.

$$\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}.$$

$$\int \frac{1\cdot dx}{x(x+1)} = \int \frac{[(1+x)-x]dx}{x(x+1)} = \int \Big[\frac{1+x}{x(x+1)} - \frac{x}{x(x+1)}\Big]dx = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx =$$
$$= \ln|x| - \ln|x+1| + c$$

Ασκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{x(x+4)} =$$

Λυση : Ο παρονομαστής έχει απλές πραγματικές ρίζες. Προσθέτουμε και αφαιρούμε x στον αριθμητή.

$$\int \frac{dx}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{4dx}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\int \frac{(4+x-x)dx}{x(x+4)} = \frac{1}{4}\int \Big[\frac{4+x}{x(x+4)} - \frac{x}{x(x+4)}\Big]dx$$
$$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+4}dx = \frac{1}{4}\ln|x| - \frac{1}{4}\ln|x+4| + c$$

Ασκηση 2. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{(x+2)(x+3)}$$

Λυση : Θέτω : $u = x+2$, οπότε $x = u-2$, και $x+3 = u-2+3 = u+1$. Τότε

$$\frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{u(u+1)} = \frac{(1+u)-u}{u(u+1)} = \frac{1+u}{u(u+1)} - \frac{u}{u(u+1)} =$$
$$= \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} \Rightarrow$$
$$\int \frac{1}{(x+2)(x+3)}dx = \int \Big(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\Big)dx = \int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x+3}dx$$
$$= \ln|x+2| - \ln|x+3| + c$$

3.7.2. Μέθοδος των απροσδιόριστων συντελεστών

Ασκηση 1. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx$$

Λυση :

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x+1)}{(x+1)(x+2)} \tag{97}$$

Τότε

$$A(x+2) + B(x+1) = x \tag{98}$$

Θέτοντας στην (98) την τιμή $x = -1$ λαμβάνουμε
$A(-1+2) + B(-1+1) = -1 \Rightarrow A = -1$.
Θέτοντας στην (98) την τιμή $x = -2$ λαμβάνουμε
$A(-2+2) + B(-2+1) = -2 \Rightarrow -B = -2 \Rightarrow B = 2$.
Αντικαθιστούμε τις τιμες αυτές στην (97) και έτσι παίρνουμε

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1} \Rightarrow$$
$$\int \frac{x}{(x+1)(x+2)}dx = \int \Big(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\Big)dx = 2\int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x+1}dx$$
$$= 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + c$$

Λυμένες Ασκήσεις

1. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx =$$

Λυση : Επειδή $(x^2+5)' = 2x$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (89):

$$\int \frac{2x}{x^2+5}dx = \int \frac{(x^2+5)'}{x^2+5}dx \overset{(89)}{=} = \ln|x^2+5| + C = \ln(x^2+5) + C$$

2. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{x^2}{x^3+4}dx =$$

Λυση : Επειδή $(x^3+4)' = 3x^2$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (89), πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας πρώτα το ολοκλήρωμα με 3 :

$$\int \frac{x^2}{x^3+4}dx = \frac{3}{3}\int \frac{x^2}{x^3+4}dx = \int \frac{3x^2}{x^3+4}dx = \int \frac{(x^3+4)'}{x^3+4}dx \overset{(89)}{=} \ln|x^3+4|+C$$

3. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \cos(2x-5)dx = \tag{99}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε τον τύπο (90) όπου $k = 2, \quad l = -5$. Επειδή $\int \cos x dx = \sin x + c$, λόγω του τύπου (90) λαμβάνουμε

$$\int \cos(2x-5)dx = \frac{1}{2}\sin(2x-5) + c$$

4. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \sin(4x+7)dx = \tag{100}$$

Λυση : Θέτω $t = 4x+7$. Πρώτα αυτήν την εξίσωση λύνουμε ως προς x, μετά βρίσκουμε το διαφορικό dx και αντικαθυστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι έχουμε

$$4x = t-7 \Rightarrow x = \frac{1}{4}(t-7) \Rightarrow dx = d\frac{1}{4}(t-7) = \frac{1}{4}(t-7)'dt = \frac{1}{4}dt.$$

Αντικαθιστούμε στην (102) και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int \sin(4x+7)dx = \int (\sin t)\,\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int \sin t dt \\ &= \frac{1}{4}(-\cos t) + c = -\frac{1}{4}\cos(4x+7) + c \end{aligned}$$

5. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int e^{4x+7}dx = \tag{101}$$

Λυση : Θέτω $t = 4x+7$. Πρώτα απ αυτήν την εξίσωση βρίσκουμε το διαφορικό dt, μετά λύνουμε τη νέα εξίσωση ως προς dx και αντικαθυστούμε στο αρχικό ολοκλήρωμα. Έτσι έχουμε

$$dt = d(4x+7) = (4x+7)'dx = 4dx \Rightarrow dt = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4}dt.$$

Αντικαθιστούμε στην (101) και έχουμε

$$\begin{aligned} &\int e^{4x+7}dx = \int e^t\,\frac{1}{4}dt = \frac{1}{4}\int e^t dt \\ &= \frac{1}{4}e^t + c = \frac{1}{4}e^{4x+7} + c. \end{aligned}$$

6. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{dx}{x\ln x} =$$

Λυση : Επειδή $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (89):

$$\int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{(\ln x)'}{\ln x}dx \overset{(89)}{=} \ln|\ln x| + C$$

7. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{x}{3x^2+5}dx =$$

Λυση : επειδή $\quad (3x^2+5)' = 6x, \quad$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (89):

$$\int \frac{x}{3x^2+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6x}{3x^2+5}dx = \frac{1}{6}\int \frac{(3x^2+5)'}{3x^2+5}dx = \frac{1}{6}\ln|3x^2+5| + c.$$

8. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \frac{x^2}{5x^3+4}dx =$$

Λυση : επειδή $\quad (5x^3+4)' = 15x^2, \quad$ χρησιμοποιούμε τον τύπο (89), πολλαπλασιάζοντας και διαιρώντας πρώτα το ολοκλήρωμα με 15 :

$$\int \frac{x^2}{5x^3+4}dx = \frac{1}{15}\int \frac{15x^2}{5x^3+4}dx = \frac{1}{15}\int \frac{(5x^3+4)'}{5x^3+4}dx = \frac{1}{15}\ln|5x^3+4| + c.$$

9. *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:*

$$\int \sin(2x-5)dx = \tag{102}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε τον τύπο (90) όπου $k=2, \quad l=-5$. Επειδή

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

τότε λόγω του τύπου (90) λαμβάνουμε

$$\int \sin(2x-5)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-5) + c.$$

Άλυτες Ασκήσεις. *Υπολογίστε τα αόριστα ολοκληρώματα*

1.
$$\int \frac{\cos x dx}{\sin x + 9} =$$

2.
$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+6} =$$

3.
$$\int \frac{dx}{x^2+6x+10} =$$

4.
$$\int \cot x dx =$$

5.
$$\int \frac{dx}{x(x+3)} =$$

6.
$$\int \frac{2x dx}{x^2+6x+13} =$$

7.
$$\int (x+8)e^{2x} dx =$$

8.
$$\int (2x-3)\cos(9x+1) dx =$$

9.
$$\int (9x+2)\sin 4x dx =$$

10.
$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+4} dx = \quad \text{με αντικατάσταση} \quad t = e^x$$

11.
$$\int \frac{dx}{\cos^2 x(\tan^2 x+4)} = \quad \text{με αντικατάσταση} \quad t = \tan x$$

12.
$$\int \frac{dx}{x(6x+1)} =$$

13.
$$\int \frac{x dx}{x^2+2x-3} =$$

14.
$$\int \sin(9x-8) dx =$$

15.
$$\int x \sin x dx =$$

16.
$$\int \frac{dx}{x^2+7} =$$

3.7.3. Ολοκληρώματα της μορφής

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

Υπολογίζονται με τις αντικαταστάσεις του Euler:

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}, && \text{αν} \quad a > 0 \\
&(ii) \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = tx \pm \sqrt{c}, && \text{αν} \quad c > 0 \\
&(iii) \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = (x-x_0)t, && \text{αν} \quad b^2-4ac > 0
\end{aligned}$$

όπου x_0 είναι μια πραγματική ρίζα της $ax^2+bx+c=0$

5 Ορισμένα ολοκληρώματα $\int_a^b f(x)dx$

4.1. Το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και η $F(x)$ είναι η παράγουσα της $f(x)$, δηλαδή $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$, τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a) \tag{103}$$

4.2. Ιδιότητες των ορισμένων ολοκληρωμάτων:

Αν υπάρχουν $\int_a^b f(x)dx$ και $\int_a^b g(x)dx$, τότε

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad \text{για} \quad c \quad constant \tag{104}$$

$$\int_a^b \big[f(x) \pm g(x)\big]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \tag{105}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad \text{για} \quad a < c < b \tag{106}$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \tag{107}$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \tag{108}$$

$$\text{Αν} \quad f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a,b], \quad \text{τότε} \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \tag{109}$$

$$\Big|\int_a^b f(x)dx\Big| \leq \int_a^b |f(x)|dx \tag{110}$$

4.3. Παραγωντική ολοκλήρωση για ορισμένα ολοκληρώματα
Αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες στο κλειστό διάστημα (a, b), τότε ισχύει ο τύπος:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx \tag{111}$$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c$$

Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα:

1.

$$\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^{3+1}}{3+1}\right]_0^1 = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1^4}{4} - \frac{0^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} = F(x).$$

2.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3} dx = \int_1^2 x^{-3} dx = \left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^2 = \left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^2 = \frac{2^{-2}}{-2} - \frac{1^{-2}}{-2} = \frac{2^{-2}}{-2} + \frac{1}{2}.$$

3.

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -[\cos x]_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

4.

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\pi/4} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1.$$

4.4. Ολοκλήρωση με αλλαγή μεταβλητών

1-ος τρόπος:

Ισάγουμε καινούρια μεταβλητή $x = g(t)$. Τότε $dx = dg(t) = g'(t)dt$, λύνουμε ως προς t την εξίσωση $x = g(t)$ και βρίσκουμε $t = g^{-1}(x)$, $t_1 = g^{-1}(a)$, $t_2 = g^{-1}(b)$. Αντικαθυστούμε στο ολοκλήρωμα

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(g(t))g'(t)dt.$$

Στο τελευταίο ολοκλήρωμα εφαρμόζουμε τον τύπο (103).

Ασκήσεις: Υπολογίστε τα ορισμένα ολοκληρώματα με αλλαγή μεταβλητής
Άσκηση 1.

$$\int_0^1 (3x-2)^4 dx =$$

Λυση : Θέτω $t = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad dt = d(3x-2) = (3x-2)'dx = 3dx \quad \Rightarrow$ $dt = 3dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}dt$. Απ την εξίσωση $t = 3x - 2$ έπεται ότι $t = -2$ για $x = 0$, και $t = 1$ για $x = 1$. Τότε

$$\int_0^1 (3x-2)^4 dx = \int_{-2}^1 t^4 \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int_{-2}^1 t^4 dt = \frac{1}{3}\Big[\frac{t^5}{5}\Big]_{-2}^1 = \frac{1}{3}\left[\frac{1^5}{5} - \frac{(-2)^5}{5}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5} - \left(-\frac{32}{5}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{5} + \frac{32}{5}\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{33}{5} = \frac{11}{15}.$$

Άσκηση 2.

$$\int_0^1 e^{2x+1} dx =$$

Λυση : Θέτω $t = 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad dt = d(2x+1) = (2x+1)'dx = 2dx \quad \Rightarrow$ $dt = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$. Απ την εξίσωση $t = 2x + 1$ έπεται ότι $t = 1$ για $x = 0$, και $t = 3$ για $x = 1$. Τότε

$$\int_0^1 e^{2x+1} dx = \int_1^3 e^t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2}\int_1^3 e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_1^3 = \frac{1}{2}(e^3 - e^1) = \frac{1}{2}(e^3 - e).$$

2-ος τρόπος:

Με αλλαγή μεταβλητών υπολογίζουμε το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα (την παράγουσα $F(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

και μετά εφαρμόζουμε τον τύπο (103):

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

Άσκηση 1.

$$\int_0^1 (3x-2)^4 dx =$$

Λυση : Θέτω $t = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad dt = d(3x-2) = (3x-2)'dx = 3dx \quad \Rightarrow$ $dt = 3dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{3}dt$. Τότε

$$\int (3x-2)^4 dx = \int t^4 \frac{1}{3} dt = \frac{1}{3}\int t^4 dt = \frac{1}{3}\frac{t^5}{5} = \frac{(3x-2)^5}{15} = F(x).$$

Τότε

$$\int_0^1 (3x-2)^4 dx = \left[\frac{(3x-2)^5}{15}\right]_0^1 = \frac{1}{15}[(3x-2)^5]_0^1 = \frac{1}{15}[1^5 - (-2)^5]$$

$$= \frac{1}{15}[1^5 - (-32)] = \frac{1}{15}(1+32) = \frac{33}{15}$$

Άσκηση 2.
$$\int_0^1 e^{2x+1}dx =$$
Λυση : Έστω $t = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad dt = d(2x+1) = (2x+1)'dx = 2dx \quad \Rightarrow$
$dt = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt.$
$$\int e^{2x+1}dx = \int e^t \frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int e^t dt = \frac{1}{2}e^t = \frac{1}{2}e^{2x+1} = F(x),$$
$$\int_0^1 e^{2x+1}dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[e^{2x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^3 - e).$$

Γ. Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

1. $y = 2 - x^2, \quad y = -x$
2. $y = x^2 + 2, \quad y = 3x$
3. $y = x^2 - 3, \quad y = -2x$
4. $y = x^2 - 3, \quad y = 2x$
5. $y = 9 - x^2, \quad y = x + 3$
6. $y = -x^2, \quad y = x - 2$

4.5. Γενικευμένα Ολοκληρώματα (Γ.Ο.)

Ορισμός: Τα ολοκληρώματα τύπου
$$\int_a^b f(x)dx$$
λέγονται *γενικευμένα* αν
1. η $f(x)$ είναι ασυνεχής σε ένα ή περισσότερα σημεία του $[a, b]$,
2. τουλάχιστον ένα από τα όρια είναι άπειρο.

Γενικευμένα Ολοκληρώματα με άπειρα όρια

Περίπτωση 1. Λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκληρώμα
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{u\to+\infty}\int_a^u f(x)dx \tag{112}$$
ηπάρχει αν συγκλίνει το όριο στην (112).

Άσκηση 1.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4} = \lim_{u\to+\infty} \int_1^u x^{-4}dx = \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{x^{-4+1}}{-4+1}\right]_1^u = \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{x^{-3}}{-3}\right]_1^u$$

$$= \frac{1}{-3} \lim_{u\to+\infty} \left[x^{-3}\right]_1^u = -\frac{1}{3} \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{1}{x^3}\right]_1^u = -\frac{1}{3} \lim_{u\to+\infty} \left[\frac{1}{u^3} - \frac{1}{1^3}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{+\infty^3} - 1\right) = -\frac{1}{3}(0-1) = \frac{1}{3}$$

Περίπτωση 2. Λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκληρώμα

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{v\to-\infty} \int_v^b f(x)dx \tag{113}$$

ηπάρχει αν συγκλίνει το όριο στην (113).

Περίπτωση 3. Λέμε ότι το Γενικευμένο Ολοκληρώμα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{v\to-\infty} \int_v^c f(x)dx + \lim_{u\to+\infty} \int_c^u f(x)dx. \end{aligned} \tag{114}$$

ηπάρχει αν συγκλίνουν και τα δύο όρια στην (113), όπου $c \in (-\infty, +\infty)$.

6 Σειρές

Ορισμός 1. Το τυπικό άθροισμα των ορών μιας ακολουθίας $\{a_n\}$, δηλαδή το

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

λέγεται *σειρά* και το a_n *γενικός όρος της σειράς*. Η σειρά συμβολίζεται και με $\sum a_n$.

Για κάθε σειρά έχουμε μια ακολουθία των μερικών αθροισμάτων:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad ..., \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

Ορισμός 2. Αν υπάρχει

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = S$$

και το S είναι ένας πεπερασμένος αριθμός, η *σειρά λέγεται σιγκλίνουσα* ή λέμε ότι *σιγκλίνει στο* S, που ονομάζουμε *Άθροισμα της σειράς* και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad \text{ή} \qquad \sum a_n = S$$

Ορισμός 3.

$$\text{Αν δεν υπάρχει} \quad \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

τότε λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ είναι αποκλίνουσα ή ότι η *σειρά* $\sum a_n$ *αποκλίνει*

5.1. Μερικά Θεωρήματα για σειρές

1. Μια σιγκλίνουσα (αποκλίνουσα) σειρά παραμένει σιγκλίνουσα (αποκλίνουσα), αν μεταβληθούν ένας ή περισσότεροι από τους n πρώτους όρους της.

2. Το άθροισμα μιας σιγκλίνουσας σειράς παραμένει μοναδικό.

3. Αν σιγκλίνει η σειρά

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = A, \quad \text{τότε σιγκλίνει και η σειρά} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n = kA$$

4. Αν αποκλίνει η σειρά

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{τότε αποκλίνει και η σειρά} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ka_n$$

   όπου k είναι μια αυθαίρετη σταθερά

5. Αν η σειρά

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{σιγκλίνει, τότε} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

   Το αντίστροφο δεν αληθεύει.

6. Αν

   $$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0, \quad \text{τότε η σειρά} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{αποκλίνει}$$

5.2. Σειρές με θετικούς όρους

Αν όλα τα a_n είναι θετικοί αριθμοί, τότε η σειρά $\sum a_n$ ονομάζεται *σειρά με θετικούς όρους*.

5.2.1. Κριτήριο του ολοκληρώματος

Έστω ότι $f(n)$ παριστάνει το γενικό όρο a_n της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (δηλαδή: $f(n) = a_n$).

Αν $f(x) > 0$ και η $f(x)$ είναι φθίνουσα για όλα τα $x > k$, όπου $k \in \mathbb{N}$. Τότε η σειρά

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει ή αποκλίνει, εφόσον αντίστοιχα το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_k^{\infty} f(x)dx$ υπάρχει ή δεν υπάρχει.

5.2.2. Κριτήριο σύγκρισης

Μια σειρά με θετικούς όρους $\sum a_n$

$$\begin{array}{llll} \text{συγκλίνει αν} & 0 < a_n \le b_n \quad \forall n \ge k \in \mathbb{N} & \text{και η σειρά} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n & \text{συγκλίνει,} \\ \text{αποκλίνει αν} & a_n \ge b_n > 0 \quad \forall n \ge k \in \mathbb{N} & \text{και η σειρά} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n & \text{αποκλίνει} \end{array}$$

5.2.3. Κριτήριο του λόγου (D' Alembert)

Μια σειρά με θετικούς όρους $\sum a_n$

$$(a) \quad \text{συγκλίνει, αν} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l < 1$$

$$(b) \quad \text{αποκλίνει, αν} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l > 1$$

Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται, αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l = 1$

5.2.4. Κριτήριο της ρίζας (Cauchy)

Μια σειρά με θετικούς όρους $\sum a_n$

$$(a) \quad \text{συγκλίνει, αν} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l < 1$$

$$(b) \quad \text{αποκλίνει, αν} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l > 1.$$

Η μέθοδος αυτή δεν εφαρμόζεται, αν $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l = 1$

Λυμένες Ασκήσεις

Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές:

Άσκηση 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \qquad \text{όπου} \quad p \in \mathbb{R}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε το κριτήριο του ολοκληρώματος. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n^p}$. Θέτω $f(n) = a_n = \frac{1}{n^p}$. Τότε $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Είναι φανερό ότι $f(x) > 0$ και η $f(x)$ είναι φθίνουσα για όλα τα $x > 1$. Επομένως η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του κριτηρίου του ολοκληρώματος, όπου $k = 1$. Τώρα μελετάμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_k^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx$$

(i) Αν $p > 1$, τότε έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u x^{-p}dx = \lim_{u\to\infty}\Big[\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^u = \lim_{u\to\infty}\Big[\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\Big] = \frac{1}{1-p}\lim_{u\to\infty}\Big[u^{-(p-1)} - 1\Big] =$$
$$= \frac{1}{1-p}\lim_{u\to\infty}\Big[\frac{1}{u^{\,p-1}} - 1\Big] = \frac{1}{1-p}[0-1] = \frac{1}{p-1}$$

Εφόσον το γενικευμένο ολοκλήρωμα υπάρχει για $p > 1$, η σειρά μας συγκλίνει για $p > 1$.

(ii) Αν $p < 1$, τότε έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u x^{-p}dx = \lim_{u\to\infty}\Big[\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big]_1^u = \lim_{u\to\infty}\Big[\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}\Big] = \frac{1}{1-p}(\infty - 1) = \infty$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει για $p < 1$. Άρα η σειρά μας αποκλίνει για $p < 1$.

(iii) Αν $p = 1$, τότε έχουμε

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{1}{x}dx = \lim_{u\to\infty}\big[\ln x\big]_0^u = \lim_{u\to\infty}\big[\ln u - \ln 1\big] = \infty - 0 = \infty$$

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα δεν υπάρχει για $p = 1$. Άρα η σειρά μας αποκλίνει για $p = 1$. Έτσι αποδείξαμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \qquad \begin{cases} \textit{συγκλίνει } \text{για} & p > 1 \\ \textit{αποκλίνει } \text{για} & p \leq 1 \end{cases} \tag{115}$$

Άσκηση 2.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}$$

Λυση : όταν έχουμε παραγοντικά χρησιμοποιούμε το κριτήριο του λόγου. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n!}$. Τότε $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$ και

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1$$

Εφόσον $l = 0 < 1$ η σειρά μας συγκλίνει

Άσκηση 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε το κριτήριο της ρίζας. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n^n}$. Βρίσκουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = l = 0$$

Επειδή $l = 0 < 1$ η σειρά μας συγκλίνει

Άσκηση 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{n^2+3}$. Βλέπουμε ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ η ανισότητα

$$\frac{1}{n^2+3} \leq \frac{1}{n^2} \qquad \text{είναι ισοδύναμη με την} \qquad n^2 \leq n^2 + 3$$

που ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Τότε, επειδή λόγω της Άσκησης 1 με $p = 2 > 1$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η σειρά μας.

Άσκηση 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Λυση : χρησιμοποιούμε το κριτήριο σύγκρισης. Εδώ έχουμε $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. Βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{n} \qquad \Leftrightarrow \qquad n \geq \sqrt{n+1} \qquad \Leftrightarrow \qquad n^2 \geq n+1$$

που ισχύει για όλα τα $n \geq 2$. Τότε, επειδή λόγω της Άσκησης 1 με $p = 1 > 1$ η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

αποκλίνει, αποκλίνει και η σειρά μας.

Άλυτες Ασκήσεις

Ε. Εξετάστε αν συγκλίνουν οι σειρές

1. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$$
2. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-1}$$
3. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{n^2+4}$$
4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-1}$$
5. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$
6. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$$
7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$$
8. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$
9. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$$
10. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3n+1)!}$$
11. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$$
12. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+3)}$$

Κεφ. 5.3. Σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους

Ορισμός 1. Μια σειρά της οποίας οι όροι είναι εναλλασσόμενα θετικοί και αρνητικοί, λέγεται *εναλλασσόμενη σειρά* και παριστάνεται ως εξής

$$\sum (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + ... + (-1)^{n-1} a_n + ...$$

όπου όλα τα a_n είναι θετικά.

Ορισμός 2. Μια σειρά $\sum a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ καλείται *απόλυτα συγκλίνουσα* ή λέμε ότι *συγκλίνει απόλυτα*, αν η σειρά $\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$ συγκλίνει.

Ορισμός 3. Αν η σειρά $\sum a_n$ συγκλίνει, αλλά η σειρά $\sum |a_n|$ αποκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum a_n$ *συγκλίνει υπό συνθήκες.*