

Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βοηθήματος, έντυπου ή ηλεκτρονικού και οι πάσης φύσεως συνεργασίες και συνομιλίες. **Προσοχή:** Δικαιολογήστε όλες τις απαντήσεις σας στο διαθέσιμο χώρο.

1. Είναι τα διανύσματα $\underline{x} = \underline{v} - \underline{u}$, $\underline{y} = \underline{u} + \underline{w}$, $\underline{z} = \underline{w} - \underline{v}$ γραμμικά ανεξάρτητα αν υποθέσουμε ότι τα διανύσματα $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$ ενός διανυσματικού χώρου, είναι γραμμικά εξαρτημένα; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

Αν το $\{\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}\}$ είναι ένα εξαρτημένο σύνολο, τότε το span του έχει διάσταση το πολύ 2. Εκφράστε τα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ως προς τα $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$ και παρατηρήστε ότι το κάθε ένα από τα $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\underline{v}, \underline{u}, \underline{w}$. Άρα το span τους έχει διάσταση το πολύ 2, και συνεπώς δεν είναι δυνατόν να έχει 3 γραμμικά μεταξύ τους ανεξάρτητα διανύσματα. (Εναλλακτικά ένα αντιπαράδειγμα αρκεί).

2. Αποδείξτε ότι εάν ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι διαγωνιποιήσιμος και όλες οι ιδιοτιμές του είναι σε μέγεθος μικρότερες του 1 τότε όλα τα στοιχεία του πίνακα $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k$ είναι ίσα με μηδέν.

Επειδή ο A είναι διαγωνιποιήσιμος έχουμε $A = PDP^{-1}$ και $A^k = PD^kP^{-1}$ όπου ο D είναι διαγώνιος πίνακας με τις ιδιοτιμές στα διαγώνια στοιχεία. Άρα $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} PD^kP^{-1} = P(\lim_{k \rightarrow \infty} D^k)P^{-1} = P0P^{-1} = 0$. Η τελευταίες ισότητες ισχύουν επειδή $\lim_{k \rightarrow \infty} |D_{i,i}^k| = 0$ για κάθε i επειδή όλα τα διαγώνια στοιχεία του D είναι μικρότερα του 1 σε απόλυτη τιμή και άρα όλα τα στοιχεία του D είναι ίσα με 0.

3. Αν $a \neq 0$ και $b \neq 0$ δώστε όλες τις απαραίτητες συνθήκες για να είναι ο πίνακας $M = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$ αντιστρέψιμος.

Πρέπει $a \neq b$ ειδάλως όλες οι γραμμές δεν είναι πανομοιότυπες και συνεπώς $\det(M) \neq 0$.

Επίσης πρέπει και $a \neq -(n-1)b$ ειδάλως αν αφαιρέσουμε απο μια σειρά (ή στήλη) όλες τις άλλες αυτή θα έχει όλα τα στοιχεία της μηδέν Το άθροισμα των στοιχείων μιας γραμμής δεν είναι ίσο με μηδέν και συνεπώς $\det(M) \neq 0$.

4. Τι πρέπει να ισχύει για τα a, b, c, d για να είναι η τάξη του $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \end{bmatrix}$ (α') 2, (β') 3 και (γ') 4.

Αφαιρούμε το διπλάσιο της πρώτης σειράς απο την δεύτερη οπότε όλα τα στοιχεία της γίνονται μηδέν. άρα (γ') σε καμία περίπτωση δεν έχουμε τάξη 4

Η τελευταία σειρά γίνεται μηδέν αν (απαλοιφή) $\begin{cases} c - 2b + a = 0, \\ d - 3b + 2a = 0. \end{cases}$ άρα

(α') Αν ισχύουν και οι δύο παραπάνω ισότητες έχουμε τάξη 2 (β') Αν ισχύει μόνον μια απο τις ισότητες του (α') έχουμε τάξη 3.

5. Αποδείξτε ότι αν η απόσταση του $\underline{u}$ από το $\underline{v}$ ισούται με την απόσταση του $\underline{u}$ από το $-\underline{v}$ τότε το $\underline{u}$ είναι ορθογώνιο στο $\underline{v}$. Αποφανθείτε για το αν ισχύει το αντίστροφο.

$$\begin{aligned}\|\underline{u} - \underline{v}\| = \|\underline{u} + \underline{v}\| &\implies \|\underline{u} - \underline{v}\|^2 = \|\underline{u} + \underline{v}\|^2 \implies \|\underline{u}\|^2 - 2\underline{u}^T \underline{v} + \|\underline{v}\|^2 = \|\underline{u}\|^2 + 2\underline{u}^T \underline{v} + \|\underline{v}\|^2 \implies \\ &\implies -2\underline{u}^T \underline{v} = 2\underline{u}^T \underline{v} \implies 4\underline{u}^T \underline{v} = 0 \implies \underline{u}^T \underline{v} = 0\end{aligned}$$

Ισχύει και το αντίστροφο επειδή όλες οι συνεπαγωγές ισχύουν και προς τα πίσω.